

重难点突破 03 同构

三种基本模式：

①积型：

$$ae^a \leq b \ln b \xrightarrow{\text{三种同构方式}} \begin{cases} \text{同左: } ae^a \leq (\ln b)e^{\ln b} \text{ ----- } f(x) = xe^x \\ \text{同右: } e^a \ln e^a \leq b \ln b \text{ ----- } f(x) = x \ln x \\ \text{取对: } a + \ln a \leq \ln b + \ln(\ln b) \text{ ---- } f(x) = x + \ln x \end{cases}$$

说明：在对“积型”同构时，取对数是最快捷的，同构出的函数，单调性一看便知。

②商型：

$$\frac{e^a}{a} < \frac{b}{\ln b} \xrightarrow{\text{三种同构方式}} \begin{cases} \text{同左: } \frac{e^a}{a} < \frac{e^{\ln b}}{\ln b} \text{ ----- } f(x) = \frac{e^x}{x} \\ \text{同右: } \frac{e^a}{\ln e^a} < \frac{b}{\ln b} \text{ ----- } f(x) = \frac{x}{\ln x} \\ \text{取对: } a - \ln a < \ln b - \ln(\ln b) \text{ ---- } f(x) = x - \ln x \end{cases}$$

③和差型：

$$e^a \pm a > b \pm \ln b \xrightarrow{\text{两种同构方式}} \begin{cases} \text{同左: } e^a \pm a > e^{\ln b} \pm \ln b \text{ ----- } f(x) = e^x \pm x \\ \text{同右: } e^a \pm \ln e^a > b \pm \ln b \text{ ----- } f(x) = x \pm \ln x \end{cases}$$

如： $e^{ax} + ax > \ln(x+1) + x + 1 \Leftrightarrow e^{ax} + ax > e^{\ln(x+1)} + \ln(x+1) \Leftrightarrow ax > \ln(x+1)$.

无中生有去同构，凑好形式是关键，凑常数或凑参数，如有必要凑变量.

一. 选择题（共 29 小题）

1. (2023 春·上犹县校级期末) 若 $e^x \dots \ln ax + (a-1)x$ 在 $x \in (0, 2]$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是()

- A. $(-\infty, e]$ B. $(0, e]$ C. $(-\infty, \frac{e^2}{2}]$ D. $(0, \frac{e^2}{2}]$

【解答】解：已知 $e^x \dots \ln ax + (a-1)x$ 在 $x \in (0, 2]$ 上恒成立，

重难点突破 03 同构

三种基本模式：

①积型：

$$ae^a \leq b \ln b \xrightarrow{\text{三种同构方式}} \begin{cases} \text{同左: } ae^a \leq (\ln b)e^{\ln b} \text{-----} f(x) = xe^x \\ \text{同右: } e^a \ln e^a \leq b \ln b \text{-----} f(x) = x \ln x \\ \text{取对: } a + \ln a \leq \ln b + \ln(\ln b) \text{---} f(x) = x + \ln x \end{cases}$$

说明：在对“积型”同构时，取对数是最快捷的，同构出的函数，单调性一看便知。

②商型：

$$\frac{e^a}{a} < \frac{b}{\ln b} \xrightarrow{\text{三种同构方式}} \begin{cases} \text{同左: } \frac{e^a}{a} < \frac{e^{\ln b}}{\ln b} \text{-----} f(x) = \frac{e^x}{x} \\ \text{同右: } \frac{e^a}{\ln e^a} < \frac{b}{\ln b} \text{-----} f(x) = \frac{x}{\ln x} \\ \text{取对: } a - \ln a < \ln b - \ln(\ln b) \text{---} f(x) = x - \ln x \end{cases}$$

③和差型：

$$e^a \pm a > b \pm \ln b \xrightarrow{\text{两种同构方式}} \begin{cases} \text{同左: } e^a \pm a > e^{\ln b} \pm \ln b \text{-----} f(x) = e^x \pm x \\ \text{同右: } e^a \pm \ln e^a > b \pm \ln b \text{-----} f(x) = x \pm \ln x \end{cases}$$

如： $e^{ax} + ax > \ln(x+1) + x + 1 \Leftrightarrow e^{ax} + ax > e^{\ln(x+1)} + \ln(x+1) \Leftrightarrow ax > \ln(x+1)$.

