第1章 线性系统的状态空间描述

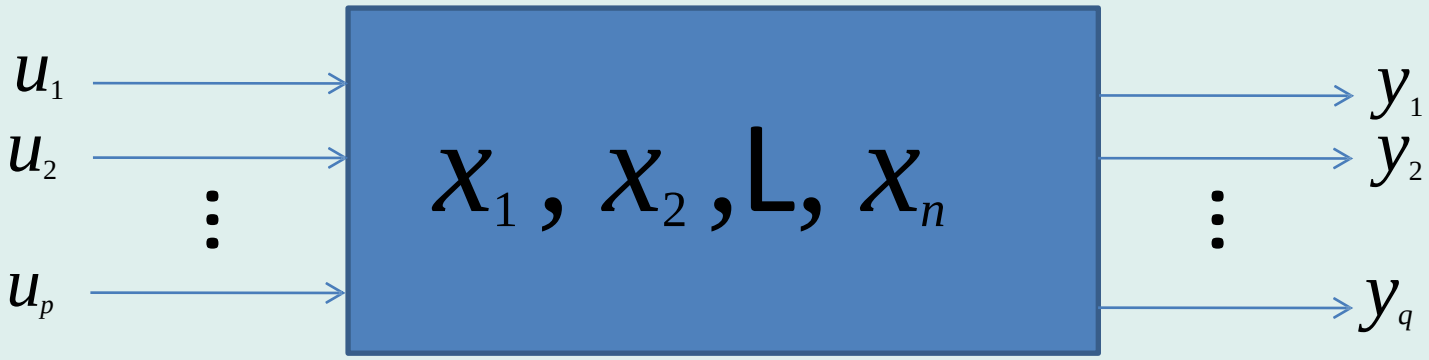
时间域理论：简称时域理论，以时间域数学模型为系统描述，在时间域内分析和综合线性系统的运动和特性的理论和方法。

1.1 系统的状态空间描述

一些基本概念：

（1） 动态过程数学描述的两种基本类型

如果一个系统用下图的一个方块来表征：



方块以外为系统环境

系统输入：环境对系统的作用，$u_1, u_2, \cdots, u_p$

系统输出：系统对环境的作用，$y_1, y_2, \cdots, y_q$

它们统称为系统的外部变量。

变量：刻画系统在每个时刻所处状况的变量，

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ ，称为系统状态变量。

体现了系统的行为。

数学描述（数学模型）：反映系统变量间因果关系和变换关系。

（2）系统的外部描述

输入—输出 **(IO)** 描述，属于不完全的描述。

它不表征系统的　　结构和　　变量，只反映外部变量间的因果关系，即输出和输入间的因果关系。

例：一个线性定常、单输入—单输出(SISO)系统，其外部描述为一个线性常系数微分方程：

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y$$

$$= b_{n-1}u^{(n-1)} + b_{n-2}u^{(n-2)} + \cdots + b_1 u^{(1)} + b_0 u$$

其中：a_i 和 b_j 为实常数，$i = 0, 1, \cdots, n$　　$j = 0, 1, \cdots, n$-1

假定初始条件为零，取拉氏变换，得到系统的复频率域描述，即传递函数。

$$G(s)=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^{n}+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

