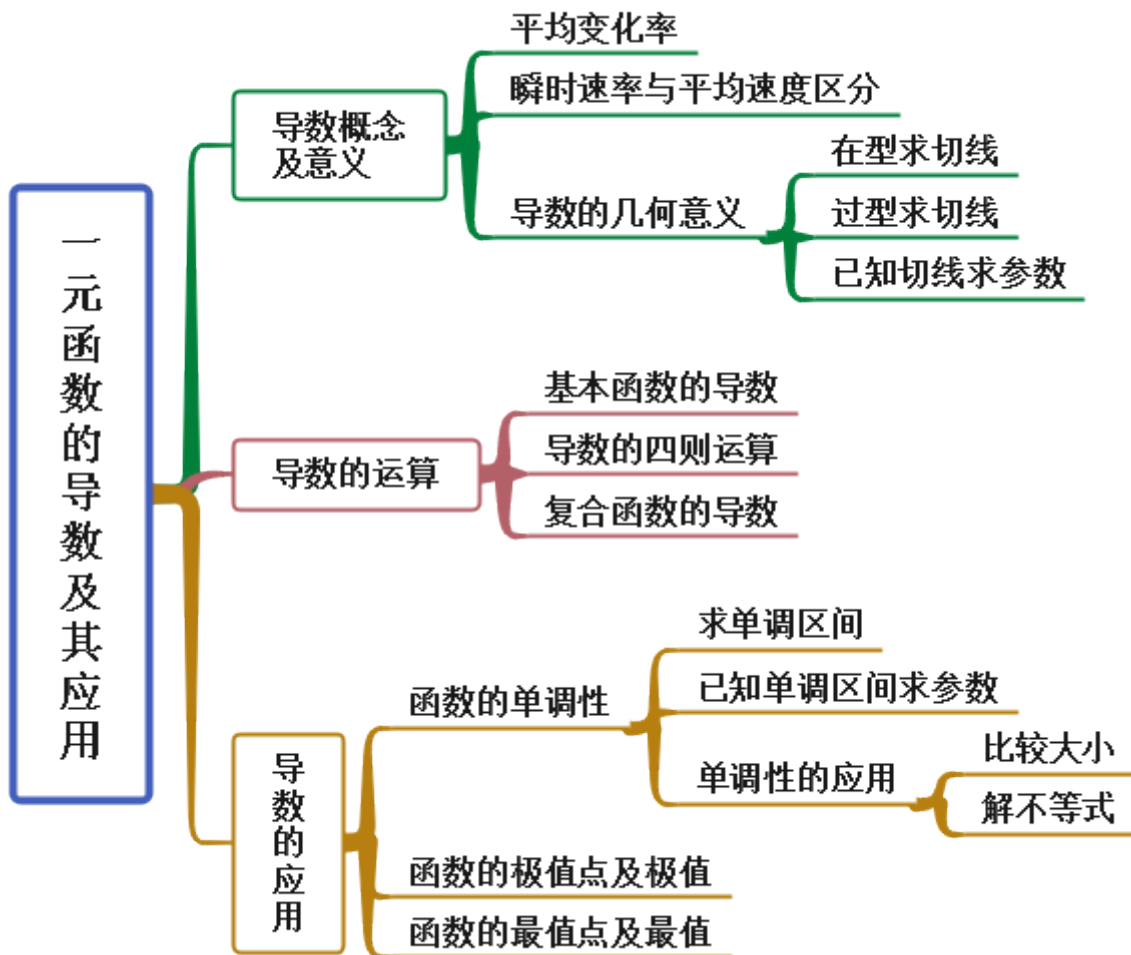
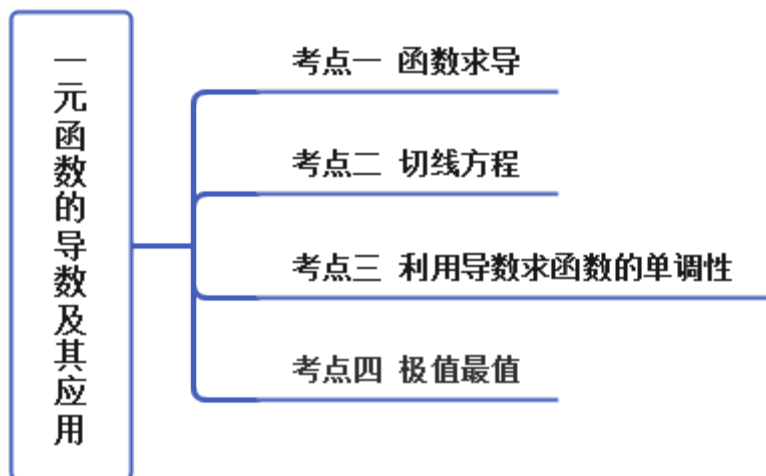


