四川省雅安市神州天立学校2024届高三下学期高考冲刺热身（四）数学（文）试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．共同富裕是消除两极分化和贫穷基础上的普遍富裕．下列关于个人收入的统计量中，最能体现共同富裕要求的是（　）

A．平均数小、方差大　　B．平均数小、方差小

C．平均数大、方差大　　D．平均数大、方差小

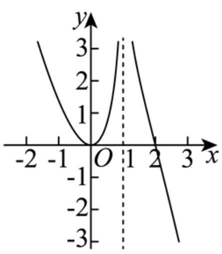
2．设集合 $A=\{x|x\geq 0\},B=\{x|x^2\leq 4\}$，则 $(\complement_{R}A)\cap B=$（　）

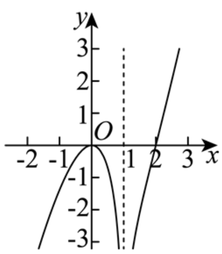
A．$[-2,0]$　　B．$[-2,2]$　　C．$(0,2]$　　D．$[-2,0)$

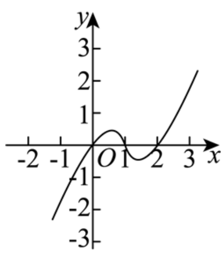
3．已知命题“$\forall x\in[1,4],\mathrm{e}^x-\dfrac{2}{x}-m\geq 0$”为真命题，则实数 m 的取值范围为（　）

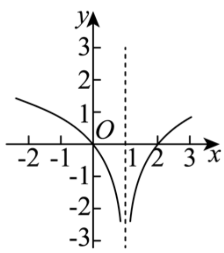
A．$(-\infty,\mathrm{e}-2]$　　B．$\left(-\infty,\mathrm{e}^4-\dfrac{1}{2}\right]$　　C．$[\mathrm{e}-2,+\infty)$　　D．$\left[\mathrm{e}^4-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

4．函数 $f(x)=2x\ln|x-1|$ 的大致图象为（　）

A．

B．

C．

D．

5．已知向量 $|\vec{b}|=2|\vec{a}|=2\sqrt{3},\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，则 $\cos<\vec{a},\vec{a}-\vec{b}>=$（　）

A．$\dfrac{1}{11}$　　B．$\dfrac{\sqrt{33}}{33}$　　C．$\dfrac{\sqrt{11}}{33}$　　D．$\dfrac{\sqrt{11}}{11}$

6．已知 $f(x)=\sin x+x^3+1$，若 $f(-a)=m$，则 $f(a)=$（　）

A．$-m$　　B．$1-m$　　C．$2-m$　　D．$m-1$

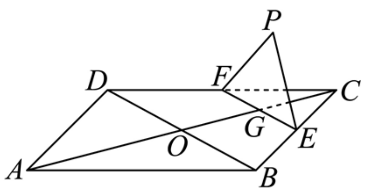
7．记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $a_1=2, a_{m+n}=a_m a_n$，则 $\dfrac{S_n}{a_n}=$（　）

A．2^n-1　　B．$2-2^{1-n}$　　C．$2-2^{n-1}$　　D．$2^{1-n}-1$

8．在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 随机取 1 个数 x，则 x 使得 $\sin x+\cos x>\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 的概率为（　）

A．$\dfrac{1}{6}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{3}{4}$

9．如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O，EF 是 $\triangle BCD$ 的中位线，AC 与 EF 交于点 G，已知！PEF 是 $\triangle CEF$ 绕 EF 旋转过程中的一个图形，且 $P\notin$ 平面 $ABCD$.给出下列结论：



①BD / / 平面 PEF；

②平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$；

③“直线 $PF\perp$ 直线 AC”始终不成立.

