

专题 29 解直角三角形模型之新定义模型

解直角三角形的新定义模型，是体现选拔功能的试题中对初高中知识衔接的考查。高中数学为这类试题的命制提供了广阔的空间背景，命题者将高中数学的一些概念、定理、法则、公式等初中化（用初中数学知识内容包装、初中试题命制技术设置）处理，命制出具有高中数学背景味道的试题。这类试题往往对学生思维能力和创新能力要求较高，能有效检验学生是否具备进入高中学习的潜能，所以平时教学挖掘这方面解题技能及功效尤为重要。恰当地构建模型可以拓宽解题思路，优化解题过程，丰富解题内涵。

目录导航

模型 1.新定义模型	1
习题练模型	16

模型 1.新定义模型

模型解读

新定义模型主要包含高中数学中的三角函数和解三角形的相关公式定理（如：正弦定理、余弦定理、面积公式、同角三角函数基本关系、和、差、二倍角公式等），而这些大部分定理（公式）也可利用初中数学知识证明。

若无特殊说明，一般认为 $\triangle ABC$ 的3个角 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ ，分别对应边 a 、 b 、 c ；

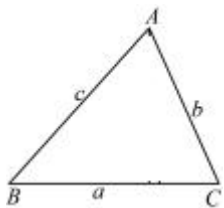


图 1

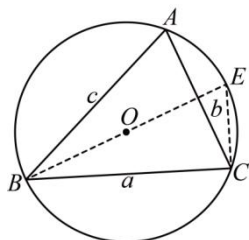


图 2

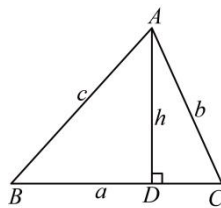


图 3

1) 正弦定理: 如图 1, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (其中 R 是三角形外接圆的半径)。

证明: 作 $\triangle ABC$ 的外接圆, 记圆心为 O , 作直径 BE , 连接 CE , 如图 2,

则 $\angle BCE = 90^\circ$, $\angle E = \angle A$, $\therefore \sin \angle BAC = \sin \angle BEC = \frac{BC}{BE} = \frac{a}{2R}$, $\therefore \frac{a}{\sin \angle BAC} = 2R$,

同理, $\frac{b}{\sin \angle ABC} = 2R$, $\frac{c}{\sin \angle ACB} = 2R$, $\therefore \frac{a}{\sin \angle BAC} = \frac{b}{\sin \angle ABC} = \frac{c}{\sin \angle ACB} = 2R$;

2) 正弦面积公式: 如图 1, $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B$.

证明: 如图 3, 过点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足为 D ,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\sin \angle ABC = \frac{AD}{c}$, $\therefore AD = c \cdot \sin \angle ABC$, $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot AD = \frac{1}{2}ac \cdot \sin \angle ABC$,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\sin \angle ACB = \frac{AD}{b}$, $\therefore AD = b \cdot \sin \angle ACB$. $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot AD = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \angle ACB$.

同理可得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \angle BAC$. 因此有 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \angle ACB = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \angle BAC$.

3) 余弦定理: 如图 2, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

证明: 如图 3, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的对边分别是 a , b , c 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 H ,

则 $\cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{c}$, 即 $BD = c \cdot \cos B$, 于是 $DC = a - c \cdot \cos B$.

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AD^2 = AB^2 - BD^2$, 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $AD^2 = AC^2 - DC^2$,

$\therefore c^2 - c^2 \cos^2 B = b^2 - (a - c \cdot \cos B)^2$, 整理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ 。

同理: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 。

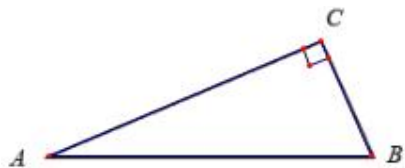


图 4

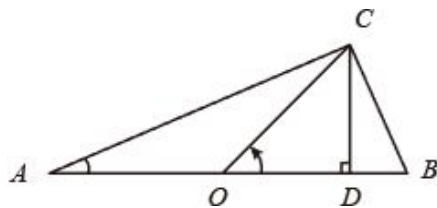


图 5

4) 同角三角函数的基本关系式: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 。

证明: 如图 4, 设 $\angle A = \alpha$, $\therefore$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\therefore a^2 + b^2 = c^2$ 。

又 $\therefore \sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\tan\alpha = \frac{a}{b}$, $\therefore \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$; $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan\alpha$ 。

5) 和 (差)、二倍角公式 (只作部分公式证明):

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta; \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad (\text{已证}) .$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta; \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha .$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \quad \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \quad (\text{已证}) .$$

证明: 如图 4, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 设 $\angle A = \alpha$ 。

如图 5, 取 AB 的中点 O , 连接 OC , 即: $OC = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}c$, 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D , 则 $\angle COB = 2\alpha$,

利用锐角三角函数在 $Rt\triangle ABC$ 中表示 $AC = AB \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos\alpha$, $BC = AB \cdot \sin\alpha = c \cdot \sin\alpha$ 。

$$\therefore \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CD \quad (\text{等面积}), \text{ 即 } CD = c \cdot \sin\alpha \cos\alpha; \quad \therefore \sin 2\alpha = \frac{CD}{OC} = \frac{c \cdot \sin\alpha \cos\alpha}{\frac{1}{2}c} = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

在 $Rt\triangle CBD$ 中, $BD = BC \sin\alpha = c \cdot \sin^2\alpha$, 则 $OD = OC - BD = \frac{1}{2}c - c \cdot \sin^2\alpha$ 。

$$\therefore \tan 2\alpha = \frac{CD}{OD} = \frac{\frac{1}{2} \cos\alpha \sin\alpha}{\frac{1}{2}c - c \cdot \sin^2\alpha} = \frac{2\cos\alpha \sin\alpha}{1 - 2\sin^2\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

模型运用

例 1. (2024·山西大同·三模) 阅读与思考

阅读下列材料, 并解决后面的问题.

在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的对边分别是 a , b , c , 过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E (如图 1), 则 $\sin B = \frac{CE}{a}$,

$\sin A = \frac{CE}{b}$, 即 $CE = a \sin B$, $CE = b \sin A$, 于是 $a \sin B = b \sin A$, 即 $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$. 同理有 $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$,

$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$, 所以 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. 即: 在一个锐角三角形中, 各边和它所对角的正弦的比相等.

