

2025 届江西省赣州市南康三中、兴国一中高三下学期第五次调研考试数学试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (4\lambda, -1)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\lambda =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. 1 D. 2

2. 已知甲盒子中有 m 个红球, n 个蓝球, 乙盒子中有 $m-1$ 个红球, $n+1$ 个蓝球 ($m \geq 3, n \geq 3$), 同时从甲乙两个盒子中取出 i ($i=1, 2$) 个球进行交换, (a) 交换后, 从甲盒子中取 1 个球是红球的概率记为 p_i ($i=1, 2$). (b) 交换后, 乙盒子中含有红球的个数记为 ξ_i ($i=1, 2$). 则 ()

- A. $p_1 > p_2, E(\xi_1) < E(\xi_2)$ B. $p_1 < p_2, E(\xi_1) > E(\xi_2)$
C. $p_1 > p_2, E(\xi_1) > E(\xi_2)$ D. $p_1 < p_2, E(\xi_1) < E(\xi_2)$

3. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的周期为 4, 当 $x \in [-2, 2)$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - x - 4$, 则 $f(-\log_3 6) + f(\log_3 54) =$ ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2} - \log_3 2$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3} + \log_3 2$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 9$, $\sin B = \cos A \sin C$, $S_{\triangle ABC} = 6$, P 为线段 AB 上的一点, 且

$\vec{CP} = x \cdot \frac{\vec{CA}}{|\vec{CA}|} + y \cdot \frac{\vec{CB}}{|\vec{CB}|}$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{7}{12} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ B. 12 C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

5. 设集合 $A = \{x | -2 < x < a\}$, $B = \{0, 2, 4\}$, 若集合 $A \cap B$ 中有且仅有 2 个元素, 则实数 a 的取值范围为

- A. $(0, 2)$ B. $(2, 4]$
C. $[4, +\infty)$ D. $(-\infty, 0)$

6. 若复数 z 满足 $z - \sqrt{3}(1+z)i = 1$, 复数 z 的共轭复数是 $\bar{z}$, 则 $z + \bar{z} =$ ()

- A. 1 B. 0 C. -1 D. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

7. 已知 α 为锐角, 且 $\sqrt{3}\sin 2\alpha = 2\sin \alpha$, 则 $\cos 2\alpha$ 等于 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{4}{9}$

8. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边, $a=1$, $4c\sin A = 3\cos C$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 则 $c =$ ()

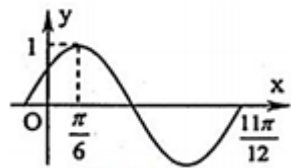
- A. $2\sqrt{2}$ B. 4 C. 5 D. $3\sqrt{2}$

9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 点 P 是双曲线 C 上与 A_1, A_2 不重合的动点,

若 $k_{PA_1} k_{PA_2} = 3$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 4 D. 2

10. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 ω, φ 的值分别为 ()

