

福建省三明市 2022-2023 学年高二下学期期末数学试题

本试卷共 6 页. 满分 150 分.

注意事项:

1. 答题前, 考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的姓名、准考证号. 考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致.
2. 选择题每小题选出【答案】后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的【答案】标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它【答案】标号. 非选择题用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答. 在试题卷上作答, 【答案】无效.

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{-1, 0, 1\}$

B. $\{0, 1\}$

C. $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$

D. $\{x \mid -1 < x \leq 1\}$

【答案】B

【解析】因为 $A = \{x \mid x^2 \leq 1\} = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$,

$$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 - 2x - 3 < 0\} = \{x \in \mathbf{N} \mid (x-3)(x+1) < 0\} = \{0, 1, 2\},$$

则 $A \cap B = \{0, 1\}$.

故选: B

2. 已知随机变量 $X: N(1, \sigma^2)$, 若 $P(X > 0) = 0.8$, 则 $P(x < 2) =$ ()

A. 0.2

B. 0.4

C. 0.5

D. 0.8

【答案】D

【解析】因为 $X: N(1, \sigma^2)$, $P(X > 0) = 0.8$,

所以 $P(x < 2) = P(X > 0) = 0.8$,

故选: D

3. 命题 $p: \exists x > 1, x^2 - 2^x > 0$ 的否定为 ()

A. $\forall x > 1, x^2 - 2^x \leq 0$

B. $\forall x \leq 1, x^2 - 2^x \leq 0$

C. $\exists x \leq 1, x^2 - 2^x \leq 0$

D. $\exists x > 1, x^2 - 2^x \leq 0$

【答案】A

【解析】原命题的否定为 $\forall x > 1, x^2 - 2^x \leq 0$.

故选: A

高级中学名校试卷

4. 若函数 $f(x) = 3^x + \cos x$ ，则 ()

A. $f'(x) = 3^x + \sin x$

B. $f'(x) = 3^x - \sin x$

C. $f'(x) = 3^x \ln 3 + \sin x$

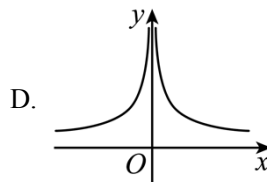
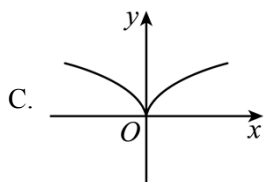
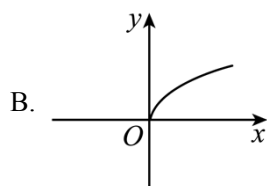
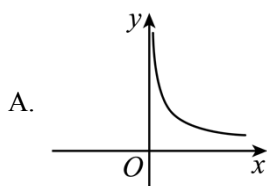
D. $f'(x) = 3^x \ln 3 - \sin x$

【答案】D

【解析】因为函数 $f(x) = 3^x + \cos x$ ，则 $f'(x) = 3^x \ln 3 - \sin x$ 。

故选：D

5. 已知幂函数的图象经过点 $P(8, 4)$ ，则该幂函数的大致图象是 ()



【答案】C

【解析】设幂函数为 $f(x) = x^\alpha$ ，则 $8^\alpha = 4$ ， $2^{3\alpha} = 2^2$ ，得 $3\alpha = 2$ ，得 $\alpha = \frac{2}{3}$ ，

所以 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ，定义域为 $\mathbb{R}$ ，所以排除 AD，

因为 $f(-x) = (-x)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} = f(x)$ ，所以函数为偶函数，所以排除 B，

故选：C

6. 某航天科研所安排甲，乙，丙，丁 4 位科学家应邀到创 A，B，C 三所学校开展科普讲座活动，要求每所学校至少安排 1 名科学家，且丙必须去 A 学校，则不同的安排方式共有 ()

A. 6 种

B. 12 种

C. 24 种

D. 30 种

【答案】B

【解析】由题意得，当 A 学校只去丙时，则将甲，乙，丁分成两组，分配到 B，C 两所学校，共有 $C_3^1 A_2^2 = 6$ 种安排方式，

当 A 学校去了丙和另一个科学家，则从甲，乙，丁中选一个和丙去 A 学校，剩下两人分别去 B，C 两所学校，共有 $C_3^1 A_2^2 = 6$ 种安排方式，