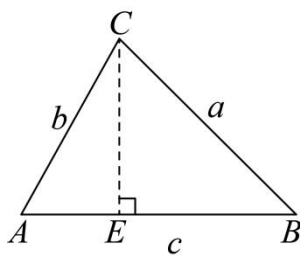


图1

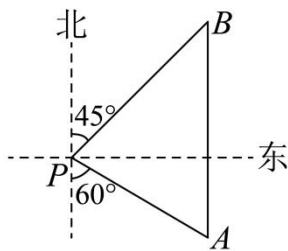


图2

运用上述结论和有关定理，在锐角三角形中，已知三个元素（至少有一条边），就可以求出其余三个未知元素．根据上述材料，完成下列各题：(1)如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle C = 45^\circ$ ， $BC = 30$ ，则 $AB =$ _____；

(2)如图 2，一艘轮船位于灯塔 P 的南偏东 60° 方向，距离灯塔 50 海里的 A 处，它沿正北方向航行一段时间后，到达位于灯塔北偏东 45° 方向上的 B 处，此时 B 处与灯塔的距离为_____海里；（结果保留根号）

(3)在（2）的条件下，试求 75° 的正弦值．（结果保留根号）

【答案】 (1) $10\sqrt{6}$ ；(2) $25\sqrt{6}$ ；(3) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用-方向角问题，正弦定理，正确的理解正弦定理是解题的关键．

（1）由题意根据正弦定理即可得到结论；（2）由题意得到 $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，根据正弦定理即可得到结论；（3）先求出 $\angle APB = 75^\circ$ 以及 AB 的长，根据正弦定理即可得到结论．

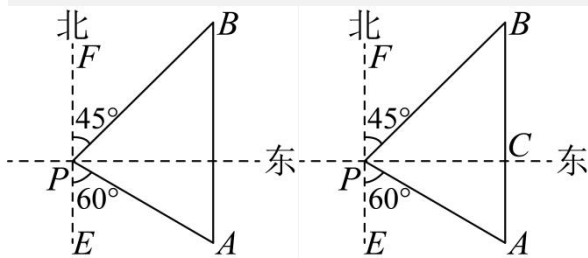
【详解】（1）解：由题意可知： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ，

$\because \angle A = 60^\circ$ ， $\angle C = 45^\circ$ ， $BC = 30$ ， $\therefore \frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ}$ ，即 $\frac{30}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ， $\therefore AB = 10\sqrt{6}$ ，故答案为： $10\sqrt{6}$ ．

（2）解：如图：由题意可知， $\angle APE = 60^\circ$ ， $\angle BPF = 45^\circ$ ， $AB \parallel EF$ ， $AP = 50$ 海里， $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ，

$\therefore \angle A = \angle APE = 60^\circ$ ， $\angle B = \angle BPF = 45^\circ$ ， $\therefore \frac{BP}{\sin 60^\circ} = \frac{AP}{\sin 45^\circ}$ ，即 $\frac{BP}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{50}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ，

$\therefore BP = 25\sqrt{6}$ ， $\therefore B$ 处与灯塔的距离为 $25\sqrt{6}$ 海里，故答案为： $25\sqrt{6}$ ．



（3）解：如图：由题可知， $PA = 50$ 海里， $PC \perp AB$ ， $\therefore \angle EPC = \angle FPC = 90^\circ$ ，

$\because \angle APE = 60^\circ$ ， $\angle BPF = 45^\circ$ ， $\therefore \angle APC = 30^\circ$ ， $\angle BPC = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle APB = \angle APC + \angle BPC = 75^\circ$ ，在 $\text{Rt}\triangle APC$ 中， $AC = \frac{1}{2}PA = 25$ 海里， $PC = \frac{\sqrt{3}}{2}PA = 25\sqrt{3}$ 海里，

在 $\text{Rt}\triangle BPC$ 中， $BC = PC = 25\sqrt{3}$ 海里， $\therefore AB = AC + BC = (25 + 25\sqrt{3})$ 海里，

由前面定理可知： $\frac{AB}{\sin \angle APB} = \frac{PA}{\sin \angle B}$ ，则 $\frac{25 + 25\sqrt{3}}{\sin 75^\circ} = \frac{50}{\sin 45^\circ}$ ，

$\therefore \sin 75^\circ = \frac{25 + 25\sqrt{3}}{50} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ ， $\therefore 75^\circ$ 的正弦值 $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ 。

例 2. (2024·湖南衡阳·模拟预测)【材料阅读】如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，设 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别为 a, b, c ，

过点 A 作 $AD \perp BC$ ，垂足为 D ，会有 $\sin \angle C = \frac{AD}{AC}$ ，则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \times AD = \frac{1}{2}BC \times AC \sin \angle C = \frac{1}{2}ab \sin \angle C$ ，

即 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin \angle C$ ，同理 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \angle A$ ， $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin \angle B$ 。有以上三式可得：

正弦定理： $\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}$ ，通过推理还可以得到另一个表达三角形边角关系的定理-**余弦定理**

如图 2，在 $\triangle ABC$ 中，设 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别为 a, b, c ，则① $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\angle A$

② $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\angle B$ ③ $c^2 = b^2 + a^2 - 2bacos\angle C$ 用以上的公式和定理解决问题：

【简单应用】(1) 在锐角 $\triangle ABC$ 中，设 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别为 a, b, c ，且 $2c \cdot \sin \angle A = \sqrt{2}a$ ，求 $\angle C$ ；

(2) 如图 3，在 $\triangle DEF$ 中， $\angle F = 60^\circ$ ， $EF = 3$ ， $DF = 8$ ，求 $\triangle DEF$ 的面积与周长。

【灵活应用】(3) 如图 4，在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $\angle A = 60^\circ$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ，

设 M 为 BC 的中点，且 $AM = \sqrt{2}$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。(参考数据： $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$)

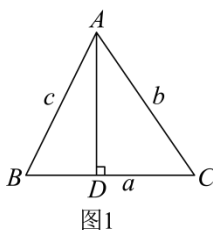


图1

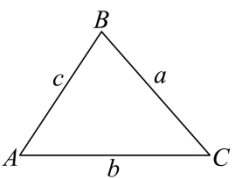


图2

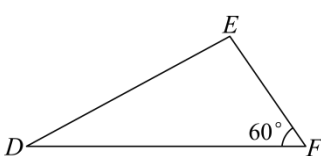


图3

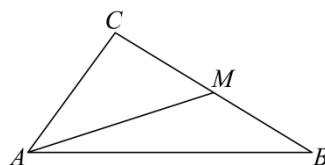


图4

【答案】(1) $\angle C = 45^\circ$ ；(2) $\triangle DEF$ 的面积为 $6\sqrt{3}$ ，周长为 18；(3) $\sqrt{11} + \sqrt{2}$

【分析】本题考查三角形的性质、锐角三角函数，理解题中新定义并灵活运用是解答的关键。

(1) 利用题意正弦定理得到 $\sin \angle A = \frac{a \cdot \sin \angle C}{c}$ ，进而得到 $\sin \angle C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，利用特殊角的三角函数值可求解；

