

河南省鹤壁市高中 2023-2024 学年高一下学期 7 月期末考试

数学试题

学校:_____ 姓名:_____ 班级:_____ 考号:_____

一、单选题

1. 已知 $m > n > 0$, 下列不等式一定成立的是 ()

A. $\frac{m}{n} < \frac{m+2}{n+2}$

B. $m + \frac{1}{n} > \frac{1}{m} + n$

C. $m - \frac{1}{n} > n - \frac{1}{m}$

D. $\frac{2m+n}{m+2n} > \frac{m}{n}$

2. 设 $a = \log_3 10$, $b = 2^{0.3}$, $c = 0.8^3$, 则 ()

A. $b < a < c$

B. $c < a < b$

C. $c < b < a$

D. $a < c < b$

3. 已知 x_0 是函数 $f(x) = e^x + x - 2$ 的零点, 则 ()

A. $x_0 > 1$

B. $\ln(2 - x_0) = x_0$

C. $x_0 - e^{-x_0} > 0$

D. $e^{2-x_0} - e < 0$

4. 有甲、乙两个袋子, 甲袋子中有 3 个白球, 2 个黑球; 乙袋子中有 4 个白球, 4 个黑球. 现从甲袋子中任取 2 个球放入乙袋子, 然后再从乙袋子中任取一个球, 则此球为白球的概率为 ()

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{13}{25}$

C. $\frac{1}{2}$

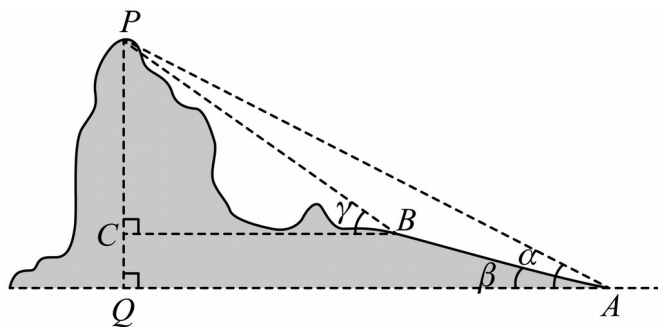
D. $\frac{3}{5}$

5. 如图所示: 测量队员在山脚 A 测得山顶 P 的仰角为 α , 沿着倾斜角为 β 的斜坡向上走

200m 到达 B 处, 在 B 处测得山顶 P 的仰角为 γ . 若 $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 34^\circ$, $\gamma = 75^\circ$, (参考数

据： $\sin 34^\circ \approx 0.56$ ， $\sin 41^\circ \approx 0.66$ ， $\cos 34^\circ \approx 0.83$ ， $\cos 41^\circ \approx 0.75$ ， $\sqrt{2} \approx 1.41$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ，

则山的高度约为（ ）



- A. 181.13 B. 179.88 C. 186.12 D. 190.21

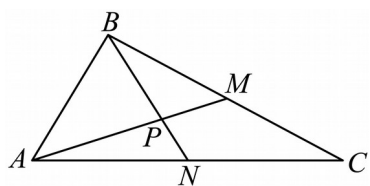
6. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， $\triangle ABC$ 的面积为 S ，若

$\sin(A+C) = \frac{2S}{b^2 - a^2}$ ，则 $\tan A + \frac{1}{3 \tan(B-A)}$ 的取值范围为（ ）

- A. $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ C. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\right)$ D. $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{10\sqrt{3}}{9}\right)$

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=2$ ， $AC=5$ ， $\angle BAC=60^\circ$ ， BC 、 AC 边上的两条中线

AM ， BN 相交于点 P ，则 $\angle MPN$ 的余弦值为（ ）



- A. $\frac{4\sqrt{91}}{91}$ B. $\frac{2\sqrt{91}}{91}$ C. $\frac{\sqrt{91}}{91}$ D. $-\frac{4\sqrt{91}}{91}$

8. 已知复数 z 满足 $|z-1| + |z+1| = 4$ ，则 $|z|$ 的取值范围为（ ）

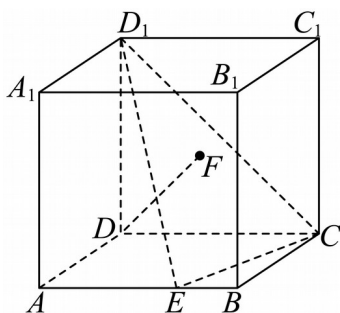
- A. $[0, 1]$ B. $[2, 3]$ C. $[1, \sqrt{3}]$ D. $[\sqrt{3}, 2]$