所以根据分类加法原理可得共有 $6 + 6 = 12$ 种安排方式，故选：B

7. 已知 $a = e^{0.3}$ ， $b = \frac{\ln 1.5}{2} + 1$ ， $c = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，则 a，b，c 的大小关系为 ()

高级中学名校试卷

A. $a > c > b$

B. $c > b > a$

C. $b > a > c$

D. $a > b > c$

【答案】A

【解析】 $Q e > \frac{9}{4}, \therefore e^{0.5} > \frac{3}{2}$, 又 $e^{0.6} > e^{0.5} > \frac{3}{2}$,

$\therefore e^{0.3} > \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \therefore a > c$,

设 $f(x) = \frac{1}{2} \ln x + 1 - \sqrt{x} (x > 0)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{2x}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

$\therefore f(1.5) < f(1) = 0$,

$\therefore \frac{1}{2} \ln 1.5 + 1 < \sqrt{1.5} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 即 $b < c$, $\therefore a > c > b$.

故选: A.

8. 设函数 $f(x) = \frac{e^x(2x+1)}{x}$, 则 ()

A. 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

B. 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 3e)$ 处的切线方程为 $y = e(x+1)$.

C. 函数 $f(x)$ 既有极大值又有极小值, 且极大值大于极小值.

D. 若方程 $f(x) = k$ 有两个不等实根, 则实数 k 的取值范围为 $\left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (4\sqrt{e}, +\infty)$.

【答案】D

【解析】由题意可知 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

$f'(x) = \frac{[e^x(2x+1)]'x - [e^x(2x+1)]x'}{x^2} = \frac{e^x}{x^2}(2x-1)(x+1)$,

令 $f'(x) = 0$, 即 $\frac{e^x}{x^2}(2x-1)(x+1) = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = \frac{1}{2}$

当 $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$

当 $x \in (-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $f'(x) < 0$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0)$ 和 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减.

故 A 错误;

当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得极大值为 $f(-1) = \frac{e^{-1}[2 \times (-1) + 1]}{(-1)} = \frac{1}{e}$,

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 取得极小值为 $f(\frac{1}{2}) = \frac{e^{\frac{1}{2}}(2 \times \frac{1}{2} + 1)}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{e}$,

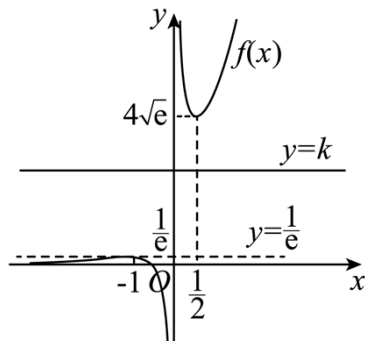
因为 $\frac{1}{e} < 4\sqrt{e}$, 所以极大值小于极小值, 故 C 错误;

对于 B, 切线斜率 $k = f'(1) = 2e$,

曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 3e)$ 处的切线方程为 $y - 3e = 2e(x - 1)$,

即 $y = e(2x + 1)$, 故 B 错误;

对于 D, 由上分析可作出 $f(x)$ 的图象如图所示



要使方程 $f(x) = k$ 有两个不等实根, 只需要 $y = k$ 与 $f(x)$ 有两个交点,

由图可知, $k \in (0, \frac{1}{e}) \cup (4\sqrt{e}, +\infty)$,

所以实数 k 的取值范围为 $(0, \frac{1}{e}) \cup (4\sqrt{e}, +\infty)$. 故 D 正确.

故选: D.

二、选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多个选项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 已知 $a > b > 0$, $c < 0$, 则下列四个不等式中, 一定成立的是 ()

A. $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$

B. $ac < bc$

C. $a > b - c$

D. $a(b - c) > b(a - c)$

高级中学名校试卷

【答案】ABD

【解析】对于 A, $Qa > b > 0, c < 0, \therefore b - a < 0, ab > 0,$

$$\therefore \frac{c}{a} - \frac{c}{b} = \frac{bc - ac}{ab} = \frac{c(b - a)}{ab} > 0, \text{ 即 } \frac{c}{a} > \frac{c}{b}, \text{ 故 A 正确;}$$

对于 B, $Qa > b > 0, c < 0, \therefore ac < bc,$ 故 B 正确;

对于 C, 取 $a = 2, b = 1, c = -3,$ 则 $a = 2 < b - c = 4,$ 故 C 错误;

对于 D, $Qa > b > 0, c < 0, \therefore b - a < 0,$

$$\therefore a(b - c) - b(a - c) = ab - ac - ab + bc = c(b - a) > 0, \text{ 即 } a(b - c) > b(a - c), \text{ 故 D 正确.}$$

故选: ABD.

