

矩阵的特征值与特征向量的计算

摘要

矩阵是高等代数学中的常见工具，也常见于统计分析等应用数学学科中。在物理学中，矩阵于电路学、力学、光学和量子物理中都有应用；计算机科学中，三维动画制作也需要用到矩阵。矩阵的运算是数值分析领域的重要问题。将矩阵分解为简单矩阵的组合可以在理论和实际应用上简化矩阵的运算。

在本论文中，我们主要讨论矩阵的特征值和特征向量的计算，我们知道，有很多现实中的问题都可以用到矩阵特征值与特征向量计算的知识，比方，在物理、力学和工程技术方面有很多的应用，并且发挥着极其重要的作用。因为这些问题都可归结为求矩阵特征值的问题，具体到一些具体问题，如振动问题，物理中某些临界值确实定问题以及一些理论物理中的问题。

在本论文中，我们主要介绍求矩阵的特征值与特征向量的一些原理和方法，原理涉及高等代数中矩阵的相关定理，方法主要介绍幂法及反幂法，Jacobi 方法和 QR 算法，并利用 MATLAB, VC 等软件编写相关算法的程序来求解相关问题，加以验证。

关键词： 矩阵；特征值；特征向量；幂法；反幂法；Jacobi 方法；QR 算法；VC 软件；MATLAB 软件

THE CALCULATIONS OF EIGENVALUE AND EIGENVECTOR OF MATRIX

ABSTRACT

The matrix is an usual tool in Advanced Algebra, which also used by applied mathematics such as Statistics Analysis. In Physics, we can see the important usage of matrix including Electric Circuits, Mechanics, Optics and Quantum Physics. Making three dimension needs matrix in Computer. The arithmetic of matrix is a very important part in Numerical Analysis. It can simplify the calculation of matrix that we decompose the matrix into several simple parts.

In this thesis, we mainly talk about the calculation of eigenvalue and eigenvector of matrix. As we all know, there are lots of realistic problems which need the knowledge of the thesis to solve. We can see the important usage of matrix including Electric Circuits, Mechanics, Optics and Quantum Physics. It play an important role in these problems inferred above. Because these problems can regarded as the calculation of eigenvalue and eigenvector of matrix, like vibrating problems and critical value problems and so on.

We primarily introduce the principle and approach of the calculation of eigenvalue and eigenvector of matrix that infer the relevant principle in Advanced Algebra. We mainly talk about iteration methods, Jacobi method and QR method by using MATLAB.

Key words: Matrix; Eigenvalue; Eigenvector; Iteration methods; Jacobi method;
QR method; MATLAB

目 录

1 引言.....	1
2 相关定理.....	1
3 符号说明.....	2
4 冥法及反冥法.....	2
4.1 冥法.....	3
4.2 反冥法.....	8
5 QR算法.....	14
参考文献.....	18
附录.....	19

1 引言

在本论文中，我们主要讨论矩阵的特征值和特征向量的计算，我们知道，有很多现实中的问题都可以用到矩阵特征值与特征向量计算的知识，比方，在物理、力学和工程技术方面有很多的应用，并且发挥着极其重要的作用。因为这些问题都可归结为求矩阵特征值的问题，具体到一些具体问题，如振动问题，物理中某些临界值确实定问题以及一些理论物理中的问题。

在本论文中，我们主要介绍求矩阵的特征值与特征向量的一些原理和方法，原理涉及高得代数中矩阵的相关定理，方法主要介绍冥法及反冥法，Jacobi 方法和 QR 算法，并利用 MATLAB，VC 等软件编写相关算法的程序来求解相关问题，加以验证。

2 相关定理

定理2.1 如果 λ_i ($i=1,2,\dots,n$) 是矩阵A的特征值，那么有

$$1^\circ \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}A$$

$$2^\circ \det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

定理2.2 设A与B为相似矩阵 ($B = T^{-1}AT$)，那么

1° A与B有相同的特征值；

2° 假设 x 是 B 的一个特征向量，那么 Tx 是A的特征向量

定理2.3 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ，那么A的每一个特征值必属于下述某个圆盘之中：

$$|\lambda - a_{ij}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (i=1,2,\dots,n).$$

定义2.1 设 A 是 n 阶对称矩阵, 对于任意非零向量 x , 称 $R(x) = \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$ 为对应于向量 x

的Rayleigh商.