其中所有正确结论的序号为（　）

A．①②③　　B．①②　　C．①③　　D．②③

10．已知 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 分别是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左右焦点，若过 F_1 的直线与圆 $\left(x-\dfrac{1}{2}c\right)^2+y^2=c^2$ 相切，与 C 在第一象限交于点 P，且 $PF_2\perp x$ 轴，则 C 的离心率为（　）

A．$2\sqrt{5}$　　B．3　　C．$\dfrac{5}{2}$　　D．$\sqrt{5}$

11．在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是以 AC 为斜边的等腰直角三角形，$\triangle PAC$ 是边长为 2 的正三角形，二面角 $P-AC-B$ 的大小为 $150°$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为（　）

A．$\dfrac{28\pi}{3}$　　B．$\dfrac{52\pi}{9}$　　C．$\dfrac{28\sqrt{21}\pi}{27}$　　D．$\dfrac{52\sqrt{13}\pi}{81}$

12．若函数 $f(x)=a^x+b^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 a 和 b 的可能取值为（　）

A．$a=\ln 1.1$，$b=10$　　B．$a=\ln 11$，$b=0.1$

C．$a=e^{0.2}$，$b=0.8$　　D．$a=e^{-0.2}$，$b=1.8$

二、填空题

13．已知复数z满足$(1+\mathrm{i})z=1+3\mathrm{i}$，则$|z|=$___________.

14．已知实数$x>0$，$y>0$，若$2x+3y=1$，则$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$的最小值为_____.

15．已知圆C的圆心与抛物线$y^2=8x$的焦点关于直线$y=x$对称，直线$2x-y-3=0$与圆C相交于A,B两点，且$|AB|=2$，则圆C的方程为_____.

16．高斯是德国著名的数学家，近代数学的奠基者之一，享有“数学王子”的称号，用其名字命名的“高斯函数”为：设$x\in\mathbf{R}$，用$[x]$表示不超过x的最大整数，则$y=[x]$称为“高斯函数”，例如：$[-2.5]=-3$，$[2.7]=2$.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}+2a_n=3a_{n+1}$，若$b_n=[\log_2 a_{n+1}]$，S_n为数列$\left\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前$n$项和，则$S_{2023}=$_______.

三、解答题

17．数据显示，中国在线直播用户规模及在线直播购物规模近几年都保持高速增长态势，某线下家电商场为提升人气和提高营业额也开通了在线直播，下表统计了该商场开通在线直播的第x天的线下顾客人数y（单位：百人）的数据：

x	1	2	3	4	5
y	10	12	15	18	20

(1)根据第1至第5天的数据分析，计算变量y与x的相关系数r，并用r判断两个变量y与x相关关系的强弱（精确到小数点后三位）；

(2)根据第1至第5天的数据分析，可用线性回归模型拟合y与x的关系，试求出该线性回归方程并估计该商场开通在线直播的第10天的线下顾客人数.

（参考公式：相关系数$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，参考数据：$\sqrt{170}\approx13.038$

回归方程：$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$）

18．在$\triangle ABC$中，$\cos 2A=-\frac{1}{2},a=7$，且$a<c$.

(1)求$\angle A$的大小；

(2)再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在且唯一确定，求$\triangle ABC$的面积.

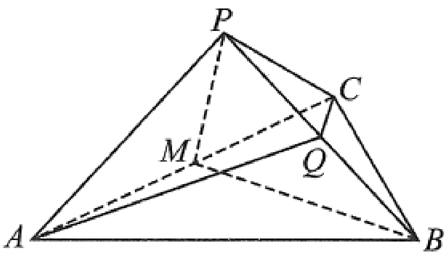
条件①：$c=8$，$\angle C$为锐角；

条件②：$\cos^2 C=\dfrac{1}{49}$；

条件③：$\sin B=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得0分；如果选择多个符合要求的条件分别作答，按第一个解答计分.

19．如图，在三棱锥$P-ABC$中，M为AC边上的一点，$\angle APC=\angle PMA=90°$，$\cos\angle CAB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$AB=2PC=\sqrt{6}$，$PA=\sqrt{3}$.



(1)证明：$AC\perp$平面PBM；

(2)设点Q为边PB的中点，试判断三棱锥$P-ACQ$的体积是否有最大值？如果有，请求出最大值；如果没有，请说明理由.

20．已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点是$F$，上顶点$A$是抛物线$x^2=4y$的焦点，直线$AF$的斜率为$-\dfrac{1}{2}$.

(1)求椭圆C的标准方程；

(2)直线$l:y=kx+m(m\neq 1)$与椭圆C交于P、Q两点，PQ的中点为M，当$\angle PMA=2\angle PQA$时，证明：直线l过定点.

21．已知函数$f(x)=xe^x-a\left(\dfrac{1}{2}x^2+x\right)x\in(0,+\infty)$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）曲线$f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线斜率为$3(e^2-1)$.