10. 为考查某种药物预防疾病的效果, 进行动物试验, 得到以下数据:

药物	疾病	
	未患病	患病
未服用	75	65
服用	105	55

常用小概率值和相应临界值:

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

由以上数据, 计算得到 $\chi^2 = \frac{300 \times (75 \times 55 - 105 \times 65)^2}{140 \times 160 \times 180 \times 120} \approx 4.520,$ 根据临界值表, 以下说

法正确的是 ()

- A. 根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 认为服用药物与患病没有关联.
- B. 根据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 认为服用药物与患病没有关联.
- C. 根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 推断服用药物与患病有关联, 此推断犯错误的概率不超过 0.01.
- D. 根据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 推断服用药物与患病有关联, 此推断犯错误的概率不超过 0.05.

【答案】AD

【解析】因为 $\chi^2 = \frac{300 \times (75 \times 55 - 105 \times 65)^2}{140 \times 160 \times 180 \times 120} \approx 4.520,$ 且 $3.841 < 4.520 < 6.635,$

所以由小概率值和相应临界值表可得:

根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 认为服用药物与患病没有关联;

高级中学名校试卷

根据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验，推断服用药物与患病有关联，此推断犯错误的概率不超过 0.05.

故选：AD

11. 若函数 $f(x+2)$ 为奇函数， $f(x+1)$ 为偶函数，且当 $x \in (0,1]$ 时， $f(x) = \ln x$ ，则

()

A. $f(e) = 1$

B. $f(x)$ 周期为 4

C. $f(x)$ 为偶函数

D. 当 $x \in [1,2)$ 时， $f(x) = \ln(2-x)$

【答案】BD

【解析】因为 $f(x+2)$ 为奇函数，所以 $f(-x+2) = -f(x+2)$ ，

因为 $f(x+1)$ 为偶函数，所以 $f(-x+1) = f(x+1)$ ，所以 $f(x+2) = f(-x)$ ，

所以 $f(-x+2) = -f(-x)$ ，所以 $f(x+2) = -f(x)$ ，

所以 $f(-x) = -f(x)$ ， $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$ ，

所以 $f(x)$ 为奇函数，且周期为 4，所以 B 正确，C 错误，

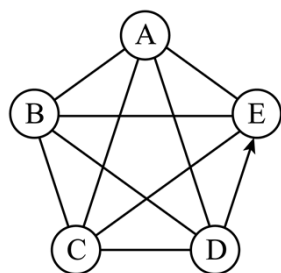
对于 A，因为 $f(x+2) = f(-x)$ ，且 $f(x)$ 为奇函数，所以

$f(e) = f(e-2+2) = -f(e-2) = -\ln(e-2) \neq 1$ ，所以 A 错误，

对于 D，当 $x \in [1,2)$ 时，则 $2-x \in (0,1]$ ，因为 $f(x+2) = f(-x)$ ，所以

$f(x) = f(2-x) = \ln(2-x)$ ，所以 D 正确，故选：BD

12. A, B, C, D, E 五名运动员参加了某乒乓球比赛，采用单循环赛制. 已知 10 场比赛的结果是：A 胜 3 场，E 胜 1 场；B, C, D 三人各胜 2 场，且这三人中有一人胜了其他二人. 如图，小张准备将各场比赛的胜负情况用箭头表示出来，其中“ $D \rightarrow E$ ”表示“D 胜 E”. 他只看过这一场比赛，故只画了这一个箭头. 为了画出其余的箭头，小张询问了运动员 B，该运动员只说，其他四个人相互间的比赛，每个人都是有胜有负的. 小张认为这些信息已经足够，他经过推理，画出了其余的所有箭头. 以下判断正确的是 ()