定理2.4 设 $A \in R^{n \times n}$ 为对称矩阵 (其特征值次序记作 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, 对应的特征向量 x_1, x_2, \dots, x_n 组成标准化正交组, 即 $(x, x_j) = \delta_{ij}$), 那么

$$1^\circ \lambda_n \leq \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \leq \lambda_1 \quad (\text{对于任何非零向量 } x);$$

$$2^\circ \lambda_1 = \max_{\substack{x \in R^n \\ x \neq 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)};$$

$$3^\circ \lambda_n = \min_{\substack{x \in R^n \\ x \neq 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

3 符号说明

A : n 阶矩阵

B : n 阶矩阵

I : n 阶单位阵

$\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$: 矩阵特征值

x : 实数域上的 n 维向量

$v_i (i = 0, 1, \dots, n, \dots)$: 实数域上的 n 维向量

$u_k (k = 0, 1, \dots, n, \dots)$: 实数域上的标准化向量

4 幂法及反幂法

4.1 幂法

幂法是一种计算矩阵 $A \in R^{m \times n}$ 的主特征值的一种迭代法, 它最大优点是方法简单,

适合于计算大型稀疏矩阵的主特征值.

设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$, 其特征值为 λ_i , 对应特征向量为 $x_i (i = 1, \dots, n)$, 即

$$Ax_i = \lambda_i x_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

且 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 线性无关. 设 A 特征值满足: (即 λ_1 为强占优)

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad (4.1.1)$$

幂法的根本思想, 是任取一个非零初始向量 $v_0 \in R^n$, 由矩阵 A 的乘幂构造一向量序列

$$\begin{cases} v_1 = Av_0 \\ v_2 = Av_1 = A^2v_0 \\ v_{k+1} = Av_k = A^{k+1}v_0 \end{cases} \quad (4.1.2)$$

称 $\{v_k\}$ 为迭代向量.

下面来分析 λ_1 及 x_1 与 $\{v_k\}$ 关系.

由设 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 为 R^n 中一个根本, 于是, $v_0 \neq 0$ 有展开式

$$v_0 = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

(且设 $a_1 \neq 0$)

且有

$$v_k = Av_{k-1} = A^k v_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k x_i \quad (4.1.3)$$

$$v_k = \lambda_1^k \left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k x_n \right)$$

$$\equiv \lambda_1^k (a_1 x_1 + \varepsilon_k)$$

由假设 (4.1.1) 式, 那么

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k = 0 (i = 2, \dots, n)$$

即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$$

且收敛速度由比值 $r = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$ 确定. 且有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{v_k}{\lambda_1^k} = \alpha_1 x_1 \quad (4.1.4)$$

这说明, 当 k 充分大时, 有 $v_k / \lambda_1^k \approx \alpha_1 x_1$, 或 v_k / λ_1^k 越来越接近特征向量 $\alpha_1 x_1$.

下面考虑主特征值 λ_1 的计算.

用 $(v_k)_i$ 表示 v_k 的第 i 个分量, 考虑相邻迭代向量的分量的比值.

$$\frac{(v_{k+1})_i}{(v_k)_i} = \lambda_1 \left\{ \frac{\alpha_1 (x_1)_i + (\varepsilon_{k+1})_i}{\alpha_1 (x_1)_i + (\varepsilon_k)_i} \right\}, (\text{设 } (v_k)_i \neq 0)$$

从而是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(v_{k+1})_i}{(v_k)_i} = \lambda_1 \quad (4.1.5)$$

说明相邻迭代向量分量的比值收敛到主特征 λ_1 , 且收敛速度由比值 $r = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$ 来度量, r 越

小收敛越快, 但 r 越小收敛越快, 但 $r = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1$, 而接近于 1 时, 收敛可能很慢.