（3）系统的 描述 — 状态空间描述，完全的描述。

由两个数学方程组成：

- 状态方程：微分方程或差分方程。
  它表征 变量组和输入变量组间的因果关系。
- 输出方程：代数方程。表征 变量与输出变量之间关系

说明：

系统的 描述表征了 变量组、输入变量组和输出变量组三者之间的转换关系。

（4）状态和状态空间的几个基本概念

状态：完全地表征系统时间域行为的一个最小　　变量组。

状态变量：组成这个变量组的变量，例如：

$$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$$

其中：$t \geq t_0$，t_0 为初始时刻。

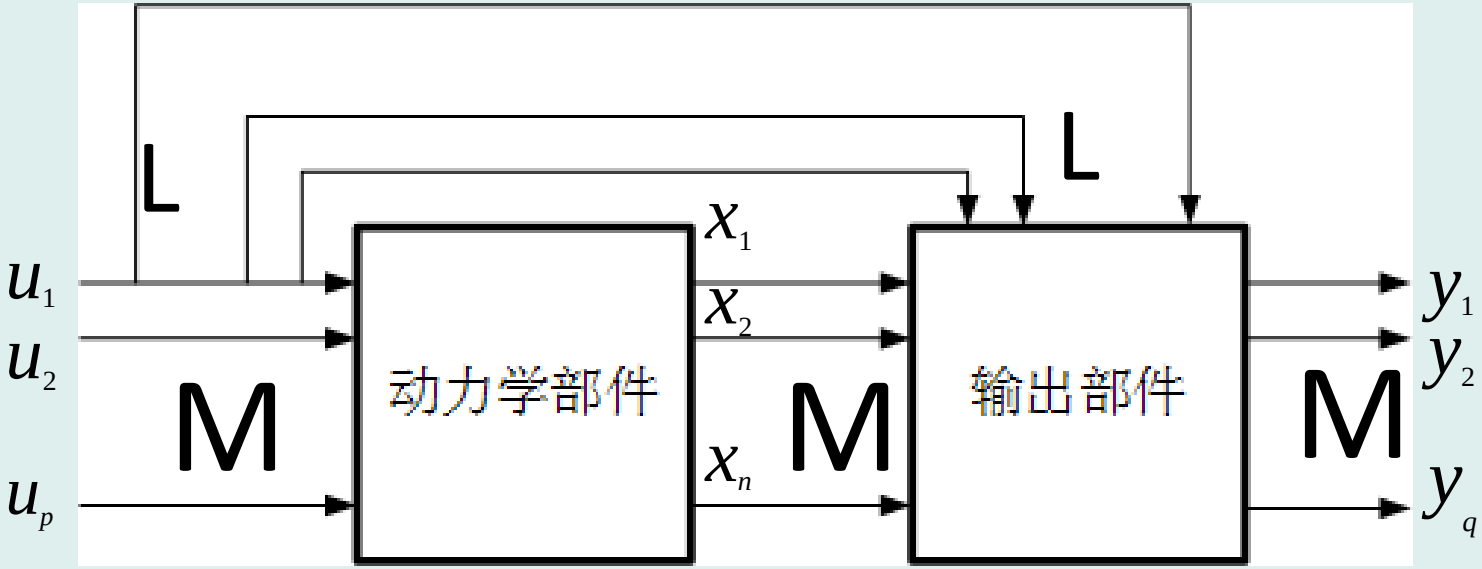
状态向量：由状态变量构成的*列向量*。

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad t \geq t_0$$

状态空间：状态向量取值的一个向量空间。

（5）广义动力学系统的状态空间描述

一个广义动力学系统的结构如图所示：



状态变量组：$x_1, x_2, \cdots, x_n$

输入变量组：$u_1, u_2, \cdots, u_p$

输出变量组：$y_1, y_2, \cdots, y_q$

状态空间描述：输入引起系统状态变化，而状态和输入则决定了输出的变化。

包括：状态方程 + 输出方程。

（i）状态方程：微分方程或差分方程。

一般情况下，为一阶非线性时变微分方程组。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_p; t) \\ \cdots\cdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_p; t) \end{cases} \qquad t \geq t_0$$

写成向量方程的形式：$\dot{X} = f(x, u, t), \quad t \geq t_0$

(ii) 输出方程（或量测方程）

一般情况下，输出方程为：

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \quad , x_n; \ u_1, \quad , u_p; t) \\ \\ y_q = g_q(x_1, \quad , x_n; \ u_1, \quad , u_p; t) \end{cases} , t \geq t_0$$

写成向量方程的形式：$Y = g(x, u, t), \quad t \geq t_0$

(iii) 连续线性系统的状态空间描述为：

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u \\ y = C(t)\,x + D(t)\,u \end{cases} \qquad t \geq t_0$$

其中：

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

系统矩阵

$$B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1p}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{np}(t) \end{bmatrix}$$