A. A 胜 B

B. E 胜 B

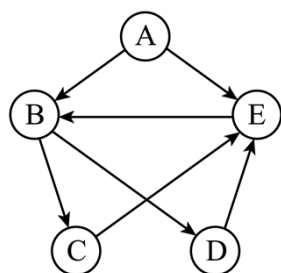
C. C 胜 D

D. D 胜 A

【答案】ACD

【解析】因为 B, C, D 三人各胜 2 场, 且这三人中有一人胜了其他二人,

情况一: 可设 B 胜 C、D 两人, 由结合其他条件可得如下关系图

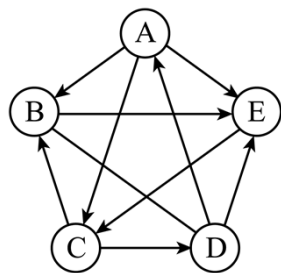


B 胜 C、D 两人, 则输给 A、E 两人, 又 E 胜 1 场, 所以 E 输 A、C、D,

而这与 B 运动员说其他四个人相互间的比赛, 每个人都是有胜有负的矛盾, 假设不成立

情况二: 可设 D 胜 B、C 两人, 又 D 胜 E, 而这与 D 只胜两场矛盾, 故假设不成立;

情况三: 以上分析只可能时 C 胜 B、D, 由结合其他条件可得如下关系图



故选: ACD.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若 $x \log_3 2 = 1$, 则 $2^x =$ _____.

【答案】3

【解析】由 $x \log_3 2 = 1$, 得 $x = \frac{1}{\log_3 2} = \log_2 3$, 所以 $2^x = 3$,

故【答案】为: 3

14. 袋子中装有大小形状均相同的 3 个黑球, 2 个红球, 若从中任取 2 个球, 用 X 表示取出 2 球中黑球的个数, 则随机变量 X 的数学期望 $E(X) =$ _____.

【答案】 $\frac{6}{5}$

【解析】依题意 X 的所有可能取值为 0, 1, 2,

$$\text{此时 } P(X=0) = \frac{C_3^0 C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}, \quad P(X=1) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}, \quad P(X=2) = \frac{C_3^2 C_2^0}{C_5^2} = \frac{3}{10},$$

则 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

$$\text{此时 } E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}.$$

故【答案】为: $\frac{6}{5}$.

15. 某篮球队为提高队员的训练积极性, 进行小组投篮游戏, 每个小组由两名队员组成, 队员甲与队员乙组成了一个小组. 游戏规则: 每个小组的两名队员在每轮游戏中分别投篮两次, 若 4 球全部投进则授予“神投小组”称号, 获得两次“神投小组”称号的小组可以结束训练. 已知甲、乙两名队员每次投进篮球的概率分别为 $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, 则他们小组恰好进行 4 轮游戏结束训练的概率为_____.

【答案】 $\frac{27}{256}$

【解析】队员甲与队员乙组成的小组在一轮游戏中获得“神投小组”称号的概率为

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

若他们小组恰好进行 4 轮游戏结束训练, 则前 3 轮游戏中他们获得一次“神投小组”, 第 4 轮游戏获得“神投小组”,

$$\text{所以所求概率 } P = C_3^1 \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{27}{256}. \text{ 故【答案】为: } \frac{27}{256}.$$

16. 已知实数 m, n 满足 $\frac{e^{2023-2m}}{2} - m = 0$, $\frac{e^{3-\ln 2}}{n} - \ln 2n = 2020$, 则 $mn =$ _____.

【答案】 $\frac{e^3}{4}$

【解析】因为 $\frac{e^{2023-2m}}{2} - m = 0$, 所以 $e^{2023-2m} - 2m = 0$,

高级中学名校试卷

故 $e^{2023} = 2me^{2m}$, 即 $2m + \ln 2m = 2023$, 即 $e^{\ln 2m} + \ln 2m = 2023$.

因为 $\frac{e^{3-\ln 2}}{n} - \ln 2n = 2020$ 所以 $e^{3-\ln 2n} + 3 - \ln 2n = 2023$.

令 $f(x) = x + e^x$, 则 $f'(x) = 1 + e^x > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增,

而 $f(\ln 2m) = f(3 - \ln 2n) = 2023$, 故 $\ln 2m = 3 - \ln 2n$,

解得 $\ln 4mn = 3$, 则 $mn = \frac{e^3}{4}$.

故【答案】为: $\frac{e^3}{4}$

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知 $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ 展开式中各项的二项式系数之和为 64, 解决以下问题:

(1) 求 n 及展开式中的常数项;

(2) 求展开式中 x 的次数为奇数的项的系数和.

解: (1) 由题意可知 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n = 64$, 所以 $n = 6$.