9. 已知 $f(x) = \log_a x (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$, 则下列结论正确的是 ()

- A. 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数
- B. 不等式 $f(x) < 0$ 的解集是 $(0, 1)$
- C. $f(x)$ 的图象过定点 $(1, 0)$
- D. 当 $a = 2$ 时, $f(x)$ 的图象与 $g(x) = 0.01x$ 的图象有且只有一个公共点

二、多选题

10. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 AB 上的动点, $DF \perp$ 平面 D_1EC , F 为垂足, 下列结论正确的是 ()



- A. $FD_1 = FC$
- B. 三棱锥 $C - DED_1$ 的体积为定值
- C. $ED_1 \perp A_1D$
- D. BC_1 与 AC 所成的角为 45°

11. 已知函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$, 则 ()

- A. $f(x)$ 的最大值为 2

B. 函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称

C. 直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴

D. 函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上单调递增

三、填空题

12. 函数 $f(x) = 4 \sin x (\sin x - \sqrt{3} \cos x) + 1$ 相邻的两个零点分别为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 则

$\cos(x_1 - x_2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , A 为锐角, $\tan B \cos C = 1 - \sin C$, $\triangle ABC$ 的

面积为 2, 则 $\triangle ABC$ 的周长的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的侧棱长都相等, 且底面是边长为 $3\sqrt{2}$ 的正方形, 它的五个顶

点都在直径为 10 的球面上, 则四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题

15. 对于函数 $y = mx^3 + ax^2 + (b-1)x + (b-1)$ ($a \neq 0$), 若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得

$mx_0^3 + ax_0^2 + (b-1)x_0 + (b-1) = x_0$ 成立, 则称 x_0 为函数 $y = mx^3 + ax^2 + (b-1)x + (b-1)$ ($a \neq 0$) 的“囧点”.

(1) 当 $m=2, a=-3, b=2$ 时, 求函数 $y = mx^3 + ax^2 + (b-1)x + (b-1)$ ($a \neq 0$) 的“囧点”;

(2) 当 $m=0$ 时, 对任意实数 b , 函数 $y = mx^3 + ax^2 + (b-1)x + (b-1)$ ($a \neq 0$) 恒有“囧点”, 求

a 的取值范围.

16. 某电子产品制造企业为了提升生产质量, 对现有的一条电子产品生产线进行技术升级改造, 为了分析改造的效果, 该企业质检人员从该条生产线所生产的电子产品中随机抽取了 1000 件, 检测产品的某项质量指标值, 根据检测数据得到下表 (单位: 件).

| | | | | | | | |
|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| 质是指标值 | [25, | [35,4 | [45,5 | [55,6 | [65,7 | [75,8 | [85, |
| 产品 | 60 | 100 | 160 | 300 | 200 | 100 | 80 |

(1) 估计这组样本的质量指标值的平均数 \bar{x} 和方差 s^2 (同一组中的数据用该组区间中点值作代表);

(2) 设 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, $\{x\}$ 表示不小于 x 的最小整数, s 精确到个位,

$$a_1 = 5 \cdot \left\{ \frac{\bar{x} - s}{5} \right\}, b_1 = 5 \cdot \left[\frac{\bar{x} + s}{5} \right], a_2 = 5 \cdot \left\{ \frac{\bar{x} - 2s}{5} \right\}, b_2 = 5 \cdot \left[\frac{\bar{x} + 2s}{5} \right].$$

根据检验标准, 技术升级改造

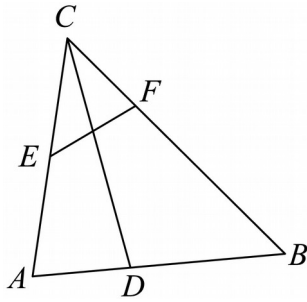
后, 若质量指标值有 65% 落在 $[a_1, b_1]$ 内, 则可以判断技术改造后的产品质量初步稳定; 若

有 95% 落在 $[a_2, b_2]$ 内, 则可以判断技术改造后的产品质量稳定, 可认为生产线技术改造成功. 请问: 根据样本数据估计, 是否可以判定生产线的技术改造是成功的?