输入矩阵

$$C(t) = \begin{vmatrix} c_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{q1}(t) & \cdots & c_{qn}(t) \end{vmatrix}$$

输出矩阵

$$D(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \cdots & d_{1p}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{q1}(t) & \cdots & d_{qp}(t) \end{bmatrix}$$

传输矩阵

（IV）离散系统的状态空间描述

各变量在离散的时刻取值，状态空间反映离散时刻的变量组间的因果关系和转换关系。

用 $k = 0, 1, 2,$ ，来表示离散的时刻。

一般的离散系统状态空间形式为：

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases}, k = 0,1,2,$$

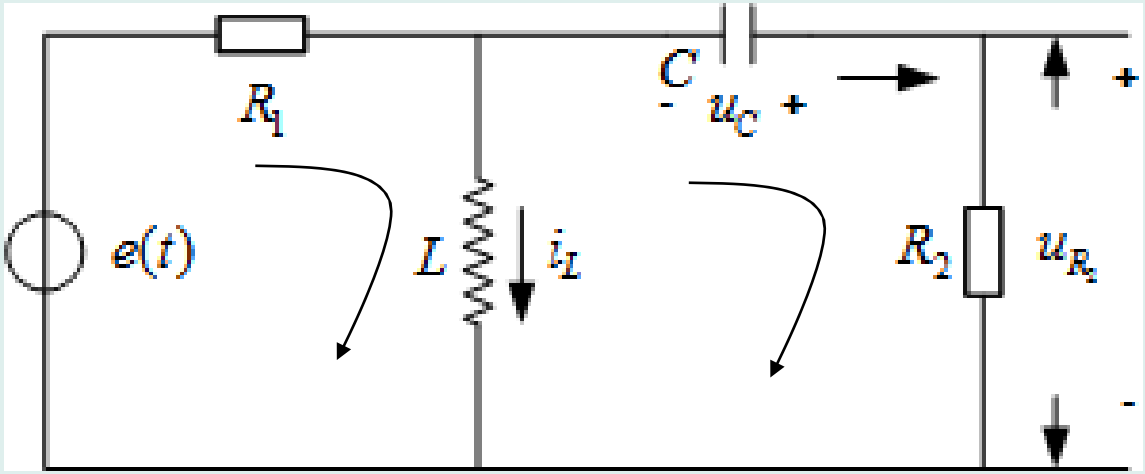
线性离散时间系统：

$$\begin{cases} x(k+1) = G(k)x(k) + H(k)u(k) \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{cases}, k = 0,1,2,$$

其中，G—系统矩阵；H—输入矩阵；C—输出矩阵；D—传输矩阵

（6）系统状态空间描述的列写举例

例1：（连续）下图所示简单 RLC 电路，电路各组成元件的参数为已知，输入变量取为电压源 $e(t)$，输出变量取为电阻 R_2 的端电压 u_2。



解：确定状态变量，最多二个线性无关的变量，取 u_c 和 i_L 作为状态变量。

列出原始电路方程：由 KCL 电路定律。

右回路：$u_C + R_2 i_C = L\dfrac{di_L}{dt}$

左回路：$R_1(i_L + i_C) + L\dfrac{d\,i_L}{dt} = e(t)$

由于 $i_C = C\dfrac{du_C}{dt}$，代上式入，

得到：

$$R_2 C\frac{du_C}{dt} + L\frac{d\,i_L}{dt} = -u_C$$

$$R_1 C\frac{du_C}{dt} + L\frac{d\,i_L}{dt} = -R_1 i_L + e(t)$$

导出状态方程：以 du_C / dt 和 di_L / dt 为变量，

整理上述方程为：

$$\begin{cases} \dfrac{du_C}{dt} = -\dfrac{1}{(R_1+R_2)C}u_C - \dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C}i_L + \dfrac{1}{(R_1+R_2)C}e(t) \\ \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{R_1}{L(R_1+R_2)}u_C - \dfrac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}i_L + \dfrac{R_2}{L(R_1+R_2)}e(t) \end{cases}$$

