最佳策略问题

【知识精讲+典型例题+高频真题+答案解析】

编者的话：同学们，恭喜你已经开启了奥数思维拓展的求知之旅，相信你已经正确规划了自己的学习任务，本套资料为小升初思维拓展、分班考、择校考而设计，针对小升初的高频知识点进行全面精讲，易错点逐个分解，强化练习高频易错真题，答案解析非常通俗易懂，可助你轻松掌握、理解、运用该知识点解决问题！ 2024 年 8 月

目录导航 资料说明

第一部分：知识精讲：把握知识要点，掌握方法技巧，理解数学本质，提升数学思维。
第二部分：典型例题：选题典型、高频易错、考试母题，具有理解一题，掌握一类的优势。
第三部分：高频真题：精选近两年统考真题，助您学习有方向，做好题，达到事半功倍的效果。
第四部分：答案解析：重点、难点题精细化解析，犹如名师讲解，可以轻松理解。

第一部分 知识精讲

知识清单 方法技巧

在日常生活中，竞赛或争斗性质的现象随处可见，小到下棋、做游戏，大到体育比赛、军事较量等，人们在竞赛或争斗中总是希望自己或自己的一方能够获取胜利或获得最好的结果，这就要求参与竞争的双方都要制定出自己的策略，即分析对方可能采取的计划，有针对性地制定自己的克敌计划．哪一方的策略更胜一筹，哪一方就会取得最后的胜利．这种现象我们称之为“对策现象”．

重点•难点

如何制定最佳策略，要根据具体的“对策现象”来分析．一般来说，“对策现象”有三个基本要素：

（1）局中人，即在一场竞赛或争斗中的加者，他们为了在对策中取得最后的胜利，必须制定观对付对方的行动计划．

局中人并不特指某一个人，而是指参加竞赛的各个阵营.

（2）策略，是指某一个局中人的一个“自始至终贯彻”的可执行方案，在一局对策中，各具局中人可以有一个策略，也可以有多种策略.

（3）得失，在局对策中，肯定会有胜利者和失败者，竞赛的成绩也会有好有差，我们称之为得失．每个局中人在一局对策中

的得失与全体局中人所采取的策略的优劣有着直接的关系.

第二部分 典型例题

例题 1：有两堆火柴，一堆 3 根，另一堆 7 根。甲、乙两人轮流取火柴，每次可以从每一堆中取任意根火柴，也可以同时从两堆中取相同数目的火柴。每次至少要取走一根火柴。谁取得最后一根火柴谁胜。如果都采用最佳方法，甲先取，那么谁将获胜？

【答案】甲必胜

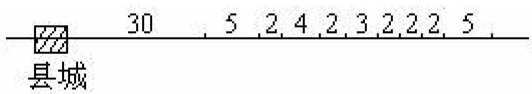
【分析】既然规定谁取得最后一根火柴谁胜，那么可以先假设甲获胜，然后采用逆推法分析，求出每一次取，剩下的火柴可能是多少，最终倒推得到最初甲应该从那一堆里面取，该如何取。

【详解】假设甲获胜，甲最终将两堆火柴都变为 0，简记（0，0）；因为甲至少取 1 根火柴，所以甲取之前，即乙留给甲的两堆火柴最少的几种情况是（1，0），（2，0）（1，1）；要想乙留给甲上述情况，甲应该留给乙（1，2）；再往前逆推，当甲留给乙（3，5）时，无论乙怎样取，甲都可以一次取完所有的火柴或留给乙（1，2）。所以甲先从 7 根火柴的一堆取出 2 根，留给乙（3，5），甲必胜。

答：甲会获胜。

【点睛】本题考查的是必胜策略的问题，既然都采取最佳策略，就要从最利于自己的角度来分析问题。

例题 2：有十个村，坐落大县城出发的一条公路上（如下图所示，距离单位是千米），要安装水管，从县城送自来水供给各村，可以用粗细两种水管，粗管足够供应所有各村 用水，细管只能供一个村用水，粗管每千米要用 8000 元，细管每千米要用 2000 元，把粗管和细管适当搭配、互相连接，可以降低工程的总费用，按你认为最 节约的办法，费用应是多少？