(2) 根据题中面积公式和余弦定理求解即可；

(3) 延长 AM ，使得 $MD = AM$ ，连接 CD ，证明 $\triangle CMD \cong \triangle BMA$ (SAS) 得到 $\angle D = \angle BAM$ ， $CD = AB$ ，则 $CD \parallel AB$ ，进而得到 $\angle ACD = 180^\circ - \angle BAC = 120^\circ$ ， $\angle ACD = 180^\circ - \angle BAC = 120^\circ$ ，利用题中正弦定理和余弦定理求得 $AC \cdot AB = 3$ ， $AC^2 + AB^2 = 5$ ， $BC = \sqrt{2}$ ，进而求得 $AC + AB = \sqrt{11}$ ，即可求解。

【详解】解：(1) $\because \frac{a}{\sin \angle A} = \frac{c}{\sin \angle C}$, $\therefore \sin \angle A = \frac{a \cdot \sin \angle C}{c}$,

$\therefore 2c \cdot \sin \angle A = \sqrt{2}a$, $\therefore 2c \cdot \frac{a \cdot \sin \angle C}{c} = \sqrt{2}a$, 即 $\sin \angle C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore \angle C = 45^\circ$;

(2) $\because$ 在 $\triangle DEF$ 中, $\angle F = 60^\circ$, $EF = 3$, $DF = 8$, $\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} EF \cdot DF \cdot \sin \angle F = \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$,

$DE^2 = EF^2 + DF^2 - 2EF \cdot DF \cdot \cos \angle F = 3^2 + 8^2 - 2 \times 3 \times 8 \times \frac{1}{2} = 49$, $\therefore DE = 7$ (负值舍去),

$\therefore$ 周长 $C_{\triangle DEF} = EF + DF + DE = 3 + 8 + 7 = 18$;

(3) $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$,

$\therefore \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, 则 $AC \cdot AB = 3$, 延长 AM , 使得 $MD = AM$, 连接 CD ,

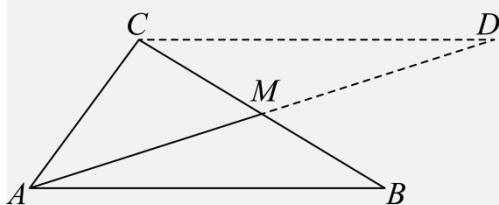


图4

$\because M$ 为 BC 的中点, $\therefore CM = BM$, 又 $\angle CMD = \angle BMA$, $\therefore \triangle CMD \cong \triangle BMA$ (SAS),

$\therefore \angle D = \angle BAM$, $CD = AB$, $\therefore CD \parallel AB$, 则 $\angle ACD = 180^\circ - \angle BAC = 120^\circ$,

在 $\triangle ACD$ 中, $AD = 2AM = 2\sqrt{2}$, $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos \angle ACD$,

$\therefore (2\sqrt{2})^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$, 则 $AC^2 + AB^2 = 5$,

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中, $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \angle BAC = 5 - 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 2$, $\therefore BC = \sqrt{2}$ (负值舍去),

$\therefore (AC + AB)^2 = AC^2 + AB^2 + 2AC \cdot AB = 11$, $\therefore AC + AB = \sqrt{11}$ (负值舍去),

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $AC + AB + BC = \sqrt{11} + \sqrt{2}$.

例 3. (2024·广东·二模) 问题提出: 已知任意三角形的两边及夹角, 求三角形的面积.

问题探究: 为了解决上述问题, 我们先由特殊到一般来进行探究.

探究一: 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = b$, $BC = a$, $\angle C = \angle \alpha$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $\therefore \sin \alpha = \frac{AB}{AC}$ $\therefore AB = b \cdot \sin \alpha$. $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AB = \frac{1}{2} a \cdot b \sin \alpha$.

探究二: 如图 2, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = b$, $BC = a$, $\angle B = \angle \alpha$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 (用含 a 、 b 、 α 代数式表示), 写出探究过程.

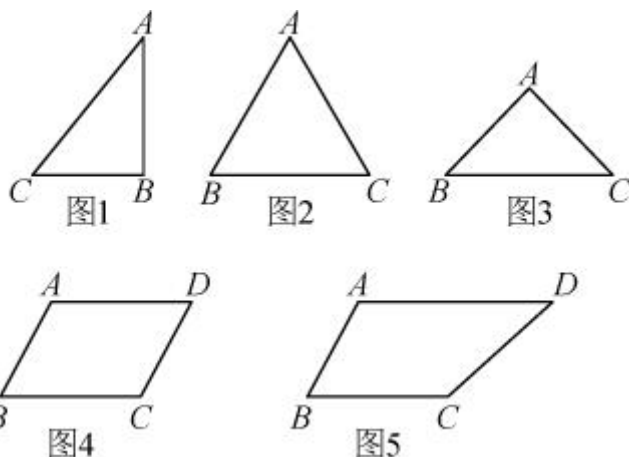
探究三: 如图 3, $\triangle ABC$ 中, $AB = b$, $BC = a$, $\angle B = \angle \alpha$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 (用 a 、 b 、 α 表示) 写出探究

过程.

问题解决：已知任意三角形的两边及夹角，求三角形的面积方法是：_____（用文字叙述）.

问题应用：如图 4，已知平行四边形 $ABCD$ 中， $AB=b$ ， $BC=a$ ， $\angle B=\alpha$ ，求平行四边形 $ABCD$ 的面积（用 a 、 b 、 α 表示）写出解题过程.

问题拓广：如图 5 所示，利用你所探究的结论直接写出任意四边形的面积（用 a 、 b 、 c 、 d 、 α 、 β 表示），其中 $AB=b$ ， $BC=c$ ， $CD=d$ ， $AD=a$ ， $\angle A=\alpha$ ， $\angle C=\beta$.



【答案】 $\frac{1}{2}ab \sin \alpha$ ，见解析； $\frac{1}{2}ab \sin \alpha$ ，见解析；一个三角形两边及其夹角的正弦值的积的一半； $ab \sin \alpha$ ；

$$S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2}cd \cdot \sin \beta$$

【分析】探究二：如图 2 中，作 $AH \perp CB$ 于 H ，求出高 AH ，即可解决问题；

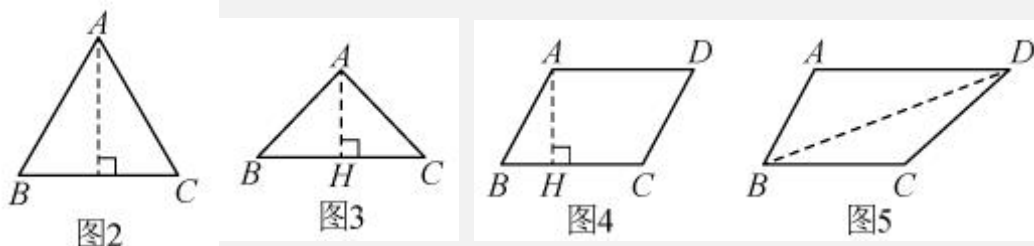
探究三：如图 3 中，作 $AH \perp CB$ 于 H ，求出高 AH ，即可解决问题；

问题解决： $S = \frac{1}{2}ab \sin \angle C$ （ $\angle C$ ）是 a 、 b 两边的夹角）；

问题应用：如图 4 中，作 $AH \perp CB$ 于 H ，求出高 AH ，即可解决问题；

问题拓广：如图 5，连接 BD ，由探究三的结论可得出答案.