第五章 一元函数的导数及其应用 章末重难点归纳总结

思维导图



考点呈现



例题剖析

考点一 函数求导

【例 1-1】 (2022·浙江) 已知函数 $f(x)$ 可导, 且满足 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3-\Delta x) - f(3+\Delta x)}{\Delta x} = 2$, 则函数 $y = f(x)$ 在 $x = 3$ 处的导数为 ()

- A. -1 B. -2 C. 1 D. 2

【例 1-2】 (2021·全国·高二单元测试) 已知 $f(x) = x^2 + 2x \cdot f'(1)$, 则 $f'(3)$ 等于 ()

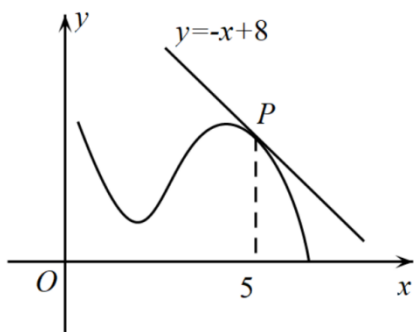
- A. -4 B. 2 C. 1 D. -2

【例 1-3】 (2022·全国·高二课时练习) 求下列函数的导数:

(1) $y = \frac{2}{\sqrt{3x+1}}$; (2) $y = (1-2x)^3$; (3) $y = \ln(2x+1)$; (4) $y = \cos \frac{x}{3}$; (5) $y = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)$; (6) $y = 2^{2x+1}$.

【一隅三反】

1. (2022·浙江) 如图, 函数 $y = f(x)$ 的图象在点 P 处的切线方程是 $y = -x + 8$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(5+\Delta x) - f(5-\Delta x)}{\Delta x} =$ ()



- A. $-\frac{1}{2}$ B. 2 C. -1 D. -2

2. (2022·天津市西青区杨柳青第一中学高二阶段练习) 求下列函数的导数

$$(1) y = 2x^4 - x^2 - x + 3;$$

$$(2) y = \frac{x^3 - 1}{\sin x};$$

$$(3) y = \cos(2x + 3) - \log_2 x;$$

$$(4) y = x \cdot e^{3x} + \ln(x^2 + x).$$

3. (2022·全国·高二课时练习) 求下列函数的导数.

$$(1) y = x \tan x;$$

$$(2) y = (x+1)(x+2)(x+3);$$

$$(3) y = \sin^4 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4};$$

$$(4) y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}};$$

$$(5) y = \ln \frac{x-1}{x+1}.$$

考点二 切线方程

【例 2-1】 (2022·陕西) 曲线 $y = ax^2 - ax + 1$ ($a \neq 0$) 在点 $(0, 1)$ 处的切线与直线 $2x + y + 1 = 0$ 垂直, 则 $a =$

()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

【例 2-2】(2022·陕西·咸阳市高新一中高二期阶段练习 (文)) 直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 是曲线 $y = \ln x$ ($x > 0$) 的一条切线, 则实数 b 等于 ()

- A. $-1 + \ln 2$ B. 1 C. $\ln 2$ D. $1 + \ln 2$

【例 2-3】(2022·浙江省常山县第一中学高二期中) 已知 $f(x) = x(x + \ln x)$, 则 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程是_____.

【例 2-4】(2022·江西南昌) 若点 P 是曲线 $y = x^2 - \ln x - 1$ 上任意一点, 则点 P 到直线 $y = x - 3$ 的最小距离为_____.

【一隅三反】

1. (2022·陕西) 已知函数 $f(x) = ax^2 + 3x - 2$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线斜率为 7, 则实数 a 的值为_____.

2. (2022·陕西) 若直线 $y = x + 1$ 和曲线 $y = a \ln x + 2$ 相切, 则实数 a 的值为_____.

3. (2022·全国·高二单元测试) (多选) 若直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ ($b \in \mathbb{R}$) 是曲线 $y = f(x)$ 的切线, 则曲线 $y = f(x)$ 的方程可以是 ()

- A. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 8$ B. $f(x) = \tan x$
C. $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ D. $f(x) = \ln \frac{1}{2x+1}$

考点三 利用导数求函数的单调性

【例 3-1】(2023·全国·专题练习) 求下列函数的单调区间.