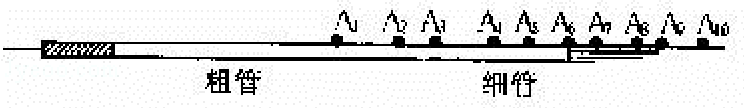


【答案】工程总费用最少为 414000 元

【详解】试题分析：设十个村分别为 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6、A_7、A_8、A_9、A_{10}，在 A_7 之后，粗管可以换成 3 根或更少根细管，费用将减少，在 A_6 和 A_7 之间，不论安粗管还是四条细管，花的钱一样多，在 A_6

以前如果不安粗管安细管，需要 5 条以上的细管，费用将增加．因此，工程的设计是：从县城到 A_7（A_6）安一条粗管；A_7、A_8 之间安三条细管；A_8、A_9 之间安二条细管；A_9、A_{10} 之间安一条细管这样做，工程总费用最少．

解：如图，设十个村分别为 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6、A_7、A_8、A_9、A_{10}，



工程的设计是：从县城到 A_7（A_6）安一条粗管；A_7、A_8 之间安三条细管；A_8、A_9 之间安二条细管；A_9、A_{10} 之间安一条细管这样做，工程总费用最少．

（30+5+2+4+2+3+2）×8000+（6+4+5）×2000=414000（元）

答：工程总费用最少为 414000 元．

点评：粗管每千米要用 8000 元，细管每千米要用 2000 元，4 根细管的价格和 1 根粗管相等，3 根以下细管比粗管节约是解决此题的关键．

例题 3：在一个 3×3 的方格中（下图），甲、乙两人轮流（甲先）往方格中写 1、3、4、5、6、7、8、9、10 九个数中的一个，数字不能重复．最后甲的得分是上、下两行六个数之和，乙的得分是左、右两列六个数之和，得分多者为胜．请你为甲找出一种必胜的方法．

a	b	c
d	e	f
g	h	i

【答案】先在 d 或 f 中填入 1．

【详解】把题中的九个格标上字母：a、b、c、d、e、f、g、h、i．甲的得分为：a＋b＋c＋g＋h+i=（a＋c＋g+i）+（b+h）；

乙的得分为：a＋d＋g＋c＋f＋i=（a＋c＋g＋i）+（d＋f）

要想使甲的得分高于乙的得分，必须且只需使 b＋h＞d+f．要想使 b＋h＞d＋f，

甲有两种策略：一是增强自己的实力——使 b、h 格内填的数尽可能地大；二是削弱对方的实力——使 d、f 格内填的数尽可能地小．取胜的总策略是“增强自己，削弱对方”两者兼顾．如果优先考虑增强自己，则先在 b 或 h 中填 10，这时如果对手在 b 或 h 中填 1，则无论自己在 d 或 f 中填什么，都不能保证 d+f 小于 11，所以很可能就输了，因此要优先考虑削弱对方，先在 d 或 f 中填入 1，这时候就算对手给他自己加一个 10 还是给一个最小的 3，都可以保证 b＋h＞d+f．

例题 4：

有一堆棋子共有 2002 粒，甲、乙两人玩轮流取棋子的游戏．甲先取乙后取，并且规定每次取的棋子不能超过 7 粒，但不能不取．如果规定取到最后一粒棋子的人为胜者，那么甲应如何制定策略以取胜？

【答案】由于 2002÷8=250…2，所以一开始甲先取 2 粒棋子，以后的每一轮，乙如果取 a（1≤a≤7）粒棋子，甲就取（8－a）粒，从而到最后一轮前，只剩下 8 粒棋子，而轮到乙取，无论乙取几粒棋子，甲都可以将剩下的棋子一次取完，从而获得胜利．

