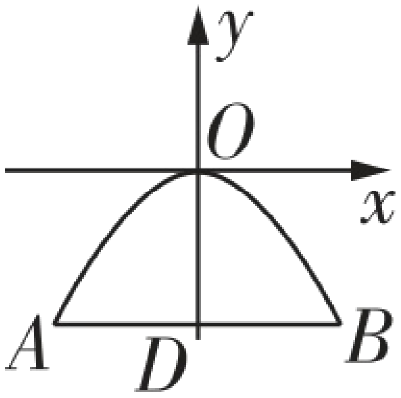
30.4 二次函数的应用

课时1 生活中的抛物线模型问题

过基础 教材必备知识精练

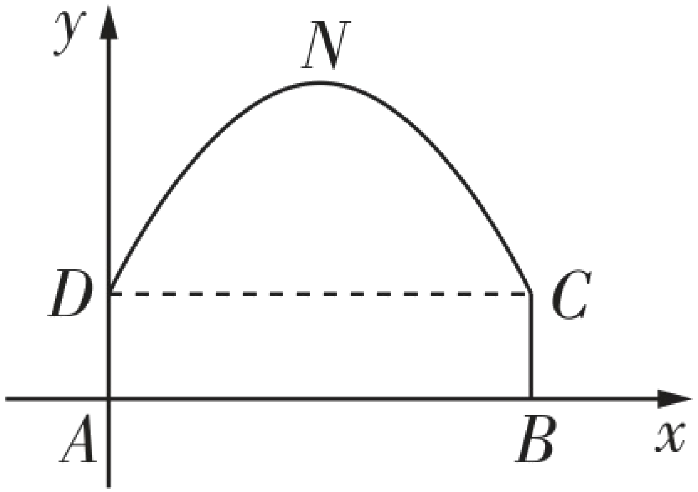
1.[2023保定九校期中联考]河北省赵县的赵州桥的桥拱是近似的抛物线形,建立如图所示的平面直角坐标系,抛物线的函数关系式为$y=-\frac{1}{25}x^2$，当水面离桥拱顶的高度DO是4 m时,水面宽度AB为(　**C**　)



A. 10 m　　B. 16 m　　C. 20 m　　D. 25 m

【解析】 由题意得，$-4=-\frac{1}{25}x^2$，解得 $x=\pm 10$，所以点 A 的坐标为 $(-10,-4)$，点 B 的坐标为 $(10,-4)$，则水面宽度 AB 为 $20\ \mathrm{m}$.

2.[2023晋中榆次区二模]小明在周末外出的路上经过了如图所示的隧道，他想知道隧道顶端到地面的距离，于是他查阅了相关资料，知道了隧道的截面是由抛物线和矩形构成的.如图，以矩形的顶点 A 为坐标原点，地面 AB 所在直线为 x 轴，竖直方向为 y 轴，建立平面直角坐标系，抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{4}x^2+bx+c$，若 $AB=8\ \mathrm{m}$，$AD=2\ \mathrm{m}$，则隧道顶端点 N 到地面 AB 的距离为(　　)

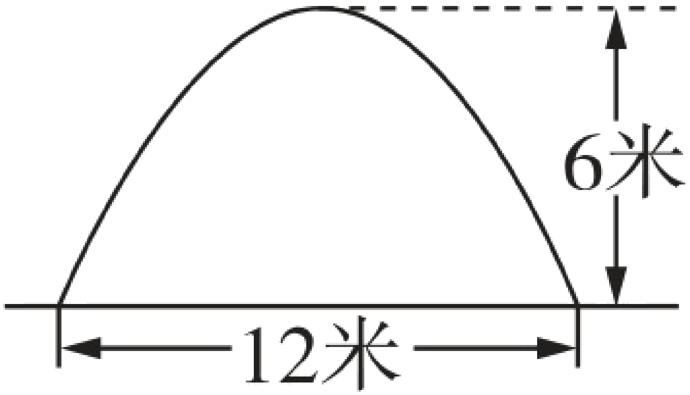


A. 8 m　　B. 7 m　　C. 6 m　　D. 5 m

【解析】 由题意可得点 D 的坐标为 $(0,2)$，点 C 的坐标为 $(8,2)$，将点 D 和 C 的坐标分别代入抛物线的表达式可得 $\begin{cases} 2=c, \\ 2=-\frac{1}{4}\times 8^2+8b+c, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=2, \\ c=2, \end{cases}$ $\therefore y=-\frac{1}{4}x^2+2x+2$，令 $x=4$，可得