(1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$; (2) $f(x) = x + \frac{2}{x}$

(3) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 3$; (4) $f(x) = \ln(2x+3) + x^2$.

【例 3-2】(2022·江西) 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $2xf(x) + x^2f'(x) < 0$, $f(2) = \frac{3}{4}$, 则关于 x 的不等式 $f(x) > \frac{3}{x^2}$ 的解集为 ()

- A. $(0, 4)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(4, +\infty)$ D. $(0, 2)$

【例 3-3】(2022·江西) 已知 $a = \frac{\ln \pi}{\pi}$, $b = \frac{1}{e}$, $c = \frac{\pi}{e^x}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $a < c < b$ D. $c < a < b$

【例 3-4】(广东省 2023 届高三上学期 11 月新高考学科综合素养评价数学试题) 若函数 $f(x) = (a + x^2)e^x$ 在 \mathbb{R} 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是_____.

【一隅三反】

1. (2022·陕西渭南) 已知函数 $f(x) = \sin x + \cos x - 2x$, $a = f(-\pi)$, $b = f(2^e)$, $c = f(\ln 2)$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()
- A. $a > c > b$ B. $a > b > c$ C. $b > a > c$ D. $c > b > a$
2. (2022·全国·单元测试) 已知函数 $f(x) = e^x + e^{-x} + \cos x$, 则不等式 $f(2m) > f(m-2)$ 的解集为 _____.
3. (2022·陕西·西安中学高二期中) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 的奇函数, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $xf'(x) < f(x)$, 则不等式 $5f(2-x) + (x-2)f(5) < 0$ 的解集为 _____.
4. (2022·辽宁·沈阳市第一二〇中学高三期中) 已知函数 $f(x) = x + \sin x$, 则不等式 $f(\ln x) + f(1-x) \geq 0$ 的解集为 _____.

考点四 极值最值

【例 4-1】(2022·河南) 函数 $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x$ 的极小值为 ()

- A. $-\frac{4}{3}$ B. 1 C. $-\frac{5}{2}$ D. $\frac{104}{27}$

【例 4-2】(江西省西路片七校 2023 届高三上学期第一次联考数学(文)试题) 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{a}{2}x^2 - 4ax$

在 $x \in (-3, +\infty)$ 上有最小值, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(e^{-3}, +\infty)$ B. $(e^{-3}, 1)$ C. $(0, e^{-3})$ D. $(-\infty, e^{-3})$

【一隅三反】

1. (2022·全国·高二课时练习) 已知函数 $f(x) = x^3 + 3mx^2 + nx + m^2$ 在 $x = -1$ 处取得极值 0, 则 $m + n =$ _____.

2. (2022·全国·高二单元测试) 若函数 $y = 2x + a \ln x$ 在区间 $(1, 2)$ 上有极值点, 则实数 a 的取值范围为 _____.

3. (2022·上海市建平中学高三阶段练习) 已知函数 $f(x) = ax + \ln x$ 在 $x = 2$ 处取得极值, 则实数 $a =$ _____.

4. (2022·浙江·杭州四中高二期中) 已知函数 $f(x) = e^x(ax^2 - x + 1)$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线的方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极大值, 求 a 的取值范围.