【详解】甲为了能取到最后一粒棋子，必须使得当他取到倒数第二轮时，还有 8 粒棋子．因为此时轮到乙来取，乙最少要取 1 粒，最多只能取 7 粒，因此无论乙取几粒，甲都可以将剩下的棋子一次取完，从而保证必胜．可见，“8”是个关键数字，一开始甲取的棋子数，应该保证余下的棋子数是 8 的倍数．往后的每一轮，不管乙取多少粒（1 至 7 粒），甲总可以使自己所取的棋子数和乙所取棋子数和为 8，从而将主动权控制在自己手中．这样到了最后一轮，只剩下 8 粒棋子，迫使乙败，从而甲取胜．

第三部分　高频真题

1．1111 个空格排成一行，最左端空格中放有一枚棋子，甲先乙后轮流向右移动棋子，每次移动 1～7 个格。规定将棋子移到最后一格者输。甲为了获胜，第一步必须向右移多少格？

2．有一长为 11cm，宽为 9cm，高为 7cm 的长方体木块，能否切割成 77 块长、宽都是 3cm，高是 1cm 的长方体形状的积木块？说明理由。

3．商场举行促销活动，在购买商品时，每消费 50 元现金就可以得到一张 20 元的购物券，每消费 100 元现金就能得到一张 50 元的购物券．现在小明要买 37 件 10 元的商品，他该怎样去买才能让花出去的钱最少？

4．三堆火柴分别有 2001 根、2002 根、2003 根．甲、乙两人轮流从中取出火柴．规则是：每人每次只能从其中的一堆中去取，最少要取一根，最多可全部取走，可以任意选择，谁取完最后一堆的最后一根谁就获胜．如果甲先取，要保证获胜，他应该制定怎样的策略？

5．已知： 每个飞机只有一个油箱， 飞机之间可以相互加油（注意是相互，没有加油机） 一箱油可供一架飞机绕地球飞半圈，问题：为使至少一架飞机绕地球一圈回到起飞时的飞机场，至少需要出动几架飞机？（所有飞机从同一机场起飞，而且必须安全返回机场，不允许中途降落，中间没有飞机场）

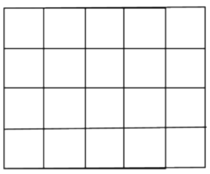
6．甲、乙两人玩下面的游戏：有三堆玻璃球，A 堆有 29 个，B 堆有 16 个，C 堆有 16 个，甲、乙两人依次从中拿取，每次只许从同一堆中拿，至少拿一个，多拿不限，规定拿最后一个者获胜．问如果甲先拿，他有无必胜的策略？

7．一名农夫带着一条狗、一只兔子和一筐白菜要过河．现在只有一条小船，农夫一次最多带一样东西过河．农夫不在的时候，狗会咬兔子，兔子会吃白菜．请问：农夫用什么办法可以将三样东西安全地带过河呢？

8．桌上有一块金帝牌巧克力，它被直线划分为排成 3 行 7 列的 21 个小方块．现在让你和对手进行一种两人轮流切巧克力的游戏，规则如下：①每次只许沿一条直线把巧克力切成两块；②拿走其中一块，把另一块留给对手再切；③谁能留给对手恰好是一个小方块，谁就取胜．如果请你首先切巧克力，那么你第一次应该切走多少个小方块，才能使你最后获胜?

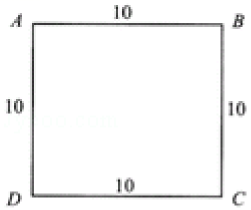
9．有 9 根火柴，甲、乙两人轮流取，规定每次可以取 1 根或者 2 根火柴，以取走最后一根火柴的人为胜者．试问：如果甲先取，谁有必胜的策略？

10．下图是一个 4×5 的方格盘。先将其中的 4 个方格染黑，然后按以下规则继续染色：如果某个格与两个黑格都有公共边，就将这个格染黑。这样操作下去，能否将整个方格盘都染成黑色？



11．有 2002 个空格排成一行，第一格中放入一枚棋子，每次可向前移动 3 格或 6 格，由甲乙两人交替走，以先到最后一格者为胜，问先走胜还是后走胜？如何取胜？

