

2023~2024 学年（上）高二期末质量监测

数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
 2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上指定位置上，在其他位置作答一律无效。
 3. 本卷满分为 150 分，考试时间为 120 分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
- 一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 数列 $1, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \dots$ 的通项公式可能是 $a_n =$ ()

- A. $\frac{n^2+1}{n+1}$ B. $\frac{n+1}{n^2+1}$ C. $\frac{n^2}{2n-1}$ D. $\frac{n^2+1}{2n-1}$

【答案】A

【解析】

【分析】采用排除法以及检验法即可得解。

【详解】当 $n=1$ 时， $\frac{n^2+1}{2n-1}=2$ ，故排除 D，当 $n=2$ 时， $\frac{n+1}{n^2+1}=\frac{3}{5}$ ， $\frac{n^2}{2n-1}=\frac{4}{3}$ ，故排除 BC，经检验

A 选项符合题意。

故选：A。

2. 圆 $(x+1)^2+y^2=1$ 和圆 $(x-2)^2+(y-4)^2=16$ 的位置关系为 ()

- A. 相离 B. 相交 C. 外切 D. 内切

【答案】C

【解析】

【分析】利用圆心距与半径和差关系判定两圆位置关系即可。

【详解】易知圆 $(x+1)^2+y^2=1$ 和圆 $(x-2)^2+(y-4)^2=16$ 的圆心与半径分别为： $(-1,0)$ ， $r_1=1$ 和

$(2,4), r_2 = 4$, 所以圆心距为 $\sqrt{(-1-2)^2 + (0-4)^2} = 5$, 显然 $r_1 + r_2 = 5$, 即两圆相外切.

故选: C

3. 某校文艺部有 7 名同学, 其中高一年级 3 名, 高二年级 4 名. 从这 7 名同学中随机选 3 名组织校文艺汇演, 则两个年级都至少有 1 名同学入选的选法种数为 ()

- A. 12 B. 30 C. 34 D. 60

【答案】B

【解析】

【分析】由题意共分两种情况: ①高一年级选 1 人, 高二年级选 2 人, ②高一年级选 2 人, 高二年级选 1 人, 由此即可求解.

【详解】由题意共分两种情况: ①高一年级选 1 人, 高二年级选 2 人, 共有 $C_3^1 C_4^2 = 18$ 种选法;

②高一年级选 2 人, 高二年级选 1 人, 共有 $C_3^2 C_4^1 = 12$ 种选法;

由分类计数原理可得共有 $18 + 12 = 30$ 种选法.

故选: B

4. 已知 F 是抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点, 点 $A\left(1, \frac{1}{4}\right)$ 在 C 上, 则 $|AF| =$ ()

- A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{5}{8}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{9}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】代入 A 点坐标求得 p , 从而得焦点坐标, 然后由焦半径公式可得结论.

【详解】由已知 $1 = 2p \times \frac{1}{4}$, $p = 2$, 所以 $|AF| = \frac{1}{4} + \frac{2}{2} = \frac{5}{4}$.

故选: C.

5. 设 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_4 = 6, S_8 = 18$, 则 $S_{16} =$ ()

- A. 48 B. 90 C. 96 D. 162

【答案】B

【解析】

【分析】分 $q = 1$ 和 $q \neq 1$, 利用等比数列前 n 项和公式列方程求解即可.

【详解】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

当 $q=1$ 时, $S_4=4a_1=6$, $S_8=8a_1=18$, 无解不合题意;

$$\text{当 } q \neq 1 \text{ 时, } \begin{cases} S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 6 \\ S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = 18 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} q^4 = 2 \\ \frac{a_1}{1-q} = -6 \end{cases},$$

$$\therefore S_{16} = \frac{a_1(1-q^{16})}{1-q} = (-6) \times (1-2^4) = 90.$$

故选: B.

6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 直线 l 经过点 $T\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 与 C 交于 A, B 两点. 若 T 是线段 AB 的中点, 则 l 的方程为 ()

A. $4x - 6y - 1 = 0$

B. $3x - 2y - 1 = 0$

C. $4x + 6y - 7 = 0$

D. $3x + 2y - 4 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】设点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 利用点差法可求得直线 l 的斜率, 利用点斜式可得出直线 l 的方程.