定理 4.1 (1) 设 $A \in R^{n \times n}$ n 个线性无关的特征向量:

(2) 设 A 特征值满足

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

(3) 幂法: $v_0 \neq 0$ (且 $\alpha_1 \neq 0$)

$$v_k = A v_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

那么 (1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(v_{k+1})_i}{(v_k)_i} = \alpha_1 x_1$;

$$(2) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(v_{k+1})_i}{(v_k)_i} = \lambda_1$$

如果 A 主特征值为实的重根, 即有

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

又设 A 有 n 个线性无关的特征向量, x_1, x_2, \dots, x_n , 其中

$$Ax_i = \lambda_1 x_i (i=1, \dots, r), Ax_i = \lambda_i x_i (i=r+1, \dots, n)$$

对于任意初始向量

$$v_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \text{ (且 } \alpha_1, \dots, \alpha_r \text{ 不全为零)}$$

那么由幂法有

$$\begin{aligned} v_k &= A^k v_0 = \lambda_1^k \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i \right) \\ &= \lambda_1^k \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \varepsilon_k \right) \end{aligned}$$

且有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{v_k}{\lambda_1^k} = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i, \quad (\text{设 } \alpha_1, \dots, \alpha_r \text{ 不全为零})$$

$$(\because \varepsilon_k \rightarrow 0 \text{ 当 } k \rightarrow \infty)$$

由此, 当 k 充分大时, v_k / λ_1^k 接近于与 λ_1 对应的特征向量的某个线性组合.

应用幂法计算 A 的主特征值 λ_1 及对应的特征向量时, 如果 $|\lambda_1| > 1$ (或 $|\lambda_1| < 1$), 迭代向量的各个不等于零的分量将随 $k \rightarrow \infty$ 而趋于无穷 (或趋于零), 这样电算时就可能溢出. 为此, 就非要将迭代向量加以标准化.

设有非零向量

$$v \rightarrow \text{归范化 } u = \frac{v}{\max(v)} \text{ (或 } u = \frac{v}{\|v\|_2} \text{ 等)}$$

其中 $\max(v)$ 表示向量 v 绝对值最大的元素, 即如果有草药 $|(v)_{i_0}| = \max |(v)_i|$, 那么

$$\max(v) = (v)_{i_0} \quad 1 \leq i \leq n$$

其中 i_0 为所有绝对值最大的分量中最小指标.

显然有下面性性质:

设 t 为实数, $v \in r^n$, 那么

$$\max(tv) = t \max(v)$$

在定理 4.1 条件下幂法可改进为:

任取初始向量 $u_0 = v_0 \neq 0$ (且 $\alpha_1 \neq 0$).

迭代:

标准化:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= Au_0, & u_1 &= \frac{v_1}{\max(v_1)} = \frac{Av_0}{\max(Av_0)} \\
 v_2 &= Au_1 = \frac{A^2v_0}{\max(Av_0)}, & u_2 &= \frac{v_2}{\max(v_2)} = \frac{A^2v_0}{\max(A^2v_0)} & (4.1.6) \\
 &\vdots & &\vdots \\
 v_k &= Au_{k-1} = \frac{A^k v_0}{\max(A^{k-1}v_0)}, & u_k &= \frac{v_k}{\max(v_k)} = \frac{A^k v_0}{\max(A^k v_0)} \\
 &\vdots & &\vdots
 \end{aligned}$$

于是, 由上式产生迭代向量序列 $\{v_k\}$ 及标准化向量 $\{u_k\}$

且改进幂法计算公式为:

设 $u_0 = v_0 \neq 0$ (且 $\alpha_1 \neq 0$)

对于 $k = 1, 2, \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{迭代:} \quad v_k = Au_{k-1} \\ \quad \quad \mu_k = \max(v_k) \\ \text{规范化:} \quad \mu_k = v_k / \mu_k \end{array} \right. \quad (4.1.7)$$

下面考查 $\{u_k\}, \{v_k\}$ 与计算 λ_1 及 x_1 的关系.

$$\text{由} \quad v_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

$$\text{且有} \quad A^k v_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k x_i = \lambda_1^k (\alpha_1 x_1 + \varepsilon_k) \quad (4.1.8)$$

$$\text{其中} \quad \varepsilon_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i \rightarrow 0 \text{ (当 } k \rightarrow \infty \text{)}$$