$\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k (2x^2)^{6-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_6^k 2^{6-k} x^{12-3k}$,

$k = 0, 1, 2, \dots, 6$.

令 $12 - 3k = 0$, 则 $k = 4$,

常数项为 $T_{4+1} = T_5 = 60$.

(2) 由 (1) 知, 当 $k = 1$ 时, $T_2 = C_6^1 2^{6-1} x^{12-3 \times 1} = 192x^9$,

当 $k = 3$ 时, $T_4 = C_6^3 2^{6-3} x^{12-3 \times 3} = 160x^3$,

当 $k = 5$ 时, $T_6 = C_6^5 2^{6-5} x^{12-3 \times 5} = 12x^{-3}$,

所以展开式中 x 的次数为奇数的项的系数和 $192 + 160 + 12 = 364$.

18. 使不等式 $4x^2 + 4kx > 8x - k$ 对一切实数 x 恒成立的 k 的取值范围记为集合 A , 不等式 $x^2 - 3mx + (2m - 1)(m + 1) < 0$ 的解集为 B .

(1) 求集合 A ;

(2) 若“ $x \in B$ ”是“ $x \in A$ ”的充分条件, 求实数 m 的取值范围.

解: (1) 因为 $4x^2 + 4kx > 8x - k$ 对一切实数 x 恒成立,

所以 $\Delta = 16(k - 2)^2 - 4 \times 4k = 16(k^2 - 5k + 4) = 16(k - 1)(k - 4) < 0$,

高级中学名校试卷

所以 $1 < k < 4$ ，所以集合 $A = \{k | 1 < k < 4\}$ 。

(2) 若“ $x \in B$ ”是“ $x \in A$ ”的充分条件，则 $B \subseteq A$ ，

因为 $x^2 - 3mx + (2m-1)(m+1) < 0$ ，

所以 $[x - (2m-1)][x - (m+1)] < 0$

当 $m = 2$ ，即 $2m-1 = m+1$ ， $B = \emptyset$ ，满足题意，

当 $m > 2$ ，即 $2m-1 > m+1$ ， $B = \{x | m+1 < x < 2m-1\}$ ，

由 (1) 知 $A = \{x | 1 < x < 4\}$ ，所以 $\begin{cases} 2m-1 \leq 4, \\ m+1 \geq 1 \end{cases}$ ，

所以 $0 \leq m \leq \frac{5}{2}$ ，所以 $2 < m \leq \frac{5}{2}$ 。

当 $m < 2$ ，即 $2m-1 < m+1$ ， $B = \{x | 2m-1 < x < m+1\}$

所以 $\begin{cases} m+1 \leq 4, \\ 2m-1 \geq 1 \end{cases}$ ，所以 $1 \leq m \leq 3$ ，所以 $1 \leq m < 2$ ，

综上所述，实数 m 的取值范围 $\left\{m | 1 \leq m \leq \frac{5}{2}\right\}$

19. 某厂有甲，乙，丙三个车间生产同一种产品，这三个车间的产量分别占总产量的百分比及所生产产品的不合格率如下表所示：

车间	甲车间	乙车间	丙车间
产量占比	25%	35%	40%
不合格率	0.05	0.04	0.02

设事件 A = “从该厂产品中任取一件，恰好取到不合格品”

(1) 求事件 A 的概率；

(2) 有一用户买了该厂一件产品，经检验是不合格品，但该产品是哪个车间生产的标志已经脱落，判断该产品来自哪个车间的可能性最大，并说明理由。

解：(1) 设事件 B_1 = “任取一件产品，生产于甲车间”，

B_2 = “任取一件产品，生产于乙车间”， B_3 = “任取一件产品，生产于丙车间”，

那么， $P(A) = \sum_{i=1}^3 P(A | B_i) P(B_i)$

$= 0.05 \times 0.25 + 0.04 \times 0.35 + 0.02 \times 0.4$

$= 0.0345$ 。

(2) 该产品来自乙车间的可能性最大。

理由如下：由（1）得，产品来自甲车间的概率为 $P(B_1|A) = \frac{P(AB_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}$

$$= \frac{0.05 \times 0.25}{0.0345} = \frac{25}{69}.$$

产品来自乙车间的概率为 $P(B_2|A) = \frac{P(AB_2)}{P(A)} = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)} = \frac{0.04 \times 0.35}{0.0345} = \frac{28}{69}$

产品来自丙车间的概率为 $P(B_3|A) = \frac{P(AB_3)}{P(A)} = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)} = \frac{0.02 \times 0.4}{0.0345} = \frac{16}{69}$

所以该产品来自乙车间的概率最大.