将上述微分方程写成向量的形式，于是得到：

状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(R_1+R_2)C} & \dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C} \\ \dfrac{R_1}{L(R_1+R_2)} & \dfrac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (R_1+R_2)C \\ \dfrac{R_2}{L(R_1+R_2)} \end{bmatrix} e(t)$$

同理，系统输出为：

$$u_{R_2} = R_2 i_C = R_2 C \frac{du_C}{dt} = -\frac{R_2}{R_1+R_2} u_C - \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} i_L + \frac{R_2}{R_1+R_2} e(t)$$

成向量的形式，得到输出方程：

$$u_{R_2} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_2}{R_1+R_2} & -\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} e(t)$$

例2：（离散）考虑人口分布问题，设某国1988年的人口分布为：城市人口为 10^7，农村人口为 9×10^7。人口的流动情况为：每年有 4% 的上一年城市人口迁去农村，同时有 2% 的上一年农村人口迁到城市。设整个国家的人口自然增长率为 1%。

解：确定状态变量：城市人口 x_1 和农村人口 x_2 。

建立人口按年分布方程：取1988年为 $k=0$，则 $k+1$ 年时城市人口和农村人口的分布方程，可以定为：

$$x_1(k+1)=1.01\left[(1-0.04)\,x_1(k)+0.02\,x_2(k)\right]$$

$$x_2(k+1)=1.01\left[0.04\,x_1(k)+(1-0.02)\,x_2(k)\right]$$

导出状态方程：把上述联立方程表为向量方程的形式，即得到人口分布的状态方程为：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9696 & 0.0202 \\ 0.0404 & 0.9898 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, k = 0,1,2,\mathrm{L}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^7 \\ 9\times 10^7 \end{bmatrix}$$

1.2 系统按其状态空间描述的分类

系统的状态空间描述是其动力学特征的完整的表征。各类系统在结构上和特性上的质的差别，将表现为它们的状态空间描述在类型上的不同：

线性系统和非线性系统

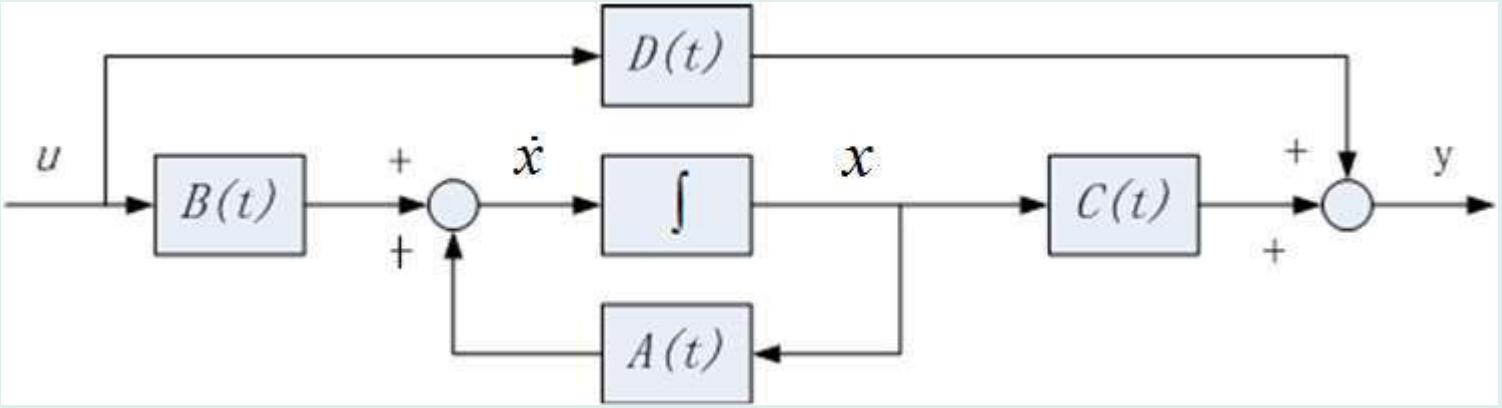
定义：

向量方程 $f(x, u, t)$ 和 $g(x, u, t)$ 中的所有元都是变量 $x_1, \cdots, x_n$ 和 $u_1, \cdots, u_p$ 的线性函数，则相应的系统为线性系统。