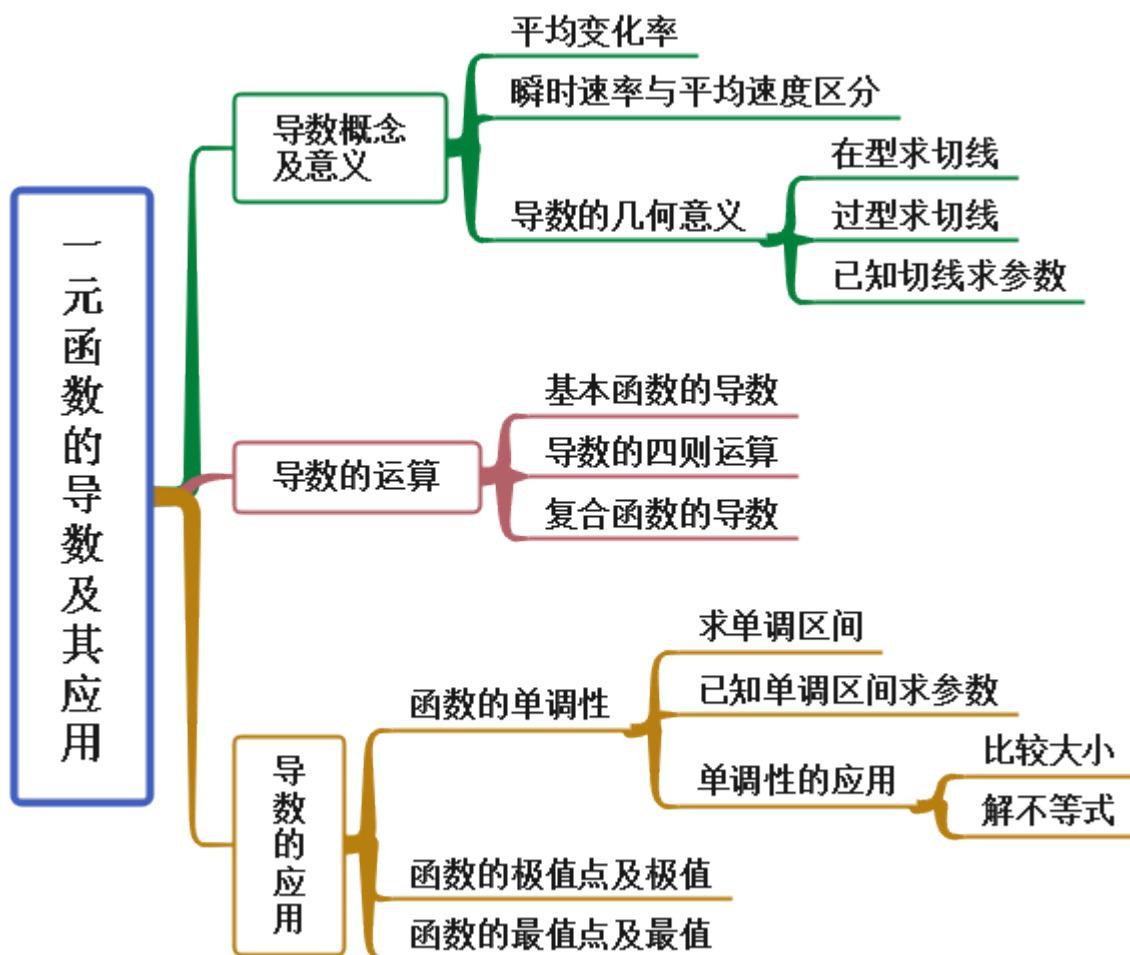
5. (2022·宁夏) 已知函数 $f(x) = a \ln x - x + 1$

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处有极值, 求实数 a 的值和极值;

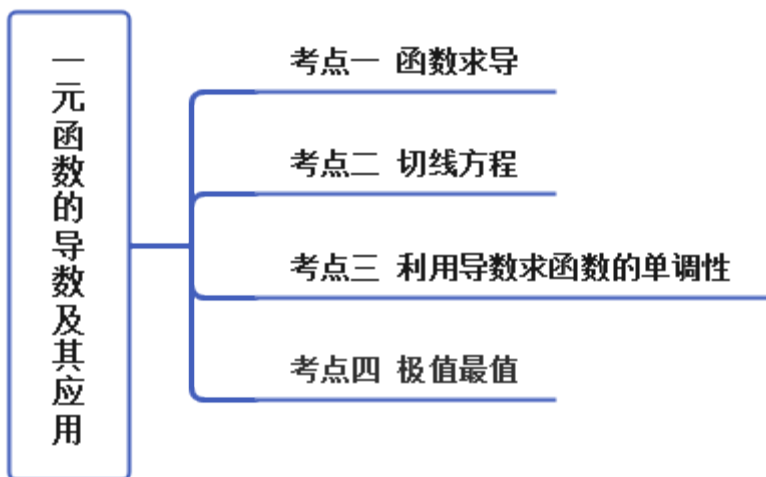
(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

第五章 一元函数的导数及其应用 章末重难点归纳总结

思维导图



考点呈现



例题剖析

考点一 函数求导

【例 1-1】 (2022·浙江) 已知函数 $f(x)$ 可导, 且满足 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3-\Delta x) - f(3+\Delta x)}{\Delta x} = 2$, 则函数

$y = f(x)$ 在 $x = 3$ 处的导数为 ()

- A. -1 B. -2 C. 1 D. 2

答案: A

【解析】 因为 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3-\Delta x) - f(3+\Delta x)}{\Delta x} = -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3-\Delta x) - f(3+\Delta x)}{-2\Delta x} = -2f'(3) = 2$,

所以 $f'(3) = -1$, 故选: A.