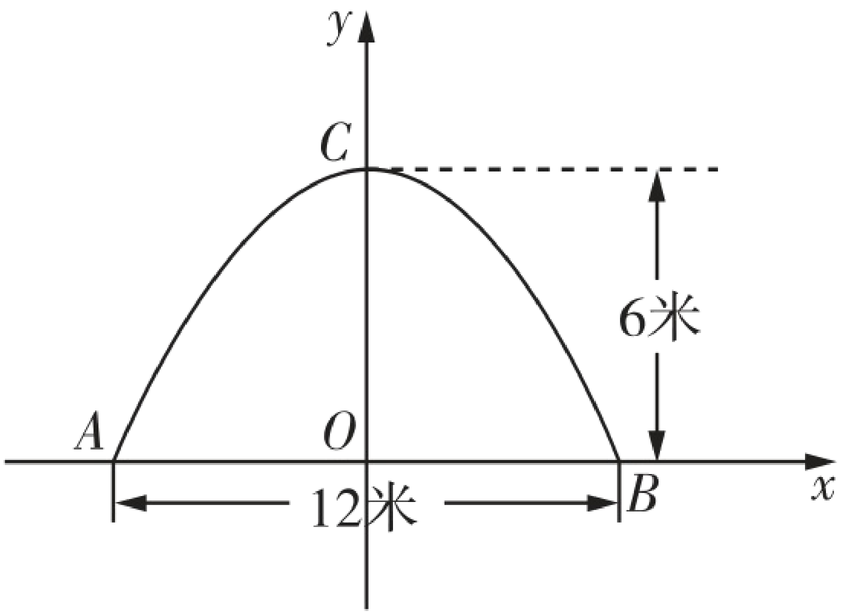
$y=-\frac{1}{4}\times 4^2+2\times 4+2=6$.

3.[2023济宁洸河中学月考]如图，一个横截面为抛物线形的隧道宽12米、高6米，车辆双向通行.若规定车辆必须在中心线两侧、距离道路边缘2米的范围内行驶，并保持车辆顶部与隧道有不少于1米的空隙，则通过隧道车辆的高度限制应为 $\underline{\dfrac{7}{3}}$



第3题图

【解析】 建立如图所示的平面直角坐标系，



根据题意得 $A(-6,0)$， $B(6,0)$， $C(0,6)$， 设抛物线的表达式为 $y = ax^2 + 6$， 把 $B(6,0)$ 的坐标代入，得 $36a + 6 = 0$， 解得 $a =-\frac{1}{6}$， 所以抛物线的表达式为 $y =-\frac{1}{6}x^2 + 6$， 当 $x = 4$ 时， $y =-\frac{1}{6} \times 4^2 + 6 = \frac{10}{3}$， $\frac{10}{3} - 1 = \frac{7}{3}$.所以通过隧道车辆的高度限制应为 $\frac{7}{3}$ 米.

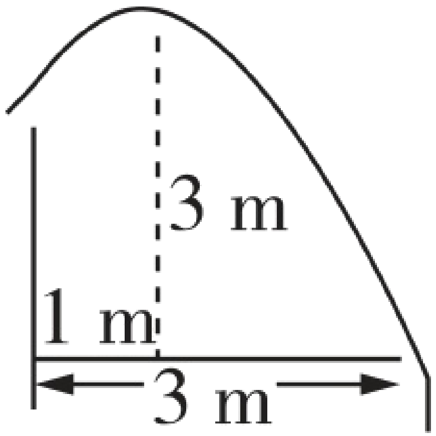
【解题通法】

判断汽车能否从隧道下通过

（1）固定汽车的宽，判断隧道是否够高（即已知 x 的值，先根据函数表达式求 y 的值，然后比较限制的高的值与 y 的值的大小）；

（2）固定汽车的高，判断隧道是否够宽（即已知 y 的值，先根据函数表达式求 x 的值，然后比较限制的宽的值与 x 的值的大小）.