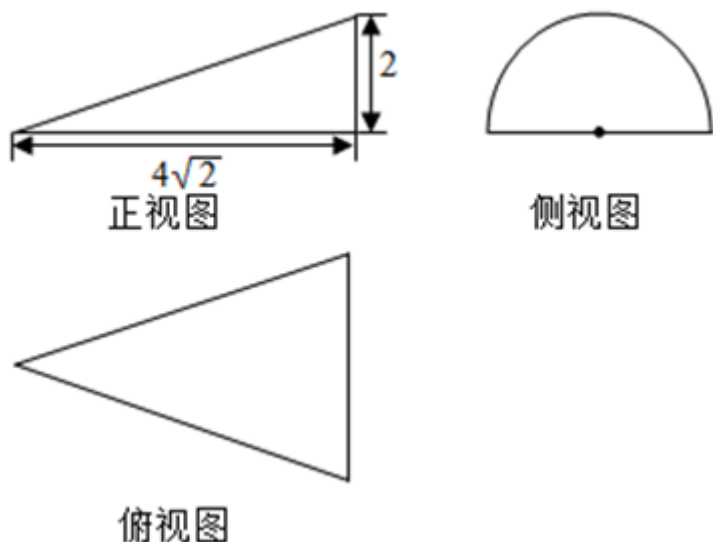


- A. 2, 0 B. 2, $\frac{\pi}{4}$ C. 2, $-\frac{\pi}{3}$ D. 2, $\frac{\pi}{6}$

11. 已知函数 $f(x) = a\sin x - \sqrt{3}\cos x$ 的图像的一条对称轴为直线 $x = \frac{5\pi}{6}$, 且 $f(x_1) \cdot f(x_2) = -4$, 则 $|x_1 + x_2|$ 的最小值为 ()

- A. $-\frac{\pi}{3}$ B. 0 C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

12. 一个几何体的三视图及尺寸如下图所示, 其中正视图是直角三角形, 侧视图是半圆, 俯视图是等腰三角形, 该几何体的表面积是 ()



A. $16\sqrt{2} + 16\pi$

B. $16\sqrt{2} + 8\pi$

C. $8\sqrt{2} + 16\pi$

D. $8\sqrt{2} + 8\pi$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D ，且 $BD = 1$ ，则 $4a + c$ 的最小值为_____.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - \frac{3}{2}, & x \geq 0 \\ 2^x - \frac{3}{2}, & x < 0 \end{cases}$ ，若 $f(3m-1) > f(2-m)$ ，则实数 m 的取值范围为_____.

15. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 $F_1(-2, 0)$ ，点 $A(0, \sqrt{5})$ ，点 P 为双曲线右支上的动点，且 $\triangle APF_1$ 周长的最小值为 8，则双曲线的实轴长为_____，离心率为_____.

16. 已知复数 $z = (1 + 2i)(a + i)$ ，其中 i 是虚数单位. 若 z 的实部与虚部相等，则实数 a 的值为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数}), \text{ 直线 } l \text{ 经过点 } M(-1, -3\sqrt{3}) \text{ 且倾斜角为 } \alpha.$$

(1) 求曲线 C 的极坐标方程和直线 l 的参数方程；

(2) 已知直线 l 与曲线 C 交于 A, B , 满足 A 为 MB 的中点, 求 $\tan \alpha$.

18. (12 分) [2018·石家庄一检] 已知函数 $f(x) = x(\ln x - ax)$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 若 $a = 1$, 求函数 $f(x)$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 求证: $f(x_2) > -\frac{1}{2}$.

19. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \\ y = \frac{2 \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \end{cases} (\alpha \text{ 为参数}),$$
 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \theta_0$ ($\theta_0 \in (0, \pi)$), 将曲线 C_1 向左平移 2 个单位长度得到曲线 C .

(1) 求曲线 C 的普通方程和极坐标方程;

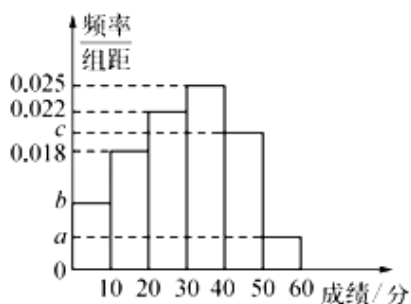
(2) 设直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 求 $\frac{1}{|OA|} + \frac{1}{|OB|}$ 的取值范围.

20. (12 分) 设函数 $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $g(x) = t \ln x$, 其中 $x \in (0, 1)$, t 为正实数.

(1) 若 $f(x)$ 的图象总在函数 $g(x)$ 的图象的下方, 求实数 t 的取值范围;

(2) 设 $H(x) = (\ln x - x^2 + 1)e^x + (x^2 - 1)\left(1 - \frac{1}{x}\right)$, 证明: 对任意 $x \in (0, 1)$, 都有 $H(x) > 0$.