（i）求a；

（ii）若$(x-k)f'(x)\geq -(x+1)^2$，求整数k的最大值.

22．曲线$x-6y^2=0$经过伸缩变换$\begin{cases}x'=\dfrac{1}{3}x\\y'=2y\end{cases}$后得到曲线$C$，经过$C$外一点$A\left(-2,-4\right)$且倾斜角为$\alpha$的直线$l$与曲线$C$分别相交于$M_1,M_2$，如果$\left|AM_1\right|,\left|M_1M_2\right|,\left|AM_2\right|$成等比数列；

(1)写出曲线C的极坐标方程；

(2)求α的值.

23．设a，b，$c\in R$，$a+b+c=0$，$abc=1$．

（1）证明：$ab+bc+ca<0$；

（2）用$\max\{a，b，c\}$表示a，b，c中的最大值，证明：$\max\{a，b，c\}\geq\sqrt[3]{4}$．

参考答案：

1．D

【分析】根据平均数与方差的含义即可求解.

【详解】平均数反映的是整体的平均水平，是一组数据的集中程度的刻画，

方差反映的是一组数据的波动情况，方差越大说明数据偏离平均水平的程度越大，

所以最能体现共同富裕要求的是平均数大，方差小.

故选：D.

2．D

【分析】解不等式化简集合 B，再利用补集、交集的定义求解即得.

【详解】依题意，$\complement_R A=\{x|x<0\},B=\left\{x|x^2\le 4\right\}=\left\{x|-2\le x\le 2\right\}$，

所以$\left(\complement_R A\right)\cap B=\{x|-2\le x<0\}$.

故选：D

3．A

【分析】分离参数$m\le \mathrm{e}^x-\dfrac{2}{x}$，求函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-\dfrac{2}{x},x\in\left[1,4\right]$的最小值即可求解.

【详解】因为命题“$\forall x\in\left[1,4\right],\mathrm{e}^x-\dfrac{2}{x}-m\ge 0$”为真命题，所以$\forall x\in\left[1,4\right],m\le \mathrm{e}^x-\dfrac{2}{x}$.

令$f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-\dfrac{2}{x},x\in\left[1,4\right],y=\mathrm{e}^x$与$y=-\dfrac{2}{x}$在$\left[1,4\right]$上均为增函数，

故$f\left(x\right)$为增函数，当$x=1$时，$f\left(x\right)$有最小值$\mathrm{e}-2$，即$m\le \mathrm{e}-2$，

故选：A.

4．B

【分析】根据定义域、特殊值可以对选项进行排除，从而得到正确选项.

【详解】因为$f\left(x\right)$的定义域为$\left(-\infty,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$，故排除C；

又$f\left(3\right)=6\ln 2>0$，故排除A；

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\ln\dfrac{3}{2}<0$，故排除D.

故选：B.

5．B

【分析】根据题意先求出$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，然后由向量的数量积公式计算即可.

【详解】解：因为$\left|\vec{b}\right|=2\sqrt{3},\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3},\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，所以

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{11}$，

所以$\cos\left\langle\vec{a},\vec{a}-\vec{b}\right\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}-\vec{b}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{33}}=\dfrac{\sqrt{33}}{33}$.

故选：B.

6．C

【分析】构造奇函数$g\left(x\right)=\sin x+x^3$，利用奇函数的性质运算即可求解.

【详解】设$g\left(x\right)=\sin x+x^3$，显然它定义域关于原点对称，

且$g\left(-x\right)=\sin\left(-x\right)+\left(-x\right)^3=-\left(\sin x+x^3\right)=-g\left(x\right)$，

所以$g\left(x\right)$为奇函数，

$f\left(-a\right)=g\left(-a\right)+1=m$，则$g\left(-a\right)=-g\left(a\right)=m-1$，

所以$g\left(a\right)=1-m$，$f\left(a\right)=g\left(a\right)+1=1-m+1=2-m$.

故选：C.

7．B

【分析】因为$a_{m+n}=a_m a_n$，令$n=1$,，则$\dfrac{a_{m+1}}{a_m}=a_1$，可以求出$\left\{a_n\right\}$的公比，即可求出答案.