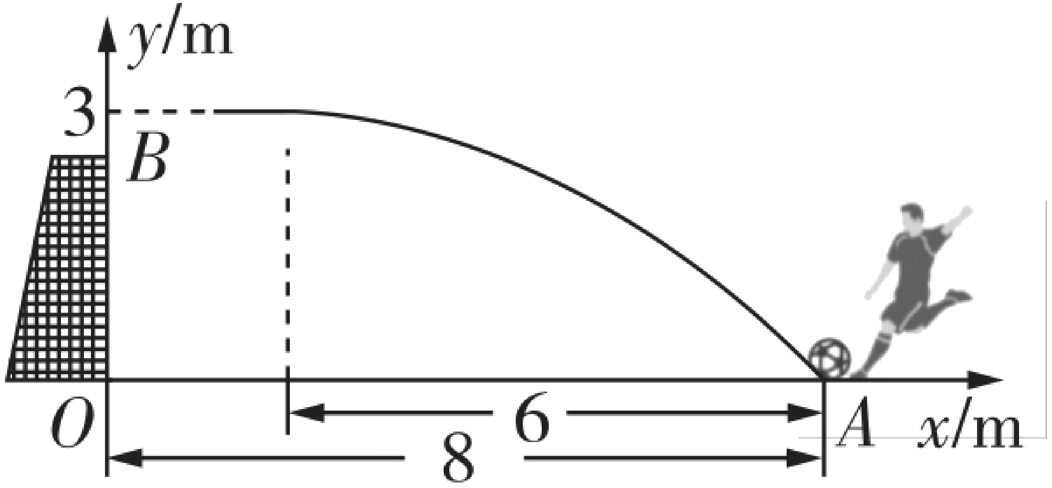
4.[2023滨州中考]某广场要建一个圆形喷水池，计划在池中心位置竖直安装一根顶部带有喷水头的水管，使喷出的抛物线形水柱在与池中心的水平距离为1 m处达到最高，高度为3 m，水柱落地处离池中心的水平距离也为3 m，那么水管的设计高度应为**2.25 m**________.



第4题图

【解析】 以池的中心为原点，竖直安装的水管为y轴，与水管垂直的水平面为x轴建立平面直角坐标系.因为水柱在距池中心的水平距离为1 m处达到最高，高度为3 m，所以设抛物线的表达式为$y=a(x-1)^2+3(0\leq x\leq 3)$（顶点式），将$(3,0)$代入，得$a=-\frac{3}{4}$，所以该抛物线的表达式为$y=-\frac{3}{4}(x-1)^2+3(0\leq x\leq 3)$.令$x=0$，则$y=2.25$，故水管的设计高度应为2.25 m.

5.新情境 教材P43B组变式[2023温州中考]一次足球训练中，小明从球门正前方8 m的A处射门，球射向球门的路线呈抛物线形.当球飞行的水平距离为6 m时，球达到最高点，此时球离地面3 m.已知球门高OB为2.44 m，现以O为原点建立如图所示的直角坐标系.



解题思路：

（1）确定顶点坐标为(2,3) → 设顶点式，代入点 A 坐标 → 得表达式

（2）设小明带球向正后方移动 n m → 得移动后抛物线的表达式，代入(0,2.25) → 得出结论

（1）求抛物线的函数表达式，并通过计算判断球能否射进球门（忽略其他因素）；

解：$\because 8-6=2$，$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为$(2,3)$．

设抛物线的表达式为$y=a(x-2)^2+3$，

把点$A(8,0)$的坐标代入，得$36a+3=0$，解得$a=-\frac{1}{12}$，

$\therefore$ 抛物线的函数表达式为$y=-\frac{1}{12}(x-2)^2+3$．

当$x=0$时，$y=-\frac{1}{12}\times 4+3=\frac{8}{3}>2.44$，$\therefore$ 球不能射进球门.

（2）对本次训练进行分析，若射门路线的形状、最大高度均保持不变，则当时他应该带球向正后方移动多少米射门，才能让足球经过点 O 正上方 2.25 m 处？

设小明带球向正后方移动n m，则移动后抛物线的表达式为

$y=-\frac{1}{12}(x-2-n)^2+3$，

把点$(0,2.25)$的坐标代入表达式，得$2.25=-\frac{1}{12}(0-2-n)^2+3$，

解得$n=-5$（舍去）或$n=1$.

$\therefore$ 当时他应该带球向正后方移动1 m射门，才能让足球经过点O正上方2.25 m处.