无中生有去同构，凑好形式是关键，凑常数或凑参数，如有必要凑变量.

一. 选择题（共 29 小题）

1. (2023 春·上犹县校级期末) 若 $e^x \dots \ln ax + (a-1)x$ 在 $x \in (0, 2]$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是()

- A. $(-\infty, e]$ B. $(0, e]$ C. $(-\infty, \frac{e^2}{2}]$ D. $(0, \frac{e^2}{2}]$

【解答】解：已知 $e^x \dots \ln ax + (a-1)x$ 在 $x \in (0, 2]$ 上恒成立，

即 $e^x + x \dots \ln ax + ax = e^{\ln ax} + \ln ax$ 在 $x \in (0, 2]$ 上恒成立,

不妨设 $f(x) = e^x + x$, 函数定义域为 R ,

可得 $f'(x) = e^x + 1 > 0$ 恒成立,

所以 $f(x) = e^x + x$ 在 R 上单调递增,

此时原不等式等价于 $x \dots \ln ax$ 在 $x \in (0, 2]$ 上恒成立,

即 $0 < a \dots \frac{e^x}{x}$ 在 $x \in (0, 2]$ 上恒成立,

不妨设 $g(x) = \frac{e^x}{x}$, 函数定义域为 $(0, 2]$,

可得 $g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$,

当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

当 $1 < x \dots 2$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

所以 $g(x)_{\min} = g(1) = e$,

此时 $0 < a \dots e$,

则实数 a 的取值范围为 $(0, e]$.

故选: B .

2. (2022 春•柴桑区校级期中) 设 $k > 0$, 若存在正实数 x , 使得不等式 $\lg x - k \cdot 10^{kx} \dots 0$ 成立,

则 k 的最大值为()

A. $\frac{1}{e \ln 10}$

B. $\frac{\ln 10}{e}$

C. $\frac{e}{\ln 10}$

D. $\frac{\ln 10}{10}$

【解答】解: 不等式 $\log_{10} x - k \cdot 10^{kx} \dots 0$,

即为 $\log_{10} x \dots k \cdot 10^{kx}$,

即有 $x \cdot \log_{10} x \dots kx \cdot 10^{kx}$,

所以 $10^{\log_{10} x} \cdot \log_{10} x \dots kx \cdot 10^{kx}$,

设 $f(x) = x \cdot 10^x$,

所以 $f(\log_{10} x) \dots f(kx)$,

$$f'(x) = 10^x + x \cdot 10^x \cdot \ln 10 > 0,$$

所以 $f(x)$ 单调递增,

所以 $\log_{10} x \leq kx$,

$$\text{所以 } k \leq \frac{\log_{10} x}{x} = \frac{\ln x}{x \ln 10},$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{\ln x}{x \ln 10},$$

$$\text{所以 } g'(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

所以 $x > e$ 时, 函数 y 递减, $0 < x < e$ 时, 函数 y 递增,

$$g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e \ln 10},$$

$$\text{即 } k \text{ 的最大值为 } \frac{\log_{10} e}{e} = \frac{1}{e \ln 10}.$$

故选: A.

3. (2023•酒泉模拟) 已知函数 $f(x) = e^{ax} - 3\ln x$, 若 $f(x) > x^3 - ax$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为()

- A. $(0, 3e)$ B. $(3e, +\infty)$ C. $(0, \frac{3}{e})$ D. $(\frac{3}{e}, +\infty)$

【解答】解: $f(x) > x^3 - ax$ 等价于 $e^{ax} + ax > x^3 + 3\ln x = e^{3\ln x} + 3\ln x$,

$$\text{令 } g(x) = e^x + x,$$

$$\text{则 } g'(x) = e^x + 1 > 0,$$

所以 $g(x)$ 是增函数,

$$\text{所以 } e^{ax} + ax > e^{3\ln x} + 3\ln x \text{ 等价于 } g(ax) > g(3\ln x),$$

$$\text{所以 } ax > 3\ln x (x > 0),$$

$$\text{所以 } a > \frac{3\ln x}{x},$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{3\ln x}{x},$$

$$h'(x) = \frac{3 - 3\ln x}{x^2},$$

所以在 $(0, e)$ 上, $h'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

在 $(e, +\infty)$ 上, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

所以 $h(x)_{\max} = h(e) = \frac{3}{e}$,

所以实数 a 的取值范围为 $(\frac{3}{e}, +\infty)$.