12．如图，一条环形公路上有 A、B、C、D 四个仓库．A 仓库存盐 40 吨，B 仓库存盐 5 吨，C 仓库存盐 35 吨，D 仓库没有盐．现在要调整存放数量，计划 A、B、C、D 每个仓库各存盐 20 吨．已知每吨盐运 l 千米需要运费 2 元．试问：为完成上述调运计划，最少需要多少元运费？（图 16﹣ 2 中公路旁的数字表示相邻仓库间的里程数，单位为千米）



13．三个小伙子同时爱上了一个姑娘，为了决定他们谁能娶这个姑娘，他们决定用手枪进行一次决斗．小李的命中率是 30％，小黄比他好些，命中率是 50％，最出色的枪手是小林，他从不失误，命中率是 100％．由于这个显而易见的事实，为公平起见，他们决定按这样的顺序：小李先开枪，小黄第二，小林最后．然后这样循环，直到他们只剩下一个人．那么这三个人中谁活下来的机会最大呢？他们都应该采取什么样的策略？

14．假设有一个池塘，里面有无穷多的水．现有 2 个空水壶，容积分别为 5 升和 6 升．问题是如何只用这 2 个水壶从池塘里取得 3 升的水．

15．2008 个小方格从左到右排成一行，甲、乙两人轮流在空格内放棋子，每人每次放一枚．规定如下：每个空格至多放一枚棋子；当甲放好一枚棋子后，乙必须在紧挨着这枚棋子的空格内放；而当乙放好棋子后，甲必须隔一个位子放；谁放不了就判谁输．如果乙一开始在左数第一个方格内放了一枚棋子，谁将有必胜策略？

16．一个最普通的火柴游戏就是两人一起玩，先置若干根火柴于桌上，两人轮流取，每次所取的数目可先做一些限制，规定取走最后一根火柴者获胜．

（1）规则一：若限制每次所取的火柴数目最少 1 根，最多 3 根，则如何制胜？

例如：桌面上有 n＝15 根火柴，甲、乙两人轮流取，甲先取，则甲应如何取才能制胜？

（2）规则二：限制每次所取的火柴数目为 1 至 4 根，则如何制胜？

（3）规则三：限制每次所取的火柴数目不是连续的数，而是一些不连续的数，如 1、3、7，则又该如何制胜？

（4）规则四：限制每次所取的火柴数是 1 或 4(一个奇数，一个偶数)

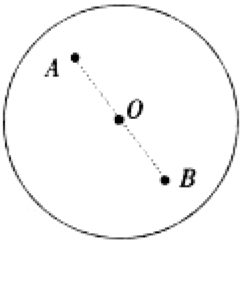
17．甲、乙、丙、丁四个人在晚上过一座桥，桥每次最多容纳两个人一起通过．过桥需要手电筒，而四人只有 1 支手电筒，甲、乙、丙、丁单独过桥需要的时间分别为 1 分钟、2 分钟、5 分钟、10 分钟．请问：怎样安排过桥顺序，才能使四个人过桥的总时间最短？这个最短时间是多少分钟？（不允许过桥后将电筒扔回，只能让人携带回来）

18．唐老鸭与米老鼠进行一万米赛跑，米老鼠的速度是每分钟 125 米，唐老鸭的速度每分钟 100 米，唐老鸭手中掌握着一种使米老鼠倒退的电子遥控仪，通过这种电子遥控仪发出第几次指令，米老鼠就以原速度的几×10%倒退一分钟，然后按原来的速度前进，如果唐老鸭想获胜，那么他至少应按几次遥控器？

19．黑板上写有 l，2，3，4，5，…，2009 这些自然数，甲先乙后，两人轮流擦去一个自然数．如果最后剩下的两个自然数奇偶性不同，那么甲就胜，否则乙胜．请问：谁有必胜的策略，具体的策略是怎样的？

20．甲、乙两人轮流报数，每人都只能报 2、3、5、7 中的一个，把两人报的数累加．如果某个人报完数后，累加的和第一次为三位数，那么这个人就获胜．请问：谁有必胜策略？