21. (12 分) 为调研高中生的作文水平, 在某市普通高中的某次联考中, 参考的文科生与理科生人数之比为 1:4, 且成绩分布在 $[0, 60]$ 的范围内, 规定分数在 50 以上 (含 50) 的作文被评为“优秀作文”, 按文理科用分层抽样的方法抽取 400 人的成绩作为样本, 得到成绩的频率分布直方图, 如图所示. 其中 a, b, c 构成以 2 为公比的等比数列.



(1) 求 a, b, c 的值;

(2) 填写下面 2×2 列联表, 能否在犯错误的概率不超过 0.01 的情况下认为“获得优秀作文”与“学生的文理科”有关?

	文科生	理科生	合计
--	-----	-----	----

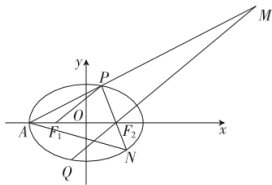
获奖	6		
不获奖			
合计			400

(3) 将上述调查所得的频率视为概率，现从全市参考学生中，任意抽取 2 名学生，记“获得优秀作文”的学生人数为 X ，求 X 的分布列及数学期望.

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$.

$P(K^2 \geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

22. (10 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的左顶点为 A ，左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，离心率为 $\frac{1}{2}$ ， P 是椭圆上的一个动点（不与左、右顶点重合），且 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 6，点 P 关于原点的对称点为 Q ，直线 AP, QF_2 交于点 M .



- (1) 求椭圆方程；
- (2) 若直线 PF_2 与椭圆交于另一点 N ，且 $S_{\triangle AF_2M} = 4S_{\triangle AF_2N}$ ，求点 P 的坐标.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、 A

【解析】

根据向量垂直的坐标表示列方程，解方程求得 λ 的值.

【详解】

由于向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (4\lambda, -1)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 所以 $1 \times 4\lambda + 2 \times (-1) = 0$ 解得 $\lambda = \frac{1}{2}$.

故选: A

【点睛】

本小题主要考查向量垂直的坐标表示, 属于基础题.

2、A

【解析】

分析: 首先需要去分析交换后甲盒中的红球的个数, 对应的事件有哪些结果, 从而得到对应的概率的大小, 再者就是对随机变量的值要分清, 对应的概率要算对, 利用公式求得其期望.

详解: 根据题意有, 如果交换一个球,

有交换的都是红球、交换的都是蓝球、甲盒的红球换的乙盒的蓝球、甲盒的蓝球交换的乙盒的红球,

红球的个数就会出现 $m, m-1, m+1$ 三种情况;

如果交换的是两个球, 有红球换红球、蓝球换蓝球、一蓝一红换一蓝一红、红换蓝、蓝换红、一蓝一红换两红、一蓝一红换亮蓝,

对应的红球的个数就是 $m-2, m-1, m, m+1, m+2$ 五种情况, 所以分析可以求得 $p_1 > p_2, E(\xi_1) < E(\xi_2)$, 故选 A.

点睛: 该题考查的是有关随机事件的概率以及对应的期望的问题, 在解题的过程中, 需要对其对应的事件弄明白, 对应的概率会算, 以及变量的可取值会分析是多少, 利用期望公式求得结果.

3、A

【解析】

因为给出的解析式只适用于 $x \in [-2, 2)$, 所以利用周期性, 将 $f(\log_3 54)$ 转化为 $f(\log_3 \frac{2}{3})$, 再与 $f(-\log_3 6)$ 一起代入解析式, 利用对数恒等式和对数的运算性质, 即可求得结果.

【详解】

Q 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的周期为 4

$$\therefore f(\log_3 54) = f(\log_3 54 - 4) = f(\log_3 \frac{2}{3}),$$

$$\text{Q 当 } x \in [-2, 2) \text{ 时, } f(x) = (\frac{1}{3})^x - x - 4,$$

$$-\log_3 6 \in [-2, 2), \log_3 \frac{2}{3} \in [-2, 2),$$

$$\therefore f(-\log_3 6) + f(\log_3 \frac{2}{3})$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{-\log_3 6} - (-\log_3 6) - 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 \frac{2}{3}} - \log_3 \frac{2}{3} - 4$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 \frac{3}{2}} + (\log_3 6 - \log_3 \frac{2}{3}) - 8$$

$$= 6 + \frac{3}{2} + \log_3 (6 \times \frac{3}{2}) - 8$$

$$= \frac{3}{2}.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查了利用函数的周期性求函数值，对数的运算性质，属于中档题.