故选: D.

4. (2023·香坊区校级三模) 设实数 $a > 0$, 对任意的 $x \in (\frac{1}{e^3}, +\infty)$, 不等式 $e^{2ax} - \frac{\ln x}{2a} \dots \frac{1}{a} - \frac{e^{2ax}}{ax}$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(\frac{1}{e}, +\infty)$

B. $[\frac{1}{2e}, +\infty)$

C. $(0, \frac{1}{e})$

D. $[\frac{1}{e^2}, +\infty)$

【解答】解: 因为 $e^{2ax} - \frac{\ln x}{2a} \dots \frac{1}{a} - \frac{e^{2ax}}{ax}$,

所以 $2axe^{2ax} - x \ln x \dots 2x - 2e^{2ax}$,

所以 $2axe^{2ax} + 2e^{2ax} \dots x \ln x + 2x$,

所以 $e^{2ax} \ln e^{2ax} + 2e^{2ax} \dots x \ln x + 2x$,

令 $g(x) = x \ln x + 2x$, 则 $g(e^{2ax}) \dots g(x)$,

$$g'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 2 = \ln x + 3,$$

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{e^3}$,

所以在 $(\frac{1}{e^3}, +\infty)$ 上, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

所以当 $x \in (\frac{1}{e^3}, +\infty)$ 时, $e^{2ax} \dots x$,

因为对任意的 $x \in (\frac{1}{e^3}, +\infty)$, 不等式 $e^{2ax} - \frac{\ln x}{2a} \dots \frac{1}{a} - \frac{e^{2ax}}{ax}$ 恒成立,

所以对任意的 $x \in (\frac{1}{e^3}, +\infty)$, 不等式 $e^{2ax} \dots x$ 恒成立,

即对任意的 $x \in (\frac{1}{e^3}, +\infty)$, 不等式 $2a \dots \frac{\ln x}{x}$ 恒成立,

令 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$,

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

令 $h'(x) = 0$ 得 $x = e$,

所以在 $(0, e)$ 上 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

在 $(e, +\infty)$ 上 $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

所以 $h(x)_{\max} = h(e) = \frac{1}{e}$,

所以 $2a \leq \frac{1}{e}$,

所以 $a \leq \frac{1}{2e}$,

所以实数 a 的取值范围为 $[\frac{1}{2e}, +\infty)$,

故选: B.

5. (2021 秋·周口月考) 若不等式 $e^x + x + \ln \frac{1}{x} \geq mx + \ln m$ 对任意 $x > 0$ 恒成立, 则正实数 m 的最大值为()

A. 2

B. e

C. 3

D. e^2

【解答】解: 由题意得, $e^x + x \geq mx + \ln(mx)$,

即 $e^x + \ln e^x \geq mx + \ln(mx)$,

令 $f(x) = x + \ln x$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

从而不等式转化为 $f(e^x) \geq f(mx)$,

则 $e^x \geq mx$,

即 $\frac{e^x}{x} \geq m$,

令 $g(x) = \frac{e^x}{x}$,

则 $g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$,

当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

所以当 $x = 1$ 时, $g(x)$ 有最小值,

即 $g(x)_{\min} = g(1) = e$,

则 m 的最大值为 e ,

故选: B .

6. (2021·沙坪坝区校级开学) 设实数 $\lambda > 0$, 若对任意的 $x \in (1, +\infty)$, 不等式 $e^{3\lambda x} - \frac{\ln x}{3\lambda} \geq 0$ 恒成立, 则实数 λ 的取值范围是()

- A. $[\frac{1}{e}, +\infty)$ B. $[\frac{1}{3e}, +\infty)$ C. $[e, +\infty)$ D. $[3e, +\infty)$

【解答】解: 因为 $\lambda > 0$, 不等式 $e^{3\lambda x} - \frac{\ln x}{3\lambda} \geq 0$ 成立, 即 $3\lambda e^{3\lambda x} \geq \ln x$,