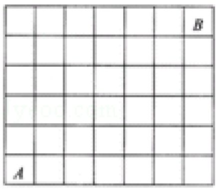
21．甲、乙两人轮流往一个圆桌面上放同样大小的硬币．规则是：每人每次只能放一枚，硬币不许重叠，谁放完最后一枚硬币而使对方再也无处可放，谁就获胜．如果甲先放，那么他怎样放才能取胜？



22．甲、乙两个人按自然数顺序轮流报数，每人每次只能报 1 个或 2 个数，但不能不报．例如，甲报 1，乙就接着报 2 或 2、3；而甲也可以报 1、2，乙接着报 3 或 3、4．这样连续报下去，谁报出 100，谁就获胜．甲要怎样才能获胜？先报还是后报？

23．4 个相同的盒子排成一排，小悦把 6 个相同的棋子分装在这些盒子中，其中恰有一个盒子没有装棋子，然后她外出了，冬冬从三个有棋子的盒子里各拿 1 个棋子放在空盒内，再把盒子重新排了一下．小悦回来后查看了一番，没有发现有人动过这些盒子和棋子．请问：开始时这 4 个盒子中分别有多少颗棋子？

24．如图，方格 A 中放有一枚棋子，甲先乙后轮流移动这枚棋子，只能向上、向右或向右上方沿 45°角走 1 步，最终将棋子走到方格 B 的人获胜．请问：谁有必胜策略，策略是什么？如果每次允许往同一方向（上、右或右上）走任意多步，结果又如何呢？



25．这是两人竞赛．方法是：在如图 3 所示的井字方格内填写符号，先填一方画“o”后填一方画“×”谁能够先使三个“o”或三个“×”排在一条直线上（水平或竖直或成 45 度角的直线），谁就获胜．那么，为了取胜，第一个“o”应画在哪里？相应地，第一个“×”又应画在哪里？试分析胜负的情况如何？

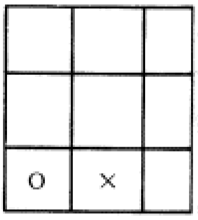


图 3

26．两人作移火柴棍的游戏，游戏的规则如下：两人从一堆火柴棍中可轮流移走 1～7 根，直到移尽为止．挨到谁移最后一根就算谁输．如果开始时有 1000 根火柴，则先移的人第一次应该移动几根火柴棍，才能保证在游戏中获胜？

27．在黑板上写下数 1，2，3，4，…，100，101，甲先擦掉其中的一个数，然后乙再擦去一个数．如此轮流下去，直到最后只剩下两个数为止，若最后剩下的两个数互素，则甲胜；若最后剩下的两个数不互素，则乙胜．按此规则，请为甲制定一个必胜策略．

28．甲和乙两人做数学游戏：在黑板上写一个自然数，轮到谁走时，谁就从该自然数中减去它的某个非零数字，并用所得的差替换原数．两人轮流走，谁所得到的数是零，就算谁赢．如果开始在黑板上写着数 1994，并且甲先走，问谁有必胜策略?

29．有 3 只鹿要过河，它们分别是胖胖、苗苗和芽芽．胖胖体重 100 千克，苗苗体重 60 千克，芽芽 40 千克．河边有一条小船可以用来摆渡，小船每次最多可载重 100 千克．它们怎样才能顺利地过河呢？

30．99 张卡片上分别写着 1～99．甲先从中抽走一张，然后乙再从中抽走一张，如此轮流下去．若最后的两张上的数是互质数，则甲胜；若最后剩下的两个数不是互质数，则乙胜．问：甲要想获胜应该怎样抽取卡片？

31．6 个人各拿一只水桶到水龙头接水，水龙头注满 6 个人的水桶所需时间分别是 5 分钟、4 分钟、3 分钟、10 分钟、7 分钟、6 分钟．现在如果有甲、乙两个水龙头可用，怎么安排这 6 个人打水，才能使他们等候的总时间最短，最短的时间是多少？

32．有 m 个减号“－”号排成一行，甲、乙两人轮流将减号“－”改成加号“+”，每次只能改其中的一个或者是相邻的两个，但不能不改，谁将最后剩下的减号“－”改为加号“+”谁就获胜．如果甲先改，请问甲是否有必胜的策略？