【详解】解：探究二：如图 2 中，作 $AH \perp CB$ 于 H ， $\because AB=AC=b$ ， $BC=a$ ， $\angle B=\angle \alpha$ ， $\therefore \angle B=\angle C=\alpha$ ，在 $Rt\triangle AHC$ 中， $\angle AHC=90^\circ$ ， $\therefore \sin \alpha = \frac{AH}{AC}$ ， $\therefore AH=b \cdot \sin \alpha$ ， $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$.



探究三：如图 3 中，作 $AH \perp CB$ 于 H .

在 $Rt\triangle AHC$ 中, $\angle AHC = 90^\circ \therefore \sin \alpha = \frac{AH}{AC}$, $\therefore AH = b \cdot \sin \alpha \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$.

问题解决: 一个三角形两边及其夹角的正弦值的积的一半.

故答案为: 一个三角形两边及其夹角的正弦值的积的一半.

问题应用: 如图 4 中, 作 $AH \perp CB$ 于 H .

在 $Rt\triangle AHB$ 中, $\angle AHB = 90^\circ \therefore \sin \alpha = \frac{AH}{AB}$, $\therefore AH = b \cdot \sin \alpha \therefore S_{\text{平行四边形}ABCD} = BC \cdot AH = ab \sin \alpha$.

问题拓广: 连接 BD , 由探究三的结论可得: $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times AB \times AD \times \sin \alpha = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$.

$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times BC \times CD = \frac{1}{2} cd \cdot \sin \beta$. $\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} cd \cdot \sin \beta$.

【点睛】本题考查四边形综合题、三角形的面积、平行四边形的面积, 锐角三角函数知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造直角三角形解决问题.

例 4. (2023·云南昆明·二模) 【问题引入】古希腊几何学家海伦和我国南宋数学家秦九韶都曾提出利用三角形的三边求面积的公式, 称为海伦-秦九韶公式, 如果一个三角形的三边长分别是 a, b, c , 记 $p = \frac{a+b+c}{2}$, 那么三角形的面积为: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对的边长分别为 a, b, c , 若 $a=3, b=4, c=5$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 6;

【问题探索】如图一, 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $BC=a, AC=b, AB=c, p = \frac{a+b+c}{2}$, $\odot M$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, $e N$ 分别与 AC 的延长线、 AB 的延长线以及线段 BC 均只有一个公共点, $\odot M$ 的半径为 m , $e N$ 的半径为 n .

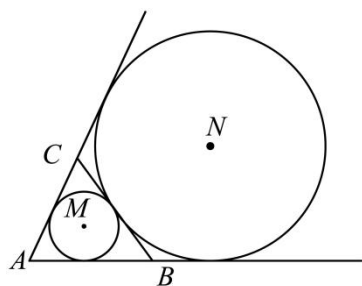


图1

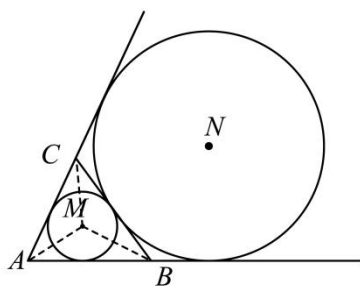


图2

(1) 分析与证明: 如图二, 连接 MA, MB, MC , 则 $\triangle ABC$ 被划分为三个小三角形, 用 S 表示 $\triangle ABC$ 的面积, 即 $S = S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MCA} + S_{\triangle MAB}$. 那么 $S = p \cdot m$ 是否成立? 请证明你的结论.

(2) 理解与应用: 当 $\angle A = 60^\circ, m=2, n=6$ 时, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】(1) 见解析; (2) $12\sqrt{3}$.

【分析】(1) 根据题意得到 $S_{\triangle MBC}, S_{\triangle MCA}, S_{\triangle MAB}$, 再结合材料给出的面积公式即可解答;

(2) 根据角平分线的判定得到 AN 是 $\angle BAC$ 的角平分线, 再利用锐角三角函数得到 $AH + AK = 4\sqrt{3}$, 最后

根据切线长定理得到 $AB + BC + AC = AH + AK = 4\sqrt{3}$ 即可解答.

【详解】(1) 解: $S = p \cdot m$ 成立, 理由如下: $\because S_{\triangle MBC} = \frac{1}{2}am, S_{\triangle MCA} = \frac{1}{2}bm, S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2}cm,$

$$\therefore S = S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MCA} + S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2}am + \frac{1}{2}bm + \frac{1}{2}cm = \frac{a+b+c}{2}n, \because p = \frac{a+b+c}{2}, \therefore S = p \cdot m.$$

(2) 解: 连接 AN , 连接 NH 、 NK ,

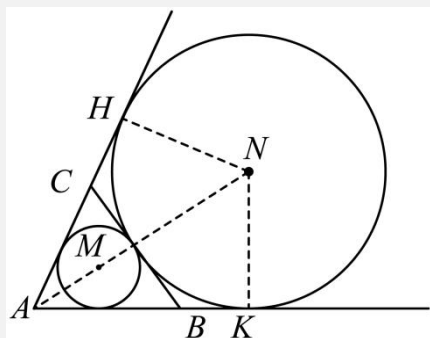
$\because AH$ 与 $\odot N$ 相切于点 H , NK 与 $\odot M$ 相切于点 K , $\therefore NH \perp AH, AK \perp NK, \therefore AN$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线,

$\because \angle BAC = 60^\circ, \therefore \angle HAN = 30^\circ, \therefore NH = 6,$

$$\therefore AH = \frac{NH}{\tan \angle HAN} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 6 \times \frac{3}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}, \quad AK = \frac{NH}{\tan \angle NAK} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 6\sqrt{3},$$

$$\therefore AB + BC + AC = AH + AK = 12\sqrt{3}, \therefore \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3},$$

$\because \odot M$ 的半径为 2, $\therefore S_{\triangle ABC} = 2 \times 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$



【点睛】本题考查了角平分线的判定, 角平分线的定义, 锐角三角函数, 切线长定理, 掌握锐角三角函数是解题的关键.