20. 已知函数 $f(x) = \log_2\left(\frac{2}{x-1} + a\right)$ 为奇函数,

(1) 求实数 a 的值;

(2) 若关于 x 的不等式 $2^{f(2^x)} + 3 \cdot 2^x - b \geq 0$ 恒成立, 求实数 b 的取值范围;

解: (1) 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(x) + f(-x) = 0$,

所以 $\log_2\left(\frac{2}{x-1} + a\right) + \log_2\left(\frac{2}{-x-1} + a\right) = 0$ 在定义域内恒成立,

即 $\left(\frac{2}{x-1} + a\right)\left(\frac{2}{-x-1} + a\right) = 1$ 在定义域内恒成立,

整理, 得 $(2-a)^2 - a^2x^2 = 1 - x^2$ 在定义域内恒成立,

所以 $\begin{cases} (2-a)^2 = 1, \\ -a^2 = -1 \end{cases}$, 解得 $a = 1$.

因为 $a = 1$ 时, $f(x) = \log_2 \frac{x+1}{x-1}$ 的定义域 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 关于原点对称满足题意,

所以 $a = 1$.

(2) 因为 $f(x) = \log_2 \frac{x+1}{x-1}$ 的定义域 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

所以 $2^x > 1$ 或 $2^x < -1$, 解得 $x > 0$,

因为 $2^{f(2^x)} + 3 \cdot 2^x - b \geq 0$ 恒成立, 所以 $b \leq \frac{2^x + 1}{2^x - 1} + 3 \cdot 2^x (x > 0)$,

所以 $b \leq 3(2^x - 1) + \frac{2}{2^x - 1} + 4 (x > 0)$.

因为, 当 $x > 0$ 时, $2^x - 1 > 0$, 所以根据基本不等式的性质得

$3(2^x - 1) + \frac{2}{2^x - 1} \geq 2\sqrt{6}$, 当且仅当 $3(2^x - 1) = \frac{2}{2^x - 1}$, 即 $x = \log_2\left(\frac{\sqrt{6}}{3} + 1\right)$ 时等号成立,

所以 $3(2^x - 1) + \frac{2}{2^x - 1} + 4 \geq 2\sqrt{6} + 4$,

所以 $b \in (-\infty, 2\sqrt{6} + 4]$.

21. 近几年, 电商的蓬勃发展带动了快递行业的迅速增长. 为了获得更大的利润, 某快递公司在 A 城市的网点对“一天中收发一件块递的平均成本 y_i (单位: 元) 与当天揽收的快递件数 x_i (单位: 千件) 之间的关系”进行调查研究, 得到相关数据如下表:

每天揽收快递件数 x_i (千件)	2	3	4	5	8
每件快递的平均成本 y_i (元)	5.6	4.8	4.4	4.3	4.1

根据以上数据, 技术人员分别根据甲、乙两种不同的回归模型, 得到两个经验回归方程. 方

程甲: $\hat{y} = -0.2x + 5.6$, 方程乙: $\hat{y} = 3.5 + \frac{4}{x}$.

(1) 为了评价两种模型的拟合效果, 完成以下问题:

①根据上表数据和相应回归方程, 将以下表格填写完整 (结果保留一位小数):

每天揽收快递件数 x_i /千件		2	3	4	5	8
每件快递的平均成本 y_i /元		5.6	4.8	4.4	4.3	4.1
模型甲	预报值	5.2	5	4.8		
	随机误差 $\hat{\varepsilon}_i$	-0.4	0.2	0.4		
模型乙	预报值 $\hat{y}_i$	5.5	4.8	4.5		
	随机误差 $\hat{\varepsilon}_i$	-0.1	0	0.1		

(备注: $\hat{\varepsilon}_i = \hat{y}_i - y_i$ 称为相应于点 (x_i, y_i) 的随机误差)

②分别计算模型甲与模型乙的随机误差平方和 Q_1, Q_2

高级中学名校试卷

并依此判断哪个模型的拟合效果更好.