【详解】设点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 则 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$,

$$\text{因为 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1 \\ \frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 两式作差得 } \frac{x_1^2 - x_2^2}{4} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{3} = 0, \text{ 即 } \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2} = -\frac{3}{4},$$

$$\text{即 } \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2} k_l = -\frac{3}{4}, \text{ 所以 } k_l = -\frac{3}{2},$$

$$\text{因此直线 } l \text{ 的方程为 } y - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}(x - 1), \text{ 即 } 3x + 2y - 4 = 0.$$

故选: D.

7. 已知平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 3, BD = 4, \overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 5$, 则

$$\cos \langle \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BD} \rangle = (\quad)$$

A. $\frac{5}{12}$

B. $-\frac{5}{12}$

C. $\frac{4}{15}$

D. $-\frac{4}{15}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用向量数量积的即可求出夹角的余弦值.

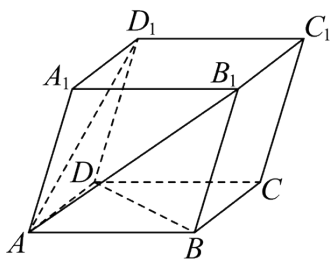
【详解】 $\overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot \overrightarrow{AD}$

$$= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{DB} = 5,$$

故 $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BD} = -5,$

所以 $\cos \langle \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BD} \rangle = \frac{\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \frac{-5}{3 \times 4} = -\frac{5}{12}.$

故选：B.



8. 已知 F 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点, 直线 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}b$ 与 C 交于 A, B 两点. 若 $\triangle ABF$ 的周长为 $7a$, 则 C 的离心率为 ()

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{6}{5}$

D. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】先求 $|AB|$ 长, 利用对称性和双曲线定义可得 $|BF| - |AF| = 2a$, 由 $\triangle ABF$ 的周长可得

$|BF| + |AF| = 4a$, 联立求得 $|BF| = 3a, |AF| = a$, 然后根据 $\triangle ABF$ 的面积构造齐次式可解.

【详解】记双曲线左焦点为 F_1 ,

将 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}b$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 解得 $x = \pm \frac{3}{2}a$, 所以 $|AB| = 3a$,

由对称性可知, $|AF_1| = |BF|$, 所以 $|BF| - |AF| = |AF_1| - |AF| = 2a$ ①,

又 $\triangle ABF$ 的周长为 $7a$, 所以 $|BF| + |AF| = 4a$ ②,

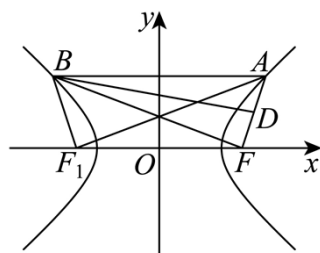
联立①②求解可得 $|BF| = 3a, |AF| = a$,

记 AF 的中点为 D , 则 $|BD| = \sqrt{(3a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}a}{2}$,

所以 $S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2}|AF||BD| = \frac{1}{2}|AB| \times \frac{\sqrt{5}b}{2}$, 即 $\frac{\sqrt{35}a^2}{2} = \frac{3\sqrt{5}ab}{2}$, 得 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{7}}{3}$,

所以 $e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{4}{3}$.

故选: A



二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列等式中, 正确的是 ()

A. $A_5^2 = A_5^3$

B. $C_5^2 = C_5^3$

C. $C_5^2 + C_5^3 = C_6^3$

D. $2A_2^2 + 3A_3^3 = A_4^4 - A_2^2$

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据排列数公式和组合数公式验证.

【详解】对于 A, $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$, $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$, A 错;

对于 B, $C_5^2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$, $C_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$, B 正确;

对于 C, $C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 = C_5^2 + C_5^3$, C 正确;

对于 D, $A_2^2 = 2 \times 1 = 2, A_3^3 = 3 \times 2 \times 1 = 6, A_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$,

$\therefore 2A_2^2 + 3A_3^3 = 2 \times 2 + 3 \times 6 = 24 - 2 = A_4^4 - A_2^2$, D 正确.