4、A

【解析】

在 $\triangle ABC$ 中，设 $AB=c$ ， $BC=a$ ， $AC=b$ ，结合三角形的内角和及和角的正弦公式化简可求 $\cos C=0$ ，可得

$C=\frac{\pi}{2}$ ，再由已知条件求得 $a=4$ ， $b=3$ ， $c=5$ ，考虑建立以 AC 所在的直线为 x 轴，以 BC 所在的直线为 y 轴建

立直角坐标系，根据已知条件结合向量的坐标运算求得 $4x+3y=12$ ，然后利用基本不等式可求得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值.

【详解】

在 $\triangle ABC$ 中，设 $AB=c$ ， $BC=a$ ， $AC=b$ ，

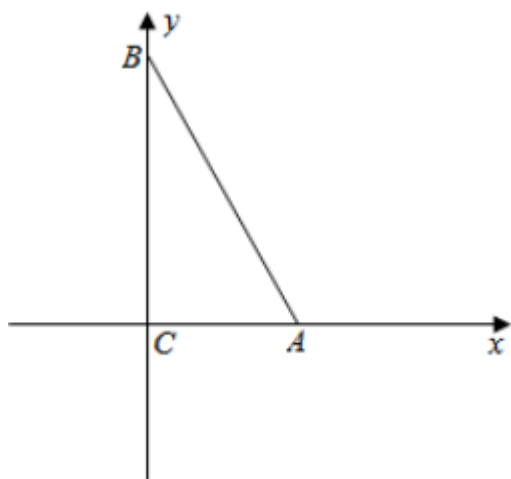
由 $\sin B = \cos A \sin C$ ，即 $\sin(A+C) = \cos A \sin C$ ，即 $\sin A \cos C + \cos A \sin C = \cos A \sin C$ ， $\therefore \sin A \cos C = 0$ ，

由 $0 < A < \pi$ ， $\therefore \sin A > 0$ ， $\therefore \cos C = 0$ ，由 $0 < C < \pi$ ， $\therefore C = \frac{\pi}{2}$ ，

由 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9$ ，即 $cb \cos A = 9$ ，又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 6$ ， $\therefore \tan A = \frac{bc \sin A}{bc \cos A} = \frac{4}{3} = \frac{a}{b}$ ，

由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = 6$ ，则 $ab = 12$ ，所以， $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \\ ab = 12 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$ ， $\therefore c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$.

以 AC 所在的直线为 x 轴，以 BC 所在的直线为 y 轴建立如下图所示的平面直角坐标系，



则 $C(0,0)$ 、 $A(3,0)$ 、 $B(0,4)$,

P 为线段 AB 上的一点, 则存在实数 λ 使得 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} = \lambda(-3, 4) = (-3\lambda, 4\lambda) (0 \leq \lambda \leq 1)$,

$$\therefore \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = (3-3\lambda, 4\lambda),$$

设 $e_1 = \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}$, $e_2 = \frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}$, 则 $|e_1| = |e_2| = 1$, $\therefore e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$,

$$\because \overrightarrow{CP} = x \cdot \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} + y \cdot \frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|} = xe_1 + ye_2 = (x, y), \therefore \begin{cases} x = 3-3\lambda \\ y = 4\lambda \end{cases}, \text{ 消去 } \lambda \text{ 得 } 4x+3y=12, \therefore \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1,$$

$$\text{所以, } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \right) = \frac{x}{3y} + \frac{y}{4x} + \frac{7}{12} \geq 2\sqrt{\frac{x}{3y} \cdot \frac{y}{4x}} + \frac{7}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{7}{12},$$

当且仅当 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}y$ 时, 等号成立,

因此, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{7}{12}$.

故选: A.