转化为 $3\lambda x e^{3\lambda x} \geq x \ln x = e^{\ln x} \cdot \ln x$ 恒成立,

构造函数 $g(x) = x e^x (x > 0)$,

可得 $g'(x) = e^x + x e^x = (x+1)e^x$,

当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

则不等式 $e^{3\lambda x} - \frac{\ln x}{3\lambda} \geq 0$ 恒成立等价于 $g(3\lambda x) \geq g(\ln x)$ 恒成立,

即 $3\lambda x \geq \ln x$ 恒成立, 进而转化为 $3\lambda \geq \frac{\ln x}{x}$ 恒成立,

设 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, 可得 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

当 $0 < x < e$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

当 $x > e$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

所以当 $x = e$ 时, 函数 $h(x)$ 取得最大值 $h(e) = \frac{1}{e}$,

所以 $3\lambda \geq \frac{1}{e}$,

所以实数 λ 的取值范围为 $[\frac{1}{3e}, +\infty)$,

故选: B .

7. (2021 春·利通区校级月考) 已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$, 若不等式 $f(ax^2) + f(1-2ax) \geq 0$

对 $\forall x \in R$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $(0, e]$ B. $[0, e]$ C. $[0, 1]$ D. $(0, 1]$

【解答】解：因为 $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$ 的定义域为 R 关于原点对称，且

$$f(-x) = e^{-x} - e^x + 2x = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 为 R 上的奇函数，

$$\text{又因为 } f'(x) = e^x + \frac{1}{e^x} - 2,$$

$$\text{而 } e^x + \frac{1}{e^x} \geq 2\sqrt{e^x \cdot \frac{1}{e^x}} = 2, \text{ 当且仅当 } e^x = \frac{1}{e^x}, \text{ 即 } x = 0 \text{ 时等号成立,}$$

$$\text{故 } f'(x) = e^x + \frac{1}{e^x} - 2 \geq 0 \text{ 恒成立,}$$

所以 $f(x)$ 为 R 上的增函数，

$$\text{不等式 } f(ax^2) + f(1 - 2ax) \geq 0 \text{ 对 } \forall x \in R \text{ 恒成立,}$$

$$\text{即 } f(ax^2) \geq -f(1 - 2ax) \text{ 对 } \forall x \in R \text{ 恒成立,}$$

$$\text{即 } f(ax^2) \geq f(-1 + 2ax) \text{ 对 } \forall x \in R \text{ 恒成立,}$$

$$\text{即 } ax^2 \geq -1 + 2ax \text{ 对 } \forall x \in R \text{ 恒成立,}$$

$$\text{即 } ax^2 - 2ax + 1 \geq 0 \text{ 对 } \forall x \in R \text{ 恒成立,}$$

当 $a = 0$ 时，不等式恒成立，

$$\text{当 } a \neq 0 \text{ 时, 则 } \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = (-2a)^2 - 4a \leq 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } 0 < a \leq 1,$$

综上所述， $a \in [0, 1]$ ，

故选：C．

8. (2023·辽宁一模) 设 $k > 0$ ，若不等式 $k \ln(kx) - e^x \geq 0$ 在 $x > 0$ 时恒成立，则 k 的最大值为()

A. e

B. 1

C. e^{-1}

D. e^2

$$\text{【解答】解：对于 } k \ln(kx) - e^x \geq 0, \text{ 即 } \ln(kx) \geq \frac{e^x}{k},$$

$$\text{因为 } y = \ln(kx) \text{ 是 } y = \frac{e^x}{k} \text{ 的反函数,}$$

$$\text{所以 } y = \ln(kx) \text{ 与 } y = \frac{e^x}{k} \text{ 关于 } y = x \text{ 对称, 原问题等价于 } \frac{e^x}{k} \leq x \text{ 对一切 } x > 0 \text{ 恒成立, 即 } k \leq \frac{e^x}{x},$$

令 $f(x) = \frac{e^x}{x}$ ，则 $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$ ，

当 $0 < x < 1$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减；当 $x > 1$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)_{\min} = f(1) = e$ ，

所以 $k \geq e$ ，

所以 k 的最大值为 e 。

故选：A。

9. (2022•秦皇岛开学) 已知 $a > 0$ ，若对任意的 $x > 0$ ， $a \cdot e^{ax-1} \dots \frac{\ln x}{e}$ 恒成立，则实数 a 的最小值为()