状态方程表示：

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u \\ y = C(t)\,x + D(t)\,u \end{cases} \qquad t \geq t_0$$

方框图表示：



定义：

若向量函数中 $f(x, u, t)$ 和 $g(x, u, t)$ 至少包含一个元为变量 x_1, L, x_n 和 u_1, L, u_p 的非线性函数，则为非线性系统。

表示为：

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases}$$

解决办法：

在某个 $x_0(t)$ 的一个邻域内线性化，按线性系统处理。

时变系统和时不变系统

定义：

系统的状态空间描述中显含时间 *t* 时，即向量函数 *f* 和 *g* 或系数矩阵 *A*，*B*，*C*，*D* 是包含 *t* 的函数时，称相应的系统为时变系统（或非定常系统）。

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u \\ y = C(t)\,x + D(t)\,u \end{cases}$$

若状态空间表达式中不显含时间 *t*，则为定常系统，表示为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

连续系统和离散系统

定义：

作用于系统的变量、表征系统形态的变量，都是时间 t 的连续变化过程，这样的系统称为连续时间系统，简称连续系统。

状态方程：微分方程的形式。

输出方程：连续的变换方程。

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)\,x + B(t)u \\ y = C(t)\,x + D(t)u \end{cases}$$

若系统的各个变量只取值于离散的时刻时，相应的变量间的因果关系或变换关系，就必须采用离散时间系统来表征。

离散时间系统简称为离散系统。

状态方程：差分方程的形式。

输出方程：离散时间变换方程。

$$\begin{cases} x(k+1) = G(k)\,x(k) + H(k)\,u(k) \\ y(k) = C(k)\,x(k) + D(k)\,u(k) \end{cases}$$

确定性系统和随机系统

定义：

确定性系统：

是指系统的特性和参数是按确定的规律变化的，其各个输入变量（包括控制和扰动）也是按确定的规律而变化的。

不确定性系统（随机系统）：

系统的特性和参数的变化不能用确定的规律来描述，或者作用于系统的变化（包括控制和扰动）是随机变化，或者两者兼而有之。

1.3 化输入－输出描述为状态空间描述

由输入－输出描述确定状态空间描述的问题称为实现问题。

问题的提出：

一个单输入－单输出(SISO)线性定常系统，令 y 和 u 分别为其输出变量和输入变量，则可用单变量的高阶微分方程来描述：

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y$$

$$= b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + b_1 u^{(1)} + b_0 u$$

而状态空间描述为：

$$\begin{cases} x\&=Ax+bu \\ y=cx+du \end{cases}$$

其中：A为 $n\times n$ 矩阵，b 为 $n\times 1$ 矩阵，c 为 $1\times n$矩阵，d 为标量。

问题归结为：

选取适当的状态变量组与确定各个系数矩阵 A，b， c 和 d，确立两种描述之间的对应关系。

解决办法：引入微分算子符号 $p = d/dt$

则

$$y = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} \quad u$$

当 $m = n$ 时，有理分式是真的。

当 $m < n$ 时，有理分式是严格真的。

(1) 当 $m < n$时，将上式改写为：

$$\begin{cases} \ddot{y}_0 = \dfrac{1}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \mathrm{L} + a_1 p + a_0} u \\ y = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \mathrm{L} + b_1 p + b_0)\ddot{y}_0 \end{cases}$$

进而改写为：

$$\begin{cases} y_0^{(n)} + a_{n-1} y_0^{(n-1)} + \mathrm{L} + a_1 \dot{y}_0 + a \\ y = b \ y_0^{(m)} \end{cases}$$

取状态变量组为：

$$x_1 = y,\ x_2 = y^{(1)},\ \ldots,\ x_n = y^{(n-1)}$$

则

$$\dot{x}_1 = y^{(1)} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = y^{(2)} = x_3$$

$$\cdots\cdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u$$

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + b_m x_{m+1}$$

则有

$$X = [\, x_1 \,, \mathrm{L}, \, x_n \,]^T$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \mathrm{M} & & \mathrm{O} & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \mathrm{L} & -a_{n-1} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{M} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_0 \qquad b_m \quad 0 \qquad 0]\, X$$