(1) 考查标准化向量序列:

由 (4.1.7) 及 (4.1.8) 式, 那么有

$$u_k = \frac{\lambda_1^k (\alpha_1 x_1 + \varepsilon_k)}{\max(\lambda_1^k (\alpha_1 x_1 + \varepsilon_k))}$$

$$= \frac{\alpha_1 x_1 + \varepsilon_k}{\max(\alpha_1 x_1 + \varepsilon_k)} \rightarrow \frac{x_1}{\max(x_1)} \text{ (当 } k \rightarrow \infty \text{)}$$

(2) 考查迭代向量序列:

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{A^k v_0}{\max(A^{k-1} v_0)} = \frac{\lambda_1^k (\alpha_1 x_1 + \varepsilon_k)}{\max(\lambda_1^{k-1} (\alpha_1 x_1 + \varepsilon_{k-1}))} \\ &= \lambda_1 \frac{\alpha_1 x_1 + \varepsilon_k}{\max(\alpha_1 x_1 + \varepsilon_{k-1})} \end{aligned}$$

于是, $\mu_k = \max(v_k) = \lambda_1 \frac{\max(\alpha_1 x_1 + \varepsilon_k)}{\max(\alpha_1 x_1 + \varepsilon_{k-1})} \rightarrow \lambda_1$, (当 $k \rightarrow \infty$)

定理 (改进幂法)

(1) 设 $A \in R^{n \times n}$ 有 n 个线性无关特征向量;

(2) 设 A 特征值满足

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

且 $Ax_i = \lambda_i x_i (i = 1, 2, \dots, n)$

(3) $\{u_k\}, \{v_k\}$ 由改进幂法得到 ((4.1.7) 式), 那么有

$$(a) \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \frac{x_1}{\max(x_1)}$$

$$(b) \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \max(v_k) = \lambda_1$$

且收敛速度由比值 $r = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$ 确定.

实现幂法, 每迭代一次主要是计算一次矩阵乘向量 (Au), 可编一个子程序.

例 1. 用 MATLAB 编写幂法程序求矩阵主特征值及近似主特征量

用幂法计算以下矩阵的主特征值和对应的特征向量的近似向量, 精度 $\varepsilon = 10^{-5}$. 并把输出的结果真实结果进行比较.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

解 输入 MATLAB 程序

```
>>B=[1 2 3;2 1 3;3 3 6]; v0=[1,1,1]';
```

```
[k, lambda, Vk, Wc]=mifa(B, V0, 0.00001, 100), [V, D] = eig (B),
Dzd=max(diag(D)), wuD= abs(Dzd- lambda), wuV=V(:, 3)./Vk,
```

运行后屏幕显示结果

请注意：迭代次数 k , 主特征值的近似值 λ , 主特征向量的近似向量 V_k , 相邻两次迭代的误差 w_c 如下：

```
k =          lambda =          Wc =          Dzd =          wuD =
    3              9              0              9              0
Vk =
    0.5000000000000000          0.81649658092773
    0.5000000000000000          0.81649658092773
    1.0000000000000000          0.81649658092773
V =
    0.70710678118655    0.57735026918963    0.40824829046386
   -0.70710678118655    0.57735026918963    0.40824829046386
                                0   -0.57735026918963    0.81649658092773
```

4.2 反幂法及位移反幂法

(1) 反幂法可用来计算矩阵按模最小的特征值及对应的特征向量。

设 $A \in R^{n \times n}$ 为非奇异矩阵, A 特征值满足

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| > 0$$

对应特征向量 x_1, x_2, \dots, x_n 为线性无关, 那么 A^{-1} 特征求值为

$$\left| \frac{1}{\lambda_1} \right| \leq \left| \frac{1}{\lambda_2} \right| \leq \dots \leq \left| \frac{1}{\lambda_n} \right|$$

特征向量为 x_1, x_2, \dots, x_n .

