专题 1.10 利用三角函数测高（知识讲解）

【学习目标】

1. 理解用三角函数解决实际问题的有关概念；

2. 理解并解决实际问题中转化为三角函数模型解决实际问题。

【要点梳理】

解直角三角形的知识应用很广泛，关键是把实际问题转化为数学模型，善于将某些实际问题中的数量关系化归为直角三角形中的边角关系是解决实际应用问题的关键.

解这类问题的一般过程是：

(1)弄清题中名词、术语的意义，如仰角、俯角、坡度、坡角、方向角等概念，然后根据题意画出几何图形，建立数学模型.

(2)将已知条件转化为几何图形中的边、角或它们之间的关系，把实际问题转化为解直角三角形的问题.

(3)根据直角三角形(或通过作垂线构造直角三角形)元素(边、角)之间的关系解有关的直角三角形.

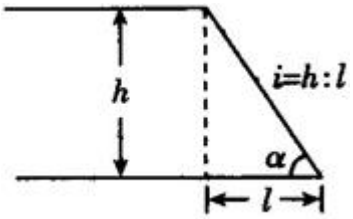
(4)得出数学问题的答案并检验答案是否符合实际意义，得出实际问题的解.

拓展：

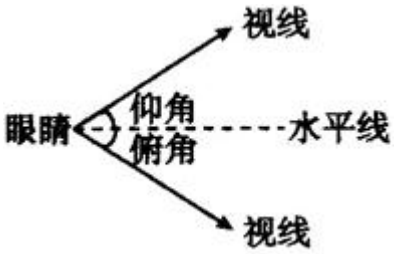
在用直角三角形知识解决实际问题时，经常会用到以下概念：

(1)坡角：坡面与水平面的夹角叫做坡角，用字母α表示.

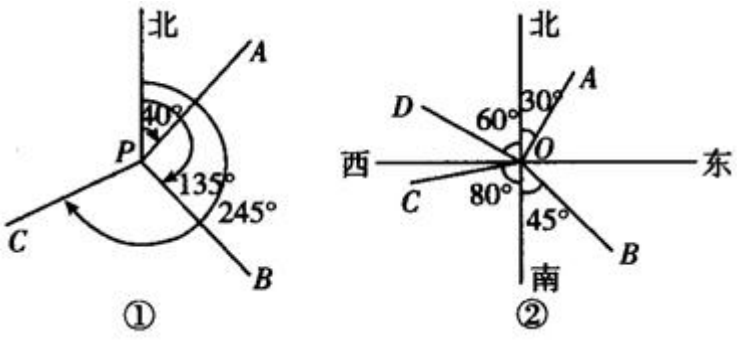
坡度(坡比)：坡面的铅直高度 h 和水平距离l的比叫做坡度，用字母i表示，则$i=\frac{h}{l}=\tan\alpha$，如图，坡度通常写成$i=h:l$的形式.



(2)仰角、俯角：视线与水平线所成的角中，视线中水平线上方的叫做仰角，在水平线下方的叫做俯角，如图.



(3)方位角：从某点的指北方向线按顺时针转到目标方向的水平角叫做方位角，如图①中，目标方向 PA，PB，PC 的方位角分别为是 40°，135°，245°.

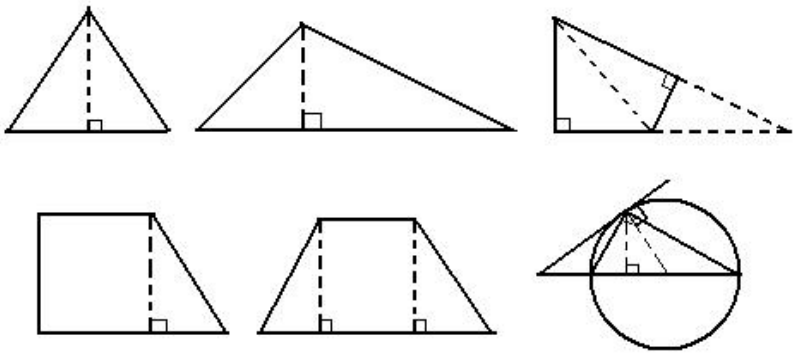


(4)方向角：指北或指南方向线与目标方向线所成的小于 90° 的水平角，叫做方向角，如图②中的目标方向线 OA，OB，OC，OD 的方向角分别表示北偏东 30°，南偏东 45°，南偏西 80°，北偏西 60°.特别如：东南方向指的是南偏东 45°，东北方向指的是北偏东 45°，西南方向指的是南偏西 45°，西北方向指的是北偏西 45°.