故选: BCD.

10. 已知曲线 $E: x^2 + y^2 - xy = 4$, 则 ()

A. E 关于原点对称

B. E 关于 x 轴对称

C. E 关于直线 $y = x$ 对称

D. $(2, 2)$ 为 E 的一个顶点

【答案】ACD

【解析】

【分析】用轴对称和点对称的定义逐一判断即可.

【详解】A: 用 $-x$ 和 $-y$ 替换方程中的 x 和 y , 化简后方程不变, 故曲线 E 关于原点对称, 故 A 正确;

B: 用 $-y$ 替换方程中的 y , 方程变为 $x^2 + y^2 + xy = 4$, 与原方程不同, 故 E 不关于 x 轴对称, 故 B 错误;

C: 用 y 替换方程中的 x , 同时用 x 替换方程中的 y , 方程不变, 故 E 关于直线 $y = x$ 对称, 故 C 正确;

D: 用 $-x$ 替换 y , 同时用 $-y$ 替换 x , 方程不变, 故 E 关于直线 $y = x$ 对称,

$$\text{联立} \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 4 \\ y = x \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases},$$

由顶点的定义知, $(2, 2)$ 是 E 的一个顶点, 故 D 正确.

故选: ACD.

11. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, P, Q 分别是棱 BC, C_1D_1 的中点, 则 ()

A. $B_1P \perp BQ$

B. $\vec{AP}$ 是平面 BB_1Q 的一个法向量

C. $\vec{C_1P}, \vec{BQ}, \vec{B_1D_1}$ 共面

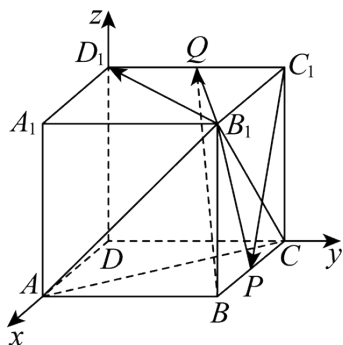
D. 点 Q 到平面 AB_1C 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】BC

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系, 利用空间向量一一判定选项即可.

【详解】



如图所示建立空间直角坐标系，易知 $B_1(2,2,2), P(1,2,0), B(2,2,0), Q(0,1,2),$

$A(2,0,0), C_1(0,2,2), D_1(0,0,2), C(0,2,0),$

对于 A 项，有 $\vec{B_1P} = (-1, 0, -2), \vec{BQ} = (-2, -1, 2)$ ，显然 $\vec{B_1P} \cdot \vec{BQ} = -2 \neq 0$ ，

即 $B_1P \perp BQ$ 不成立，故 A 错误；

对于 B 项，有 $\vec{AP} = (-1, 2, 0), \vec{BB_1} = (0, 0, 2)$ ，易得 $\vec{AP} \cdot \vec{BB_1} = 0, \vec{AP} \cdot \vec{BQ} = 0$ ，

即 $\vec{AP}$ 是平面 BB_1Q 的一个法向量，故 B 正确；

对于 C 项，有 $\vec{C_1P} = (1, 0, -2), \vec{BQ} = (-2, -1, 2), \vec{B_1D_1} = (-2, -2, 0)$ ，

易知 $\vec{C_1P} = -\vec{BQ} + \frac{1}{2}\vec{B_1D_1}$ ，所以 $\vec{C_1P}, \vec{BQ}, \vec{B_1D_1}$ 共面，故 C 正确；

对于 D 项，有 $\vec{AC} = (-2, 2, 0), \vec{AB_1} = (0, 2, 2), \vec{AQ} = (-2, 1, 2)$ ，

设平面 AB_1C 的一个法向量为 $\vec{n} = (a, b, c)$ ，则
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AC} = -2a + 2b = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AB_1} = 2c + 2b = 0 \end{cases}$$

取 $b = 1 \Rightarrow a = 1, c = -1$ ，即 $\vec{n} = (1, 1, -1)$ ，

故点 Q 到平面 AB_1C 的距离 $d = \frac{|\vec{AQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \sqrt{3}$ ，故 D 错误。