因此计算 A 的按模最小的特征值 λ_n 的问题就是计算 A^{-1} 按模最大的特征值问题。

对于 A^{-1} 应用幂法迭代 (称为反幂法), 可求矩阵 A^{-1} 的主特征值 $1/\lambda_n$.

反幂法迭代公式:

任取初始向量 $v_0 = u_0 \neq 0$ (且 $\alpha_n \neq 0$),

$$k = 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} v_k = A^{-1}u_{k-1} \\ \mu_k = \max(v_k) \\ u_k = v_k / \mu_k \end{cases} \quad (4.2.1)$$

其中迭代向量 v_k 可通过解方程组求得:

$$Av_k = u_{k-1}$$

如果 $A \in R^{n \times n}$ 有 n 个线性无关特征向量且 A 特征值满足:

$$|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0$$

那么由反幂法 (2.11) 构造的向量序列 $\{u_k\}, \{v_k\}$ 满足

$$(a) \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \frac{x_n}{\max(x_n)}$$

$$(b) \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \frac{1}{\lambda_n}$$

且收敛速度由比值 $r = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_{n-1}|}$ 确定.

(2) 应用反幂法求一个的似特征值对应的特征向量.

设 $A \in R^{n \times n}$ 的特征值 λ_j 的一个近似值 $\tilde{\lambda}_j$ (通常是用其它方法得到), 现要求对应的特征向量 x_j (近似), 在反幂法中也可用原点平移法来加速收敛.

如果 $(A - pI)^{-1}$ 存在, 显然, 特征值为

$$\frac{1}{\lambda_1 - p}, \frac{1}{\lambda_2 - p}, \dots, \frac{1}{\lambda_n - p}$$

对应的特征向量 x_1, x_2, \dots, x_n .

现取 $p = \tilde{\lambda}_j$ (但不能取 λ_j), 且设 λ_j 与其它特征值是别离的, 即

$$|\lambda_j - p| \leq |\lambda_i - p|, (j \neq i)$$

$$\text{即 } \frac{1}{|\lambda_j - p|} \leq \frac{1}{|\lambda_i - p|}, (i \neq j)$$

说明 $\frac{1}{\lambda_j - p}$ 是 $(A - pI)^{-1}$ 的主特征值.

现对 $(A - pI)^{-1}$ 应用幂法得到反幂法计算公式:

取初始向量 $u_0 = v_0 \neq 0$ (且 $\alpha_j \neq 0$),

$$k = 1, 2, \dots,$$

$$\begin{cases} v_k = (A - pI)^{-1} u_{k-1} \\ \mu_k = \max(v_k) \\ u_k = v_k / \mu_k \end{cases} \quad (4.2.2)$$

与定理 8 证明类似, 可得下述结果.

定理 10 [1] 设 $A \in R^{n \times n}$ 有 n 个线性无关特征向量即 $Ax_i = \lambda_i x_i (i = 1, \dots, n)$.

(2) 取 $p = \lambda_j$ (为 A 特征值 λ_j 一个近似值), 设 $(A - pI)^{-1}$ 存在且

$$|\lambda_j - p| \leq |\lambda_i - p| (j \neq i)$$

那么由反幂法迭代公式 (2, 12) 构造向量序列 $\{u_k\}, \{v_k\}$ 满足:

$$(a) u_k \rightarrow \frac{x_j}{\max(x_j)} \quad (\text{当 } k \rightarrow \infty)$$

$$(b) \mu_k = \max(v_k) \rightarrow \frac{1}{\lambda_j - p} \quad (\text{当 } k \rightarrow \infty)$$

$$\text{或 } p + \frac{1}{\mu_k} \rightarrow \lambda_j \quad (\text{当 } k \rightarrow \infty)$$

且收敛速度由比值

$$r = \frac{|\lambda_j - p|}{\min_{i \neq j} |\lambda_i - p|}$$

确定.

由定理可知, 反幂法计算公式 (4.2.2) 可用计算特征向量 x_j . 选择 p 是 λ_j 的一个近似且 A 的特征值别离情况较好, 一般 r 很小, 所以迭代过程收敛较快, 同时改进特征值.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/086221100120010110>