例 5. (2024·山东济宁·一模) 关于三角函数有如下的公式:

$$\textcircled{1} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \quad \textcircled{2} \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

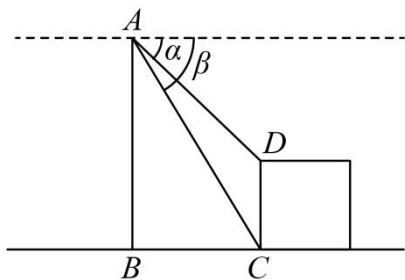
$$\textcircled{3} \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} (1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta \neq 0).$$

利用这些公式可以将一些不是特殊角的三角函数转化为特殊角的三角函数来求值, 如 $\tan 105^\circ = \tan(45^\circ + 60^\circ)$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 60^\circ} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - 1 \times \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -(2 + \sqrt{3}).$$

根据上面的知识, 你可以选择适当的公式解决下面的实际问题:

(1) 求 $\cos 75^\circ$ 的值; (2) 如图, 直升机在一建筑物 CD 上方的点 A 处测得建筑物顶端点 D 的俯角 α 为 60° , 底端点 C 的俯角 β 为 75° , 此时直升机与建筑物 CD 的水平距离 BC 为 $42m$, 求建筑物 CD 的高.



【答案】(1) $\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$; (2) 建筑物 CD 的高为 84 米.

【分析】(1) 根据 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ 可求 $\cos 75^\circ$ 的值;

(2) 先求出俯角 β 的正切值, 进而根据 BC 求得 AB , 再求出俯角 α 的正切值, 进而根据 BC 求得 A 、 D 两点垂直距离, 最后 CD 的长即可求得.

【详解】解: (1) $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$;

(2) $\because \beta = 75^\circ, BC = 42$ 米,

$$\therefore AB = BC \cdot \tan \beta = 42 \tan 75^\circ = 42 \times \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = 42 \times \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 42(\sqrt{3} + 2) \text{ 米},$$

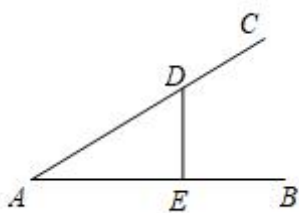
$\because \alpha = 60^\circ, BC = 42$ 米 $\therefore A$ 、 D 垂直距离为 $BC \cdot \tan \alpha = 42\sqrt{3}$ 米,

$\therefore CD = AB - 42\sqrt{3} = 84$ 米. 答: 建筑物 CD 的高为 84 米.

【点睛】本题是阅读材料题, 考查了特殊的锐角三角函数值, 解题关键是将不特殊三角函数转化为特殊三角函数并结合图像解直角三角形.

例 6. (2024·重庆·校考一模) 材料一: 证明: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

证明: 如图, 作 $\angle BAC = \angle \alpha$, 在射线 AC 上任意取一点 D (异于点 A), 过点 D 作 $DE \perp AB$, 垂足为 E .



$$\because DE \perp AB \text{ 于点 } E \therefore \sin \angle BAC = \frac{DE}{AD}, \cos \angle BAC = \frac{AE}{AD} \therefore \sin^2 \angle BAC = \frac{DE^2}{AD^2}, \cos^2 \angle BAC = \frac{AE^2}{AD^2}$$

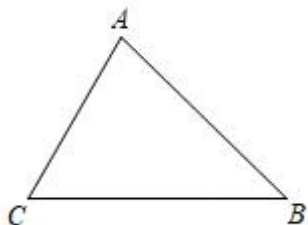
$$\because \text{在 } Rt\triangle ADE \text{ 中, } DE^2 + AE^2 = AD^2 \therefore \sin^2 \angle BAC + \cos^2 \angle BAC = \frac{DE^2}{AD^2} + \frac{AE^2}{AD^2} = \frac{DE^2 + AE^2}{AD^2} = \frac{AD^2}{AD^2} =$$

$$\because \angle BAC = \angle \alpha \therefore \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

材料二: 学习了三角函数之后, 我们知道, 在直角三角形中, 知道了一个直角三角形的两条边的长或知道

直角三角形的一条边的长及其一个锐角的度数，我们可以求出这个直角三角形其它边的长度和其它角的度数；由“SAS”定理可知，如果一个三角形的两条边的长度及其这两条边的夹角的度数知道了，那么这个三角形的第三条边一定可以求出来.

应用以上材料，完成下列问题：(1)如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC=4$ ， $BC=6$ ， $\angle C=60^\circ$ ，求 AB 的长.



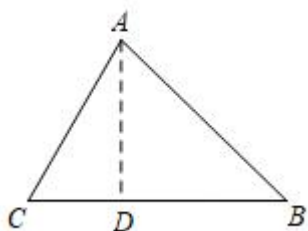
(2)在(1)题图中，如果 $AC=b$ ， $BC=a$ ， $\angle C=\alpha$ ，你能用 a ， b 和 $\cos\alpha$ 表示 AB 的长度吗？如果可以，写出推导过程；如果不可以，说明理由.

【答案】(1) $2\sqrt{7}$ (2)能，过程见解析

【分析】(1) 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D ，根据解直角三角形即可求得；

(2) 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D ，根据解直角三角形即可求得.

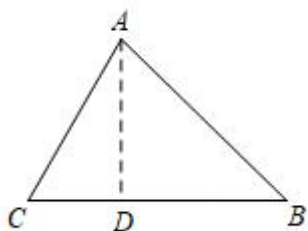
【详解】(1) 解：过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D



$$\therefore AD = AC \cdot \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \quad CD = AC \cdot \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\therefore DB = CB - CD = 6 - 2 = 4 \quad \therefore AB = \sqrt{AD^2 + DB^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 4^2} = 2\sqrt{7}$$

(2) 解：如图，过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D



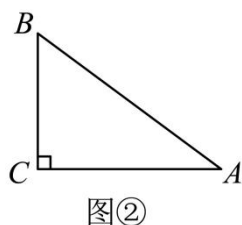
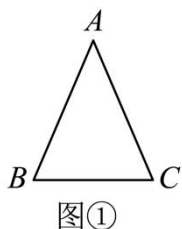
$$\therefore AD = AC \cdot \sin \alpha = b \cdot \sin \alpha, \quad CD = AC \cdot \cos \alpha = b \cdot \cos \alpha \quad \therefore DB = CB - CD = a - b \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}\therefore AB &= \sqrt{AD^2 + DB^2} = \sqrt{(b \cdot \sin \alpha)^2 + (a - b \cdot \cos \alpha)^2} \\ &= \sqrt{b^2 \sin^2 \alpha + a^2 - 2ab \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \alpha}.\end{aligned}$$

【点睛】本题考查了解直角三角形，作出辅助线，构造直角三角形是解决本题的关键。

例 7. (23-24 九年级上·江苏苏州·期中) 通过学习三角函数，我们知道在直角三角形中，一个锐角的大小与两条边长的比值相互唯一确定，因此边长与角的大小之间可以相互转化. 类似的，可以在等腰三角形中建立边角之间的联系. 我们定义：等腰三角形中底边与腰的比叫做顶角的正对 (sad).