例：给定系统的输入—输出描述为

$$y^{(3)} + 16\,y^{(2)} + 194\,y^{(1)} + 640\,y = 160u^{(1)} + 720u$$

解：先判断出 $m < n$，则根据上述变换公式，直接得到系统的状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -194 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 720 & 160 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(2) 当 $m = n$ 时，将有理分式进行严格真化，有

$$y = [b_n + \frac{(b_{n-1} - b_n a_{n-1}) p^{n-1} + \cdots + (b_0 - b_n a_0)}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}]u$$

则同理可设

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = u \\ y = (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) y^{(n-1)} + \cdots + (b_0 - b_n a_0) y + b_n u \end{cases}$$

于是可以得到

$$y = (b_0 - b_n a_0) x_1 + \cdots + (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) x_n + b_n u$$

则写成向量形式：

$$\dot{X}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \mathrm{M} & & \mathrm{O} & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \mathrm{L} & -a_{n-1} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{M} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y=[(b_0-b_n a_0),\mathrm{L}\ ,(b_{n-1}-b_n a_{n-1})]X+b_n u$$

例：给定系统的输入—输出描述为：

$$y^{(3)} + 16y^{(2)} + 194y^{(1)} + 640y = 4u^{(3)} + 160u^{(1)} + 720u$$

解：先判断得出 $m = n$，则由上面变换公式，可以直接得到系统的状态空间描述为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -194 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1840 & -616 & -64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 4u$$

1.4 状态方程的对角线规范形和约当规范形

线性定常系统的系统矩阵 A 的特征值是表征系统的动力学特征的一个重要参量。

（一）对角线规范形

给定系统的状态方程

$$\dot{X} = AX + Bu$$

定义：系统的特征值为如下特征方程

$$\det(\lambda I - A) = 0$$ 的根。

线性代数中有关特征值的概念回顾：

1一个阶数为 n 的系统，必有且仅有 n 个特征值，可为实数或共轭复数。

2称一个非零列向量 v_i 为矩阵 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量，如果满足 $(\lambda_i I - A)\, v_i = 0$ 。

3　对于某个特征值 λ_i，其特征向量是不唯一的。

（4）当 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \mathrm{L}, \lambda_n$ 为两两互异时，则任取的 n 个特征向量 $v_1, v_2, \mathrm{L}, v_n$ 必是线性无关的。

结论：（对角规范形）

某线性系统，设其特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \mathrm{L}, \lambda_n$ 为两两互异，并利用它们的特征向量组成变换矩阵 $P = [v_1, \mathrm{L}, v_n]$，

那么系统的状态方程在变换 $\bar{X} = P^{-1}X$ 下必可化为如下的对角线规范形：

$$\dot{\bar{X}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \mathrm{O} & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \bar{X} + \bar{B}u$$

其中，$\bar{B} = P^{-1}B$

证明： 由 $\bar{X} = P^{-1}X$，对两边求导，可得出

$$\dot{\bar{X}} = P^{-1}\dot{X} = P^{-1}AP\bar{X} + P^{-1}Bu = \bar{A}\bar{X} + \bar{B}u$$

其中 $\bar{A} = P^{-1}AP$， $P = [v_1, \cdots, v_n]$，满足 $\lambda_i v_i = Av_i$

可得到： $AP = [Av_1, \cdots, Av_n] = [\lambda_1 v_1, \cdots, \lambda_n v_n]$

$$= [v_1, \cdots, v_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

上式两边左乘 P^{-1}得，

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

证毕。

例：给定线性定常系统的状态方程为

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}7\\ 2\\ 3\end{bmatrix}u$$

要求化为对角线规范形。

解：求出系统的特征值为

$$\lambda_1=2\ ,\ \lambda_2=1\ ,\ \lambda_3=-1$$

找到相应的一组特征向量为：

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad v_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

则可构造出变换矩阵，为

$$P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

再求出：

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \bar{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

于是得到系统的对角线标准型：

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/086224123233010110