(2) 已知该快递网点每天能揽收的快递件数 x (单位: 千件) 与揽收一件快递的平均价格 t (单位: 元) 之间的关系是 $t = 10 - \frac{x}{2}$ ($0 < t < 10$), 根据 (1) 中拟合效果较好的模型建立的

的回归方程解决以下问题:

①若一天揽收快递 6 千件, 则当天总利润的预报值是多少?

②为使每天获得的总利润最高, 该快递网点应该将揽收一件快递的平均价格定为多少? (备注: 利润 = 价格 - 成本)

解: (1) ①表中数据填写如下:

每天揽收快递件数 x_i / 千件		2	3	4	5	8
每件快递的平均成本 y_i / 元		5.6	4.8	4.4	4.3	4.1
模型甲	预报值 $\hat{y}_i$	5.2	5.0	4.8	4.6	4.0
	随机误差 $\hat{e}_i$	-0.4	0.2	0.4	0.3	-0.1
模型乙	预报值 $\hat{y}_i$	5.5	4.8	4.5	4.3	4.0
	随机误差 $\hat{e}_i$	-0.1	0	0.1	0	-0.1

②计算可得:

$$Q_1 = (-0.4)^2 + (-0.2)^2 + 0.4^2 + 0.3^2 + (-0.1)^2 = 0.46,$$

$$Q_2 = (-0.1)^2 + 0.1^2 + (-0.1)^2 = 0.03.$$

因为 $Q_2 < Q_1$, 所以模型乙的拟合效果较好.

(2) 解法一:

①设每天获得的总利润为 z , 则 $z = (t - y) \cdot 1000x$

当 $x = 6$ 时, 由回归方程 $\hat{y} = 3.5 + \frac{4}{x}$ 得 $\hat{y} = \frac{25}{6}$. 由 $t = 10 - \frac{x}{2}$ 得 $t = 7$,

所以总利润的预报值 $z = \left(7 - \frac{25}{6}\right) \times 6000 = 17000$ (元).

②由 $t = 10 - \frac{x}{2}$,

$$则 z = (t - y) \cdot 1000x = \left[\left(10 - \frac{x}{2}\right) - \left(3.5 + \frac{4}{x}\right) \right] \times 1000x = 1000 \left(-\frac{x^2}{2} + 6.5x - 4 \right),$$

高级中学名校试卷

所以当 $x = 6.5$ 时, z 取得最大值, 此时 $t = 10 - \frac{x}{2} = 6.75$,

所以当揽收平均价格定为 6.75 元时, 该网点一天的总利润最大.

解法二: ①每天获得的总利润为 z , 则 $z = (t - y) \cdot x$

当 $x = 6$ 时, 由回归方程 $\hat{y} = 3.5 + \frac{4}{x}$ 得 $\hat{y} = \frac{25}{6}$.

由 $t = 10 - \frac{x}{2}$ 得 $t = 7$,

所以总利润的预报值 $z = \left(7 - \frac{25}{6}\right) \times 6 = 17$ (千元)

②设揽收一件快递的平均价格为 t 元,

由 $t = 10 - \frac{x}{2}$, 得揽收快递件数 $x = 20 - 2t$,

所以, 平均成本 $y = 3.5 + \frac{4}{20 - 2t}$,

所以每天获得的总利润为

$$\begin{aligned} z &= (t - y) \cdot x = \left[(t - 3.5) - \left(\frac{4}{20 - 2t} \right) \right] (20 - 2t) = (t - 3.5)(20 - 2t) - 4 \\ &= -2t^2 + 27t - 74. \end{aligned}$$

当 $t = \frac{27}{4}$ 时, 该快递网点每天获得的总利润最大,

所以当揽收平均价格定为 $\frac{27}{4}$ 元时, 该网点一天的总利润最大.

22. 已知函数 $f(x) = e^{ax+1} - x$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a = 1$ 时, 若函数 $g(x) = f(x) - \ln(x+1) + x$ 的最小值为 m , 试判断函数

$h(x) = e^{x+1} - x - m$ 在区间 $(-3, 0)$ 上零点的个数, 并说明理由.

解: (1) 由 $f(x) = e^{ax+1} - x$ 得 $f'(x) = ae^{ax+1} - 1$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) = ae^{ax+1} - 1 < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 设 $F(x) = f'(x) = ae^{ax+1} - 1$, 则 $F'(x) = a^2 e^{ax+1} > 0$,

$\therefore f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/087163156132006122>