如图①：在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，顶角 A 的正对记作 $\text{sad}A$ ，这时 $\text{sad}A = \frac{\text{底边}}{\text{腰}} = \frac{BC}{AB}$. 容易知道一个角的大小与这个角的正对值也是相互唯一确定的. 根据上述角的正对定义，解下列问题：



(1) $\text{sad}60^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$; (2) 对于 $0^\circ < A < 90^\circ$ ， $\angle A$ 的正对值 $\text{sad}A$ 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(3) 如图②，已知 $\cos A = \frac{12}{13}$ ，其中 $\angle A$ 为锐角，试求 $\text{sad}A$ 的值.

【答案】(1)1 (2) $0 < \text{sad}A < \sqrt{2}$ (3) $\frac{\sqrt{26}}{13}$

【分析】本题是三角形综合题，主要考查了新定义、三角函数、等腰三角形的性质、勾股定理等知识点，理解新定义是解此题的关键. (1) 先求出底角度数，判断出三角形为等边三角形，再根据正对定义解答即可；

(2) 求出 0° 度和 90° 度时等腰三角形底和腰的比即可；(3) 由 $\cos A = \frac{12}{13}$ ，令 $AC = 12a$ ， $AB = 13a$ ，则

$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(13a)^2 - (12a)^2} = 5a$ ， $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{5a}{13a} = \frac{5}{13}$ ，在 AB 上取点 D ，使 $AD = AC = 12a$ ，连接 CD ，作 $DH \perp AC$ ， H 为垂足，表示出 DH 、 AH 的长，再计算出 CH 、 CD ，最后由正对的定义即可求解.

【详解】(1) 解：根据正对定义可得：

当顶角为 60° 时，等腰三角形底角为 $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$ ，则三角形为等边三角形，

$\therefore \text{sad}60^\circ = \text{底边} \div \text{腰长} = 1$ ，故答案为：1；

(2) 解：当 $\angle A$ 接近 0° 时，底边长接近 0，由定义知 $\text{sad}A$ 接近 0，

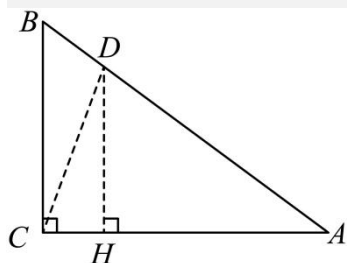
当 $\angle A$ 接近 90° 时，等腰三角形的底接近腰的 $\sqrt{2}$ 倍，由定义知 $\text{sad}A$ 接近 $\sqrt{2}$ ，

$\therefore \angle A$ 的正对值 $\text{sad}A$ 的取值范围是 $0 < \text{sad}A < \sqrt{2}$ ，故答案为： $0 < \text{sad}A < \sqrt{2}$ ；

(3) 解: 如图: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\cos A = \frac{12}{13}$,

令 $AC = 12a$, $AB = 13a$, 则 $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(13a)^2 - (12a)^2} = 5a$,

$$\therefore \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{12a}{13a} = \frac{12}{13}, \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{5a}{13a} = \frac{5}{13},$$



在 AB 上取点 D , 使 $AD = AC = 12a$, 连接 CD , 作 $DH \perp AC$, H 为垂足,

$$\therefore DH = AD \cdot \sin A = 12a \cdot \frac{5}{13} = \frac{60a}{13}, AH = AD \cdot \cos A = 12a \times \frac{12}{13} = \frac{144a}{13},$$

$$\therefore CH = AC - AH = 12a - \frac{144a}{13} = \frac{12a}{13}, \therefore CD = \sqrt{CH^2 + DH^2} = \sqrt{\left(\frac{12a}{13}\right)^2 + \left(\frac{60a}{13}\right)^2} = \frac{12\sqrt{26}}{13}a,$$

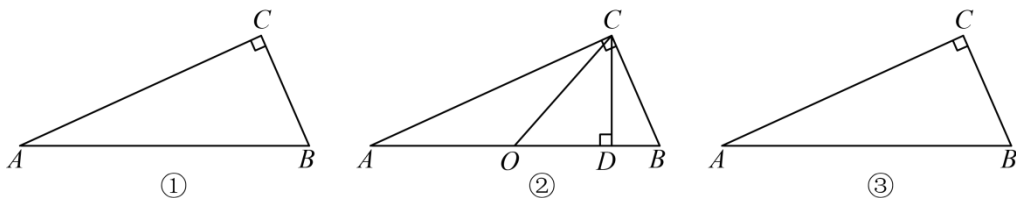
$$\therefore \sin \angle A = \frac{CD}{AC} = \frac{\frac{12\sqrt{26}}{13}a}{12a} = \frac{\sqrt{26}}{13}.$$

例 8. (23-24 九年级下·四川达州·期中) 在学习完锐角三角函数后, 老师提出一个这样的问题: 如图 1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 1$, $\angle A = \alpha$, 求 $\sin 2\alpha$ (用含 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的式子表示).

聪明的小雯同学是这样考虑的: 如图 2, 取 AB 的中点 O , 连接 OC , 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D , 则 $\angle COB = 2\alpha$, 然后利用锐角三角函数在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中表示出 AC, BC , 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中表示出 CD , 则可以求出

$$\sin 2\alpha = \frac{CD}{OC} = \frac{\sin \alpha \cdot AC}{\frac{1}{2}} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\frac{1}{2}} = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

阅读以上内容, 回答下列问题: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 1$.



(1) 如图③, 若 $BC = \frac{1}{3}$, 则 $\sin \alpha = \underline{\quad}$, $\sin 2\alpha = \underline{\quad}$;

(2) 请你参考阅读材料中的推导思路, 求出 $\tan 2\alpha$ 的表达式. (用含 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的式子表示)

【答案】 (1) $\frac{1}{3}$; $\frac{4\sqrt{2}}{9}$; (2) $\tan 2\alpha = \frac{2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{1 - 2(\sin \alpha)^2}$

【分析】此题考查了三角函数定义的应用，解题的关键是熟练掌握三角函数的定义，作辅助线作所求角的直角三角形. (1) 根据勾股定理求得 AC ，再根据三角函数的定义即可求得 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ ，再根据

$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ 求解即可；(2) 取 AB 的中点 O ，连接 OC ，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ，则 $\angle COB = 2\alpha$ ，

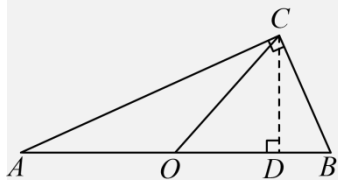
$OC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$ ，在 $Rt\triangle ACD$ 中表示出 CD ，勾股定理求得 OD ，即可求解.