特别说明：

1．解直角三角形实际是用三角知识，通过数值计算，去求出图形中的某些边的长或角的大小，最好画出它的示意图.

2．非直接解直角三角形的问题，要观察图形特点，恰当引辅助线，使其转化为直角三角形或矩形来解.



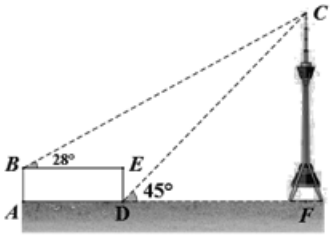
3．解直角三角形的应用题时，首先弄清题意(关键弄清其中名词术语的意义)，然后正确画出示意图，进而根据条件选择合适的方法求解.

【典型例题】

类型一、直接求三角形的高

例 1．**数学课外学习小组利用矩形建筑物 ABED 测量广场灯塔 CF 的高，如图所示，在点 B 处测得灯塔顶端 C 的仰角为 28°，在点 D 处测得灯塔顶端 C 的仰角为 45°，已知 AB＝10m，AD＝30m．求灯塔 CF 的高（结果保留整数）.**

（参考数据：tan28°≈0.53， cos28°≈0.88，sin28°≈0.47，$\sqrt{2}$≈1.41）



【答案】55 米

【分析】延长 BE 交 CD 于点 G，交 CF 于点 H，设 CH＝xm，利用锐角三角函数的含义分别表示GH,BH，再列方程求解即可.

解：延长 BE 交 CD 于点 G，交 CF 于点 H，

在 Rt△DEG 中，∠EDG＝45°，

∴EG＝DE＝10m．∠EGD＝45°

设 CH＝xm，

在 Rt△CGH 中，$\angle CGH=\angle$EGD＝45°，

∴GH＝xm

在 Rt△CBH 中，∠CBH＝28°，

∴tan∠CBH＝$\frac{CH}{BH}$，

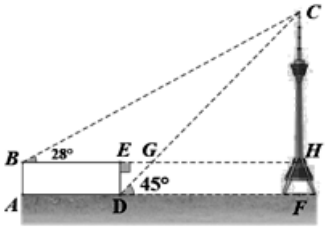
即：$\frac{x}{30+10+x}$＝tan28°

解这个方程得：x≈45.1，

经检验：x≈45.1 符合题意.

∴灯塔的高 CF＝55.1≈55（m）

答：灯塔的高为 55 米.



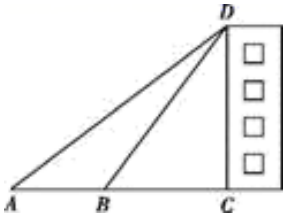
【点拨】本题考查的是解直角三角形的应用，掌握锐角三角函数在解直角三角形中的应用是解题的关键.

举一反三：

【变式 1】**如图，为测量建筑物 CD 的高度，在点 A 测得建筑物顶部 D 点的仰角是**

22°，再向建筑物 CD 前进 30 米到达 B 点，测得建筑物顶部 D 点的仰角为58°（A，B，C 在同一直线上），求建筑物 CD 的高度.（结果保留整数.参考数据：

$\sin 22^{\circ} \approx 0.37, \cos 22^{\circ} \approx 0.93, \tan 22^{\circ} \approx 0.40, \sin 58^{\circ} \approx 0.85, \cos 58^{\circ} \approx 0.53, \tan 58^{\circ} \approx 1.60$ ）



【答案】CD 的高度是 16 米.

【分析】设建筑物 CD 的高度为 xm，在 Rt△CBD 中，由于∠CBD=58°，用含 x 的代数式表示 BC，在 Rt△ACD 中，利用 22°的锐角三角函数求出 x，即可得到答案.