故选：BC

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1, a_4 = 55$. 在 a_1 和 a_2 之间插入 1 个数， a_2 和 a_3 之间插入 2 个数， $\dots$ ， a_n 和 a_{n+1} 之间插入 n 个数， $\dots$ ，使得构成的新数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，则 ()

A. $\{b_n\}$ 的公差为 6

B. a_2 和 a_3 之间插入的 2 个数是 19 和 25

C. $a_6 = 115$

D. $\frac{1}{a_1+5} + \frac{1}{a_2+5} + \frac{1}{a_3+5} + \dots + \frac{1}{a_n+5} < \frac{1}{3}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ，由 $a_1 = b_1 = 1, a_4 = b_{10} = 55$ 结合等差数列的通项公式可判断 A；求出 $\{b_n\}$ 的通项公式可判断 BC；找出数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的关系，由裂项相消法可判断 D。

【详解】在 a_1 和 a_2 之间插入 1 个数， a_2 和 a_3 之间插入 2 个数，

在 a_3 和 a_4 之间插入 3 个数，

所以 $a_1 = b_1 = 1, a_4 = b_{10} = 55$ ，

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ，所以 $d = \frac{b_{10} - b_1}{9} = \frac{55 - 1}{9} = 6$ ，故 A 正确；

因为 $b_n = 1 + (n-1)6 = 6n - 5$ ，

a_2 和 a_3 之间插入的 2 个数是 b_4, b_5 ， $b_4 = b_1 + 3d = 1 + 18 = 19, b_5 = b_1 + 4d = 1 + 24 = 25$ ，

故 B 正确；

由题意可得 a_6 前共插入 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5(1+5)}{2} = 15$ 个数，加上 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ ，

则 a_6 为等差数列 $\{b_n\}$ 的第 21 项，所以 $a_6 = b_{21} = 1 + 20 \times 6 = 121$ ，故 C 错误；

对于 D，因为 $a_1 = b_1, a_2 = b_3, a_3 = b_6, a_4 = b_{10}, \dots, ,$

所以 $3 = 1 + 2, 6 = 1 + 2 + 3, 10 = 1 + 2 + 3 + 4$ ，

所以数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $a_n = b_{\frac{n(1+n)}{2}} = 6 \cdot \frac{n(1+n)}{2} - 5 = 3n(1+n) - 5$ ，

$$\frac{1}{a_1+5} + \frac{1}{a_2+5} + \frac{1}{a_3+5} + \dots + \frac{1}{a_n+5}$$

$$= \frac{1}{3 \times 1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{3n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n+1} < \frac{1}{3}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选: ABD.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 直线 $l: mx + (m-1)y + 2 = 0 (m \in \mathbf{R})$ 经过的定点坐标为_____.

【答案】 $(-2, 2)$

【解析】

【分析】把方程化为关于 m 的等式, 然后由恒等式知识求解.

【详解】已知直线方程化为 $(x+y)m - y + 2 = 0$,

$$\text{由 } \begin{cases} x+y=0 \\ -y+2=0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}, \text{ 所以直线过定点 } (-2, 2).$$

故答案为: $(-2, 2)$.

14. 写出符合下列两个条件的一个双曲线的标准方程为_____.

①实轴长为 4; ②渐近线方程为 $y = \pm 2x$

【答案】 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ 或 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$

【解析】

【分析】根据题意可求出 a , 然后在根据渐近线方程求出 b , 由于题目没有告诉双曲线的焦点在 x 轴上还是 y 轴上, 所以需要分类讨论.

【详解】当双曲线焦点在 x 轴上时, 由题意可知: $2a = 4, \frac{b}{a} = 2 \Rightarrow a = 2, b = 4$, 此时双曲线标准方程为

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

当双曲线焦点在 y 轴上时, 由题意可知: $2a = 4, \frac{a}{b} = 2 \Rightarrow a = 2, b = 1$, 此时双曲线标准方程为

$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1.$$

故答案为: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ 或 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$

15. 第三届“一带一路”国际高峰论坛于 2023 年 10 月在北京召开, 某记者与参会的 5

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/088020054020007022>