【详解】因为$a_{m+n}=a_m a_n$，令$n=1,a_{m+1}=a_m a_1$，则$\dfrac{a_{m+1}}{a_m}=a_1$，

所以$\left\{a_n\right\}$是首项和公比都为 2 的等比数列，

所以$\dfrac{S_n}{a_n}=\dfrac{\dfrac{2\left(1-2^n\right)}{1-2}}{2^n}=2-\dfrac{2}{2^n}=2-2^{1-n}$.

故选：B.

8．C

【分析】根据$\sin x+\cos x>\dfrac{\sqrt{6}}{2}$得出$x$的区间长度，再求出总区间长度，利用几何概型公式求得答案.

【详解】因为$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，又$\sin x+\cos x>\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

所以$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{\sqrt{3}}{2}$，Q$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，

即有$x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$时，$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{\sqrt{3}}{2}$成立，

$\therefore x\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right)$.

在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上随机取一个数$x$，则$x$使得$\sin x+\cos x>\frac{\sqrt{6}}{2}$的概率为$\frac{\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$.

故选：C.

9．B

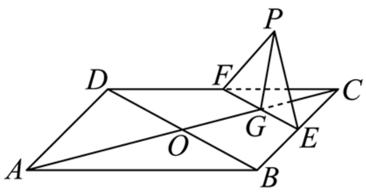
【分析】利用线面平行的判定判断①；利用面面垂直的判定推理判断②；举例说明判断③.

【详解】菱形$ABCD$的对角线AC与BD交于点O，EF是$\triangle BCD$的中位线，则$EF//BD$，

而$EF\subset$平面PEF，$BD\not\subset$平面PEF，因此$BD//$平面PEF，①正确；

连接PG，由$BD\perp AC$，得$EF\perp AG,EF\perp PG$，而AG I $PG=G,AG,PG\subset$平面PAC，

则$EF\perp$平面PAC，又$EF\subset$平面$ABCD$，因此平面$PAC\perp$平面$ABCD$，②正确；



显然$\angle PGA$是二面角$P-EF-A$的平面角，！PEF由$\triangle CEF$绕EF旋转过程中，

$\angle PGA$从180°逐渐减小到0°（不包含180°和0°），当$\angle PGA=90^\circ$时，$AG\perp PG$，

PG I $EF=G,PG,EF\subset$平面PEF，则$AG\perp$平面PEF，而$PF\subset$平面PEF，于是$PF\perp AG$，

③错误，

所以所有正确结论的序号为①②.

故选：B

10．D

【分析】设$\angle PF_1F_2=\theta$，根据题意求得$\tan\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，又$PF_2\perp x$轴，可求得$\left|PF_2\right|=\frac{b^2}{a}$，利用

$\tan\theta=\frac{\left|PF_2\right|}{\left|F_1F_2\right|}$，列式运算得解.

【详解】如图，设$\angle PF_1F_2=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，圆$\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=c^2$的圆心为$M\left(\frac{c}{2},0\right)$，半径为$c$，

过点F_1的直线与圆M相切于点D，则$|DM|=c$，$|F_1M|=\frac{3}{2}c$，

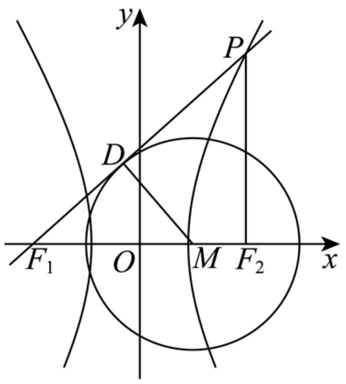
$\therefore \sin\theta=\frac{|MD|}{|F_1M|}=\frac{2}{3}$，则$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$，所以$\tan\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

因为$PF_2\perp x$轴，所以易得$|PF_2|=\frac{b^2}{a}$，$\therefore \tan\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{|PF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{\frac{b^2}{a}}{2c}$，

化简得$\sqrt{5}b^2=4ac$，即$\sqrt{5}a^2+4ac-\sqrt{5}c^2=0$，解得$c=\sqrt{5}a$，

$\therefore e=\sqrt{5}$.

故选：D.



11．A

【分析】取AC的中点H，所以$\angle BHP$为二面角$P-AC-B$的平面角，过点H作与平面ABC垂直的直线，则球心O在该直线上，设球的半径为R，在$\triangle OPH$中利用余弦定理可得R^2，从而可得外接球的表面积.

【详解】如图，取AC的中点H，连接BH，PH，