- A. e B. $\frac{1}{e}$ C. e^2 D. $\frac{1}{e^2}$

【解答】解：当 $x > 0$ 时， $a \cdot e^{ax-1} \dots \frac{\ln x}{e}$ 得 $ae^{ax} \dots \ln x$ ，即 $ax \cdot e^{ax} \dots x \ln x = e^{\ln x} \cdot \ln x$ 。设

$f(x) = xe^x (x > 0)$ ，

则原不等式等价于 $f(ax) \dots f(\ln x)$ ，因为 $f'(x) = e^x + x \cdot e^x > 0$ ，

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，故 $ax \dots \ln x$ 对任意的 $x > 0$ 恒成立，即 $a \dots \frac{\ln x}{x}$ 对任意的 $x > 0$ 恒成立，

设 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ ， $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ，当 $x \in (0, e)$ 时， $g'(x) > 0$ ，当 $x \in (e, +\infty)$ 时， $g'(x) < 0$ ，

$\therefore g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增，在 $(e, +\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e}$ ，

$\therefore a \dots \frac{1}{e}$ ，

故选：B。

10. (2023 春•湖北期中) 若存在正实数 x ，使得不等式 $\frac{1}{a} \ln x \dots 2^{ax} \cdot \ln 2 (a > 0)$ 成立 (e 是自然对数的底数)，则 a 的最大值为()

- A. $\frac{e}{\ln 2}$ B. $\frac{\ln 2}{e}$ C. $\frac{1}{e \ln 2}$ D. $\frac{\ln 2}{2}$

【解答】解： $\frac{1}{a} \ln x \dots 2^{ax} \cdot \ln 2 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 2} \dots a \cdot 2^{ax} \Leftrightarrow x \cdot \log_2 x \dots ax \cdot 2^{ax}$

设 $f(x) = x \cdot 2^x$ ，则 $f'(x) = 2^x + x \cdot 2^x \cdot \ln 2 = 2^x (1 + x \cdot \ln 2) > 0$ ，

则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单增,

$$\text{则 } x \cdot \log_2 x \dots ax \cdot 2^{ax} \Leftrightarrow f(\log_2 x) \dots f(ax) \Leftrightarrow \log_2 x \dots ax \Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{x} \dots a$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{\log_2 x}{x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{\frac{1}{x \cdot \ln 2} x - \log_2 x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2 \ln 2},$$

当 $x \in (0, e)$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$

得 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单增, 在 $(e, +\infty)$ 上单减,

$$\text{则当 } x = e \text{ 时 } g(x) \text{ 取得最大值 } g(e) = \frac{\log_2 e}{e} = \frac{1}{e \ln 2}, \text{ 故 } a \leq \frac{1}{e \ln 2},$$

a 的最大值为 $\frac{1}{e \ln 2}$.

故选: C.

11. (2023 春·渝中区校级期末) 若 $x \in (1, +\infty)$ 时, 关于 x 的不等式 $ax^{a-1} \ln x - e^x \geq 0$ 恒成立,

则 a 的取值范围为()

A. $(-\infty, \frac{1}{e}]$

B. $(-\infty, e]$

C. $(0, \frac{1}{e}]$

D. $(\frac{1}{e}, e]$

【解答】解: 由 $ax^{a-1} \ln x - e^x \geq 0$, 可得 $ax^a \ln x \geq xe^x$, 即 $x^a \ln x \geq xe^x$,

$$\text{即 } \ln x^a e^{\ln x^a} \geq xe^x,$$

设 $f(x) = xe^x$, 则 $f(\ln x^a) \geq f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

$$\text{又 } f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x,$$

则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

且当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$,

当 $a \leq 0$ 时, 由于 $x \in (1, +\infty)$, 则 $a \ln x \leq 0$,

此时 $f(a \ln x) \leq 0$, $f(x) > 0$, 满足 $f(\ln x^a) \geq f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立;

当 $a > 0$ 时, 由于 $x \in (1, +\infty)$, 则 $a \ln x > 0$,

要使 $f(\ln x^a) \geq f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

则需 $\ln x^a \geq x$, 即 $a \geq \frac{x}{\ln x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/087061000106006154>