17. 如图所示, $\triangle ABC$ 的顶点是我国在南海的三个战略岛屿, 各岛屿之间建有资源补给站,

在图中的 D 、 E 、 F 点上. 岛屿 A 到补给站 D 的距离为岛屿 A 到 B 的 $\frac{2}{5}$, 岛屿 A 和岛屿 C 到

补给站 E 的距离相等, 补给站 F 在靠近岛屿 C 的 BC 的三等分点上. 设 $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$.



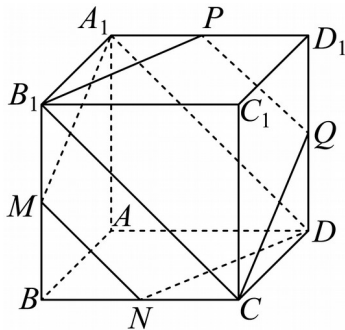
(1) 用 \vec{a}, \vec{b} 表示 $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CD}$;

(2) 若三个岛屿围成的 $\triangle ABC$ 的面积为 $10(\sqrt{2}+1)$ 平方公里, 且满足 $\frac{4 \cos A}{\sin A} + \frac{3 \cos B}{\sin B} = 1$, 求

岛屿 A 和岛屿 C 之间距离的最小值.

18. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为棱 BB_1 的中点, P 为棱 A_1D_1 的中点,

平面 DA_1MN 与平面 CB_1PQ 将该正方体截成三个多面体, 其中 N, Q 分别在棱 BC, DD_1 上.



(1) 求证: 平面 $MND A_1 \parallel$ 平面 CB_1PQ ;

(2) 求异面直线 CQ 与 MN 所成角的余弦值.

19. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin \frac{\omega x}{2} \cos \frac{\omega x}{2} - 2\cos^2 \frac{\omega x}{2} + 1, \omega > 0, x \in \mathbf{R}$, 在曲线 $y = f(x)$ 与直线

$y = 2$ 的交点中, 若相邻交点的距离为 π .

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)若 $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]$, 解不等式 $f(x) \geq -\sqrt{3}$;

(3)若 $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]$, 且关于 x 的方程 $f^2(x) - (a+1)f(x) + a = 0$ 有三个不等的实根, 求实数 a 的取值范围.

参考答案:

1. B

【分析】利用作差法即可判断 A，利用不等式的性质即可判断 B，举出反例即可判断 CD.

【详解】对于 A， $\frac{m}{n} - \frac{m+2}{n+2} = \frac{m(n+2) - n(m+2)}{n(n+2)} = \frac{2(m-n)}{n(n+2)}$,

因为 $m > n > 0$ ，所以 $m-n > 0, n(n+2) > 0$ ，

所以 $\frac{m}{n} - \frac{m+2}{n+2} = \frac{2(m-n)}{n(n+2)} > 0$ ，

所以 $\frac{m}{n} > \frac{m+2}{n+2}$ ，故 A 错误；

对于 B，因为 $m > n > 0$ ，所以 $\frac{1}{n} > \frac{1}{m} > 0$ ，

所以 $m + \frac{1}{n} > \frac{1}{m} + n$ ，故 B 正确；

对于 C，当 $m=0.2, n=0.1$ 时， $m - \frac{1}{n} = -9.8 < -4.9 = n - \frac{1}{m}$ ，故 C 错误；

对于 D，当 $m=2, n=1$ 时， $\frac{2m+n}{m+2n} = \frac{5}{4} < 2 = \frac{m}{n}$ ，故 D 错误.

故选：B.

2. C

【分析】利用指数函数、对数函数的单调性即可判断

【详解】 $c = 0.8^3 < 0.8^0 = 1$ ，

$2^0 < 2^{0.3} < 2^1$ ，即 $1 < b < 2$

$a = \log_3 10 > \log_3 9 = 2$

所以 $a > b > c$

故选：C

3. B

【分析】对A：根据零点存在定理，即可判断零点范围；对B： $e^{x_0} = 2 - x_0$ ，两边取对数，

即可判断；对C： $x_0 e^{x_0} = x_0(2 - x_0)$ ，结合 x_0 的范围，即可得到 $x_0 e^{x_0} < 1$ ，从而进行判断；

对D：根据 x_0 的范围，再结合指数函数单调性，即可判断.