【点睛】

本题是一道构思非常巧妙的试题, 综合考查了三角形的内角和定理、两角和的正弦公式及基本不等式求解最值问题,

解题的关键是理解 $\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}$ 是一个单位向量, 从而可用 x 、 y 表示 $\overrightarrow{CP}$, 建立 x 、 y 与参数的关系, 解决本题的第二个关

键点在于由 $x = 3-3\lambda$, $y = 4\lambda$ 发现 $4x+3y=12$ 为定值, 从而考虑利用基本不等式求解最小值, 考查计算能力, 属于难题.

5、B

【解析】

由题意知 $\{0,2\} \subseteq A$ 且 $4 \notin A$ ，结合数轴即可求得 a 的取值范围.

【详解】

由题意知， $A \cap B = \{0,2\}$ ，则 $\{0,2\} \subseteq A$ ，故 $a > 2$ ，

又 $4 \notin A$ ，则 $a \leq 4$ ，所以 $2 < a \leq 4$ ，

所以本题答案为 B.

【点睛】

本题主要考查了集合的关系及运算，以及借助数轴解决有关问题，其中确定 $A \cap B$ 中的元素是解题的关键，属于基础题.

6、C

【解析】

根据复数代数形式的运算法则求出 z ，再根据共轭复数的概念求解即可.

【详解】

解： $\because z - \sqrt{3}i - \sqrt{3}zi = 1$ ，

$$\therefore z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\text{则 } \bar{z} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\therefore z + \bar{z} = -1,$$

故选：C.

【点睛】

本题主要考查复数代数形式的运算法则，考查共轭复数的概念，属于基础题.

7、C

【解析】

由 $\sqrt{3} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha$ 可得 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，再利用 $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ 计算即可.

【详解】

因为 $2\sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha$ ， $\sin \alpha \neq 0$ ，所以 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$$\text{所以 } \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

故选: C.

【点睛】

本题考查二倍角公式的应用, 考查学生对三角函数式化简求值公式的灵活运用能力, 属于基础题.

8、D

【解析】

由正弦定理可知 $4c \sin A = 4a \sin C = 3 \cos C$, 从而可求出 $\sin C = \frac{3}{5}$, $\cos C = \frac{4}{5}$. 通过 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{3}{2}$ 可求出 $b = 5$, 结合余弦定理即可求出 c 的值.

【详解】

解: $\because 4c \sin A = 3 \cos C$, 即 $4c \sin A = 3a \cos C$

$\therefore 4 \sin A \sin C = 3 \sin A \cos C$, 即 $4 \sin C = 3 \cos C$.

$\because \sin^2 C + \cos^2 C = 1$, 则 $\sin C = \frac{3}{5}$, $\cos C = \frac{4}{5}$.

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 1 \times b \times \frac{3}{5} = \frac{3}{2}$, 解得 $b = 5$.

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 1 + 5^2 - 2 \times 1 \times 5 \times \frac{4}{5} = 18$, $\therefore c = 3\sqrt{2}$

故选: D.

【点睛】

本题考查了正弦定理, 考查了余弦定理, 考查了三角形的面积公式, 考查同角三角函数的基本关系. 本题的关键是通过正弦定理结合已知条件, 得到角 C 的正弦值余弦值.

9、D

【解析】

设 $P(x_0, y_0)$, $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, 根据 $k_{PA_1} k_{PA_2} = 3$ 可得 $y_0^2 = 3x_0^2 - 3a^2$ ①, 再根据又 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ ②, 由①②可

得 $(b^2 - 3a^2)x_0^2 = a^2(b^2 - 3a^2)$, 化简可得 $c = 2a$, 即可求出离心率.

【详解】

解: 设 $P(x_0, y_0)$, $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$,

$\because k_{PA_1} k_{PA_2} = 3$,

$\therefore \frac{y_0}{x_0 + a} \cdot \frac{y_0}{x_0 - a} = 3$, 即 $y_0^2 = 3x_0^2 - 3a^2$, ①

又 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, ②,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/087136161012010042>