【详解】(1) 由勾股定理可得： $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

由三角函数的定义可得 $\sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{3}$ ， $\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

由材料可得： $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ 故答案为 $\frac{1}{3}$ ； $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ ；

(2) 取 AB 的中点 O ，连接 OC ，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ，如下图：



则 $\angle COB = 2\alpha$ ， $OC = OB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$ ， $2\alpha < 90^\circ$ ， $\alpha < 45^\circ$

在 $Rt\triangle ABC$ 中， $AC = \cos \alpha$ ， $BC = \sin \alpha$ 在 $Rt\triangle ACD$ 中， $CD = AC \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \sin \alpha$ ，

在 $Rt\triangle CBD$ 中， $BD = BC \sin \alpha = (\sin \alpha)^2$ ，则 $OD = OC - BD = \frac{1}{2} - (\sin \alpha)^2$

则 $\tan 2\alpha = \frac{CD}{OD} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} - (\sin \alpha)^2} = \frac{2\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{1 - 2(\sin \alpha)^2}$ 故答案为 $\tan 2\alpha = \frac{2\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{1 - 2(\sin \alpha)^2}$.

例 9. (2024·宁夏银川·二模) 阅读、理解、应用

研究 $0^\circ - 360^\circ$ 间的角的三角函数，在初中我们学习过锐角的正弦余弦和正切三种三角函数，即在图1所示的

直角三角形 ABC ， $\angle A$ 是锐角，那么 $\sin A = \frac{\angle A \text{的对边}}{\text{斜边}}$ ， $\cos A = \frac{\angle A \text{的邻边}}{\text{斜边}}$ ， $\tan A = \frac{\angle A \text{的对边}}{\angle A \text{的邻边}}$. 为了研究

需要，我们再从另一个角度来规定一个角的三角函数的意义：

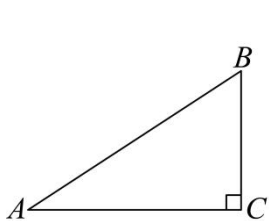


图1

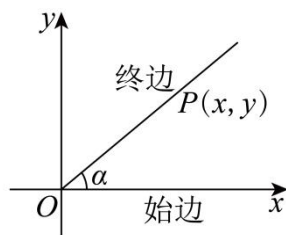


图2

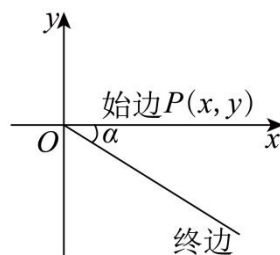


图3

设有一个角 α ，我们以它的顶点作为原点，以它的始边作为 x 轴的正半轴 Ox ，建立直角坐标系 (图2)，在

角 α 的终边 OQ 上任取一点 P ，它的横坐标是 x ，纵坐标是 y ，终边 OQ 可以看作是将射线 OX 绕点 O 逆时针旋转 α° 后所得到的， P 和原点 $O(0,0)$ 的距离为 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ （ r 总是正的）然后把角 α 的三角函数规定为：

$\sin \alpha = \frac{y}{r}$ ， $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ ， $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ （其中 x ， y 分别是点 P 的横、纵坐标）我们知道，图1的三个比值的大小与角 α 的大小有关，而与直角三角形的大小无关，同样图2中四个比值的大小也仅与角 α 的大小有关，三个比值的正、负取决于角 α 的终边所在的象限，而与点 P 在角 α 的终边位置无关。

比较图1与图2，可以看出一个角的三角函数的意义的两种规定实际上是一样的，根据第二种定义回答下列问题。

(1)如图3，若 $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ，则角 α 的三角函数值 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 、 $\tan \alpha$ ，其中取正值的是_。

(2)已知 $\angle \alpha$ 是钝角，则下列说法正确的是_。

A. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ B. $\sin \alpha \cdot \tan \alpha = \cos \alpha$ C. $\sin \alpha < 0$ D. $\tan \alpha > 0$

(3)若角 α 的终边与直线 $y = \sqrt{3}x$ 重合，则 $\sin \alpha + \cos \alpha =$ _。

(4)若角 α 是锐角，其终边上一点 $P(12, y)$ 且 $\sin \alpha = \frac{1}{13}y$ ，试求 y 和 $\tan \alpha$ 的值。

【答案】 (1) $\cos \alpha$ (2) A (3) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 或 $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (4) y 的值为 5； $\tan \alpha$ 的值为 $\frac{5}{12}$

【分析】 (1) 由点 $P(x, y)$ 在第四象限，推出 $x > 0, y < 0$ ，根据 $\sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}, \tan \alpha = \frac{y}{x}$ ，即可判断；

(2) 根据三角函数的定义分析求解即可；(3) 分两种情形讨论即可解决问题；(4) 根据 $\angle \alpha$ 是锐角，终边上一点 $P(12, y)$ 在第一象限， $y > 0$ ，进而得 $\frac{y}{\sqrt{144+y^2}} = \frac{1}{13}y$ ，进而得解得 $y = 5$ 或 $y = -5$ （舍去），从而即可得解。

【详解】 (1) 解： $\because 270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ， $\therefore$ 点 $P(x, y)$ 在第四象限， $\therefore x > 0, y < 0$ ，

$\therefore \sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}, \tan \alpha = \frac{y}{x}, r > 0$ ， $\therefore \sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0, \tan \alpha < 0$ ，

$\therefore$ 取正值的是 $\cos \alpha$ ，故答案为： $\cos \alpha$ ；

(2) 解： $\angle \alpha$ 是钝角，则 $\angle \alpha$ 的终边在第二象限， $\therefore x < 0, y > 0$ ，而 $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ ，

$\therefore \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1$ ，故 A 正确；

$\therefore \sin \alpha \cdot \tan \alpha = \frac{y}{r} \times \frac{y}{x} = \frac{y^2}{xr}$ ， $\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x^2}{rx}$ ， $\therefore \sin \alpha \cdot \tan \alpha \neq \cos \alpha$ ，故 B 不正确；

$\therefore x < 0, y > 0, r > 0$ ， $\therefore \sin \alpha = \frac{y}{r} > 0$ ，故 C 不正确； $\tan \alpha = \frac{y}{x} < 0$ ，故 D 不正确；故答案为：A；

(3) 解: 由角 α 的终边与直线 $y = \sqrt{3}x$ 重合, 设角 α 终边上一点为 $(m, \sqrt{3}m)$, $\therefore r = \sqrt{m^2 + (\sqrt{3}m)^2} = 2|m|$,

当 $m > 0$ 时, $r = 2m$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}m}{2m} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$, $\therefore \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$;

当 $m < 0$ 时, $r = -2m$, $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}m}{2m} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{m}{2m} = -\frac{1}{2}$, $\therefore \sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$;

故答案为: $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 或 $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$;

(4) 解: $\because$ 角 α 是锐角, $\therefore$ 终边上一点 $P(12, y)$ 在第一象限, $y > 0$, $\therefore r = \sqrt{12^2 + y^2} = \sqrt{144 + y^2}$,

$\because \sin \alpha = \frac{1}{13}y$, $\therefore \frac{y}{\sqrt{144 + y^2}} = \frac{1}{13}y$, 解得 $y = 5$ 或 $y = -5$ (舍去);

经检验, $y = 5$ 是原方程的解, $\therefore y$ 的值为5; $\therefore \tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{5}{12}$, $\therefore \tan \alpha$ 的值为 $\frac{5}{12}$.