【例 1-2】 (2021·全国·高二单元测试) 已知 $f(x) = x^2 + 2x \cdot f'(1)$, 则 $f'(3)$ 等于 ()

- A. -4 B. 2 C. 1 D. -2

答案: B

【解析】 $f'(x) = 2x + 2f'(1)$, 令 $x = 1$ 得: $f'(1) = 2 + 2f'(1)$, 解得: $f'(1) = -2$,

所以 $f'(x) = 2x - 4$, $f'(3) = 6 - 4 = 2$ 故选: B

【例 1-3】 (2022·全国·高二课时练习) 求下列函数的导数:

(1) $y = \frac{2}{\sqrt{3x+1}}$; (2) $y = (1-2x)^3$; (3) $y = \ln(2x+1)$; (4) $y = \cos \frac{x}{3}$; (5) $y = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)$; (6)

$y = 2^{2x+1}$.

答案: (1) $-3(3x+1)^{-\frac{3}{2}}$ (2) $-6(1-2x)^2$ (3) $\frac{2}{2x+1}$ (4) $-\frac{1}{3}\sin \frac{x}{3}$ (5) $3\sin 3x$ (6) $2^{2x+2} \cdot \ln 2$

【解析】 (1) 函数 $y = \frac{2}{\sqrt{3x+1}}$ 可以看作函数 $y = \frac{2}{\sqrt{u}}$ 和 $u = 3x+1$ 的复合函数,

$$\therefore y'_x = y'_u \cdot u'_x = \left(\frac{2}{\sqrt{u}}\right)' \cdot (3x+1)' = \left(2u^{-\frac{1}{2}}\right)' \cdot 3 = -3u^{-\frac{3}{2}} = -3(3x+1)^{-\frac{3}{2}}.$$

(2) 函数 $y = (1-2x)^3$ 可以看作函数 $y = u^3$ 和 $u = 1-2x$ 的复合函数,

$$\therefore y'_x = y'_u \cdot u'_x = (u^3)' \cdot (1-2x)' = -6u^2 = -6(1-2x)^2.$$

(3) 函数 $y = \ln(2x+1)$ 可以看作函数 $y = \ln u$ 和 $u = 2x+1$ 的复合函数,

$$\therefore y'_x = y'_u \cdot u'_x = (\ln u)' \cdot (2x+1)' = \frac{1}{u} = \frac{1}{2x+1}.$$

(4) 函数 $y = \cos \frac{x}{3}$ 可以看作函数 $y = \cos u$ 和 $u = \frac{x}{3}$ 的复合函数,

$$\therefore y'_x = y'_u \cdot u'_x = (\cos u)' \cdot \left(\frac{x}{3}\right)' = -\frac{1}{3} \sin u = -\frac{1}{3} \sin \frac{x}{3}.$$

(5) 函数 $y = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)$ 可以看作函数 $y = \sin u$ 和 $u = \frac{3\pi}{2} - 3x$ 的复合函数,

$$\therefore y'_x = y'_u \cdot u'_x = (\sin u)' \cdot \left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)' = -3 \cos u = -3 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right) = 3 \sin 3x.$$

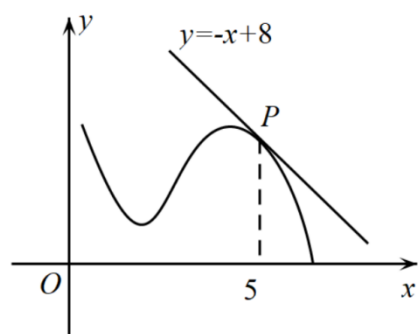
(6) 函数 $y = 2^{2x+1}$ 可以看作函数 $y = 2^u$ 和 $u = 2x+1$ 的复合函数,

$$\therefore y'_x = y'_u \cdot u'_x = (2^u)' \cdot (2x+1)' = 2 \cdot 2^u \cdot \ln 2 = 2 \cdot 2^{2x+1} \cdot \ln 2 = 2^{2x+2} \cdot \ln 2.$$

【一隅三反】

1. (2022·浙江) 如图, 函数 $y = f(x)$ 的图象在点 P 处的切线方程是 $y = -x + 8$, 则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(5+\Delta x) - f(5-\Delta x)}{\Delta x} = (\quad)$$



- A. $-\frac{1}{2}$ B. 2 C. -1 D. -2

答案: D

【解析】依题意可知切点 $P(5,3)$,

Q 函数 $y = f(x)$ 的图象在点 P 处的切线方程是 $y = -x + 8$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/088036076044006073>