【详解】 $y = e^x, y = x - 2$ 均为单调增函数，故 $f(x)$ 为单调增函数；

对A：因为 $f(0) = -1, f(1) = e - 1 > 0$ ，故 $x_0 \in (0, 1)$ ，故A错误；

对B：因为 $e^{x_0} + x_0 - 2 = 0$ ，故 $e^{x_0} = 2 - x_0 > 0$ ，两边取对数可得 $x_0 = \ln(2 - x_0)$ ，故B正确；

对C： $e^{x_0} = 2 - x_0$ ，故 $x_0 e^{x_0} = x_0(2 - x_0) = -(x_0 - 1)^2 + 1 < 1$ ，则 $x_0 < e^{-x_0}$ ，则 $x_0 - e^{-x_0} < 0$ ，故

C错误；

对D：因为 $x_0 \in (0, 1)$ ， $2 - x_0 \in (1, 2)$ ，故 $e^{2-x_0} \in (e, e^2)$ ，则 $e^{2-x_0} > e$ ， $e^{2-x_0} - e > 0$ ，故D错

误.

故选：B.

【点睛】关键点点睛：本题A选项是所有选项中最重要的一個，需要根据零点存在定理，

取求解 x_0 的范围；对其它选项的处理关键是要灵活应用所学知识.

4. B

【分析】根据独立事件与古典概型计算分从甲袋子取出2个白球放入乙袋子、从甲袋子取出2个黑球放入乙袋子和从甲袋子取出1个白球和1个黑球放入乙袋子三种情况讨论，从而可得出答案.

【详解】解：若从甲袋子取出2个白球放入乙袋子，然后再从乙袋子中任取一个球，则此

球为白球的概率为 $\frac{C_3^2 \cdot C_6^1}{C_5^2 \cdot C_{10}^1} = \frac{9}{50}$;

若从甲袋子取出 2 个黑球放入乙袋子, 然后再从乙袋子中任取一个球, 则此球为白球的概

率为 $\frac{C_2^2 \cdot C_4^1}{C_5^2 \cdot C_{10}^1} = \frac{1}{25}$;

若从甲袋子取出 1 个白球和 1 个黑球放入乙袋子, 然后再从乙袋子中任取一个球, 则此球

为白球的概率为 $\frac{C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_5^1}{C_5^2 \cdot C_{10}^1} = \frac{3}{10}$.

\therefore 从甲袋子中任取 2 个球放入乙袋子, 然后再从乙袋子中任取一个球, 则此球为白球的概

率为 $\frac{9}{50} + \frac{1}{25} + \frac{3}{10} = \frac{13}{25}$.

故选: B.

5. C

【分析】在 $\triangle ABP$ 中, 利用正弦定理求 AP , 进而在 $\text{Rt}\triangle PAQ$ 中求山的高度.

【详解】在 $\triangle ABP$ 中, 则

$$\angle ABP = 180^\circ - \gamma + \beta, \angle BPA = 180^\circ - (\alpha - \beta) - \angle ABP = 180^\circ - (\alpha - \beta) - (180^\circ - \gamma + \beta) = \gamma - \alpha,$$

$$\text{因为 } \frac{AP}{\sin \angle ABP} = \frac{AB}{\sin \angle APB}, \text{ 则 } AP = \frac{AB \sin \angle ABP}{\sin \angle APB} = \frac{AB \sin(\gamma - \beta)}{\sin(\gamma - \alpha)},$$

在 $\text{Rt}\triangle PAQ$ 中, 则

$$PQ = AP \sin \alpha = \frac{AB \sin(\gamma - \beta) \sin \alpha}{\sin(\gamma - \alpha)} = \frac{200 \times \sin 41^\circ \times \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} \approx \frac{200 \times 0.66 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} \approx 186.12.$$

故选：C.

6. C

【分析】由面积公式与正余弦定理化简后得出 A, B 关系后求解

【详解】由题意 $\sin(A+C) = \sin B = \frac{2S}{b^2 - a^2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} ac \sin B}{b^2 - a^2}$ ，而 $\sin B > 0$ ，

所以 $b^2 - a^2 = ac$ ，由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ，

故 $c = 2a \cos B + a$ ，

又由正弦定理得 $\sin C = 2 \sin A \cos B + \sin A = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ，

整理得 $\sin(B-A) = \sin A$ ，

故 $B-A = A$ 或 $B-A = \pi - A$ （舍去），得 $B = 2A$ ，

因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，

$$\text{故} \begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < 2A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \pi - A < \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

解得 $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{4}$ ，故 $\frac{\sqrt{3}}{3} < \tan A < 1$ ，

$$\tan A + \frac{1}{3 \tan(B-A)} = \tan A + \frac{1}{3 \tan A} \in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3} \right).$$

故选：C.