【点睛】本题考查一次函数综合题、三角函数的定义、勾股定理、解直角三角形等知识, 解题的关键是理解题意, 学会用分类讨论的思想思考问题, 学会利用参数解决问题, 属于中考创新题目.

习题练模型

1. (2023·四川巴中·模拟预测) 规定: $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, 则

下列结论正确的是 ()

A. $\sin(-30^\circ) = \frac{1}{2}$

B. $\cos 2x = \cos^2 x + \sin^2 x$

C. $\cos(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

D. $\cos(x-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

【答案】C

【分析】根据题目所规定的公式, 化简三角函数, 即可判断结论. 本题属于新定义问题, 主要考查了三角

函数的知识，解题的关键是熟练掌握三角函数的基础知识，理解题中公式.

【详解】解：A. $\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ ，故此结论不正确；

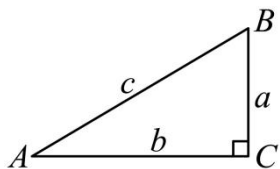
B. $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ，故此结论不正确；

C. $\cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ，故此结论正确；

D. $\cos(x-y) = \cos[x+(-y)] = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ ，故此结论不正确；

故选：C.

2. (22-23 九年级下·浙江杭州·阶段练习) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，定义：斜边与 $\angle A$ 的对边的比叫做 $\angle A$ 的余割，用“ $\csc A$ ”表示. 如设该直角三角形的三边分别为 a, b, c ，则 $\csc A = \frac{c}{a}$ ，那么下列说法正确的是 ()



- A. $\csc B \cdot \sin A = 1$ B. $\csc A = \frac{b}{c}$ C. $\csc A \cdot \cos B = 1$ D. $\csc^2 A + \csc^2 B = 1$

【答案】C

【分析】本题考查了锐角三角函数的定义，同角三角函数的关系，掌握余割的定义：斜边与 $\angle A$ 的对边的比叫做 $\angle A$ 的余割，用“ $\csc A$ ”表示，是解题的关键.

【详解】解：A、 $\csc B \cdot \sin A = \frac{AB}{AC} \times \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{AC} \neq 1$ ，故该选项是错误的，不符合题意；

B、 $\csc A = \frac{c}{a} \neq \frac{b}{c}$ ，故该选项是错误的，不符合题意；

C、 $\csc A \cdot \cos B = \frac{c}{a} \times \frac{a}{c} = 1$ ，故该选项是正确的，符合题意；

D、 $\csc^2 A + \csc^2 B = \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} = \frac{c^4}{a^2 b^2}$ ，故该选项是错误的，不符合题意；故选：C

3. (23-24 九年级·福建龙岩·自主招生) 已知有公式： $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ 且

$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则锐角 θ 的值为 ()

- A. 75° B. 60° C. 30° D. 15°

【答案】D

【分析】将 $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 化成 $\sin 60^\circ \sin \theta + \cos 60^\circ \cos \theta = \cos 45^\circ$ ，再根据所提供的公式可得答案.

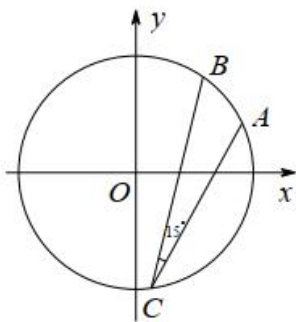
【详解】解：由公式： $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ 可得，

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 即 } \sin 60^\circ \sin \theta + \cos 60^\circ \cos \theta = \cos 45^\circ,$$

$$\therefore \cos(60^\circ - \theta) = \cos 45^\circ, \text{ 即 } 60^\circ - \theta = 45^\circ, \therefore \theta = 15^\circ, \text{ 故选: D.}$$

【点睛】本题考查同角三角函数的关系以及特殊锐角三角函数值，掌握特殊锐角的三角函数值是正确解答的前提。

4. (2024·广东深圳·模拟预测) 阅读材料：坐标平面内，把点 $A(x, y)$ 绕原点 O 逆时针旋转 α 度，得到点 $A'(x', y')$ ，若已知 A 点坐标及 α 的大小，我们可根据公式 $\begin{cases} x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \\ y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{cases}$ 来计算点 A' 的坐标。根据材料完成：如图， A, B, C 是 $\odot O$ 上的三点且 $\angle ACB = 15^\circ$ ，若 A 点坐标为 $(2\sqrt{6}, 2)$ ，则 B 点坐标为 ()



- A. $(3\sqrt{2}-1, \sqrt{6}+\sqrt{3})$ B. $(2\sqrt{6} \cos 15^\circ - 2 \sin 15^\circ, 2\sqrt{6} \sin 15^\circ + 2 \cos 15^\circ)$
- C. $(\sqrt{6}-\sqrt{3}, 3\sqrt{2}+1)$ D. $(2 \cos 15^\circ - 2\sqrt{6} \sin 15^\circ, 2 \sin 15^\circ + 2\sqrt{6} \cos 15^\circ)$

【答案】A

【分析】连接 AO, BO ， $\angle C$ 和 $\angle AOB$ 分别是弧 AB 的圆周角和圆心角，所以 $\angle AOB = 30^\circ$ ，而且点 A 和点 B 的关系与材料中的方程对应计算即可；

【详解】连接 OA, OB ， $\because \angle BCA = 15^\circ$ ， $\therefore \angle BOA = 30^\circ$ ，则 $\alpha = 30^\circ$ ， A 点坐标为 $(2\sqrt{6}, 2)$ ，

代入公式 $\begin{cases} x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \\ y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{cases}$ ， $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore x' = 2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = 3\sqrt{2} - 1, \quad y' = 2\sqrt{6} \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6} + \sqrt{3}, \therefore B(3\sqrt{2}-1, \sqrt{6}+\sqrt{3}).$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/088050104111007042>