【点睛】关键点点睛：关键是适当结合正弦定理、余弦定理进行边角转换由此即可顺利得解.

7. A

【分析】根据给定条件，取 $\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$ 为基底，利用向量数量积求出 $|\overline{AM}|, |\overline{AN}|, \overline{AM} \cdot \overline{AN}$ ，再利用向量夹角公式求解作答.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中，令 $\overline{AB} = \vec{a}$ ， $\overline{AC} = \vec{b}$ ，则 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 60^\circ$ ，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2 \times 5 \times \frac{1}{2} = 5,$$

因为 BC 、 AC 边上的两条中线 AM ， BN 相交于点 P ，则 $\overline{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ ， $\overline{BN} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$ ，

$$\text{于是 } |\overline{AM}| = \frac{1}{2} \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 5^2 + 2 \times 5} = \frac{\sqrt{39}}{2},$$

$$|\overline{BN}| = \frac{1}{2} \sqrt{\vec{b}^2 + 4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b}} = \frac{1}{2} \sqrt{5^2 + 4 \times 2^2 - 4 \times 5} = \frac{\sqrt{21}}{2},$$

$$\overline{AM} \cdot \overline{BN} = \frac{1}{4} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - 2\vec{a}) = \frac{1}{4} (-\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a}^2 + \vec{b}^2) = \frac{1}{4} (-5 - 2 \times 2^2 + 5^2) = 3,$$

$$\text{所以 } \cos \angle MPN = \cos \langle \overline{AM}, \overline{BN} \rangle = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{BN}}{|\overline{AM}| |\overline{BN}|} = \frac{3}{\frac{\sqrt{39}}{2} \times \frac{\sqrt{21}}{2}} = \frac{4\sqrt{91}}{91}.$$

故选：A

8. D

【分析】由题意确定复数 z 对应的点的轨迹，再结合椭圆的性质以及 $|z|$ 的几何意义，即可求得答案.

【详解】复数 z 满足 $|z-1| + |z+1| = 4$ ，

则复数 z 对应的点的轨迹为以 $(-1,0), (1,0)$ 为焦点，长轴长 $2a=4$ 的椭圆，

则椭圆短半轴长为 $b = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ，椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，

$|z|$ 表示椭圆上的点到原点的距离，

当点位于椭圆长轴上的顶点时， $|z|$ 取值大值 2；

当点位于椭圆短轴上的顶点时， $|z|$ 取值小值 $\sqrt{3}$ ；

故 $|z|$ 的取值范围为 $[\sqrt{3}, 2]$ ，

故选：D

9. AC

【分析】对 A、B、C，结合对数函数性质逐项判断即可得，对 D，将函数图象交点个数转化为研究函数的零点个数，借助零点的存在性定理即可判断.

【详解】对 A：当 $a > 1$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，故 A 正确；

对 B：当 $a > 1$ 时， $\log_a x < 0$ ，则 $x \in (0, 1)$ ，当 $0 < a < 1$ 时， $x \in (1, +\infty)$ ，故 B 错误；

对 C： $f(1) = \log_a 1 = 0$ ，故 C 正确；

对 D：当 $a = 2$ 时， $f(x) = \log_2 x$ ，令 $h(x) = \log_2 x - 0.01x$ ，

有 $h(1) = \log_2 1 - 0.01 = -0.01 < 0$ ， $h(2) = \log_2 2 - 0.01 \times 2 = 1 - 0.02 = 0.98 > 0$ ，

$h(2^{10}) = \log_2 2^{10} - 0.01 \times 2^{10} = 10 - 10.24 = -0.24 < 0$ ，

故 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 及 $(2, 2^{10})$ 上都至少有一根，

即 $f(x)$ 的图象与 $g(x) = 0.01x$ 的图象在 $(1, 2)$ 及 $(2, 2^{10})$ 上都至少有一个交点，

故 D 错误.

故选：AC.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/088061062017006111>