解：设建筑物 CD 的高度为 xm；

由 $\tan 58° = \frac{DC}{BC}$,

$\therefore BC = \frac{x}{1.60}$,

由 $\tan 22° = \frac{DC}{AC}$,

$\therefore DC = 0.40AC$,

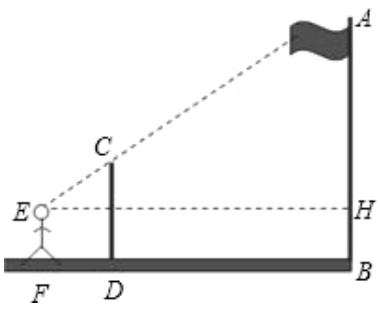
$\therefore x = 0.40(30 + \frac{x}{1.60})$

解得：$x = 16.$

答：CD 的高度是 16 米.

【点拨】本题考查的是解直角三角形的应用，掌握锐角三角函数的含义及应用是解题的关键.

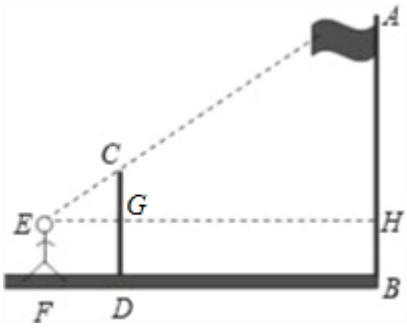
【变式 2】.如图，某数学兴趣小组的同学利用标杆测量旗杆（AB）的高度：将一根 5 米高的标杆（CD）竖在某一位置，有一名同学站在一处与标杆、旗杆成一条直线，此时他看到标杆顶端与旗杆顶端重合，另外一名同学测得站立的同学离标杆 3 米，离旗杆 30 米．如果站立的同学的眼睛距地面（EF）1.6 米，求旗杆的高度 AB.



【答案】35.6

【分析】过点 E 作 CG⊥AH 于点 H，交 CD 于点 G 得出△EGC∽△EHA，进而求出 AH 的长，进而求出 AB 的长.

解：过点 E 作 EH⊥AB 于点 H，交 CD 于点 G.



由题意可得 四边形 EFDG、GDHB 都是矩形，AB∥CD∥EF.

∴△AECG∽△EAH.

$\therefore \frac{AH}{CG}=\frac{EH}{EG}$.

由题意可得

EG=FD=3，GH=BD=30，CG=CD-GD=CD-EF=5-1.6=3.4.

$\therefore \frac{AH}{3.4}=\frac{30}{3}$.

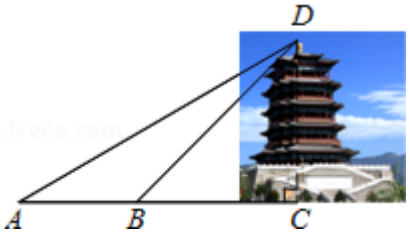
∴AH=34 米.

∴AH=AH+HB=34+1.6=35.6 米.

答：旗杆高 ED 为 35.6 米.

【点拨】此题主要考查了相似三角形的应用，根据相似三角形判定得出△ECG∽△EAH 是解题关键.

【变式 3】“永定楼”是门头沟区的地标性建筑，某中学九年级数学兴趣小组进行了测量它高度的社会实践活动. 如图，他们在 A 点测得顶端 D 的仰角∠DAC=30°，向前走了 46 米到达 B 点后，在 B 点测得顶端 D 的仰角∠DBC=45°. 求永定楼的高度 CD.（结果保留根号）



【答案】$23\sqrt{3}+23$

【分析】根据题意得出 DC=BC，进而利用 tan30°=$\frac{DC}{AC}$ 求出答案.

解：试题分析：

解：由题意可得：AB=46m，∠DBC=45°，

则 DC=BC，

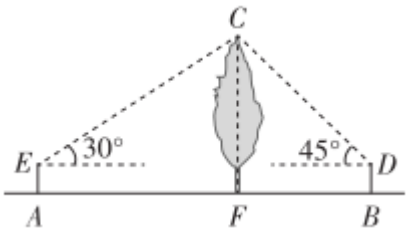
故 tan30°=$\frac{DC}{AC}=\frac{DC}{DC+46}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

解得：DC=$23\sqrt{3}+23$

答：永定楼的高度 CD 为$23\sqrt{3}+23$ m.

类型二、由两个直角三角形求高

例 2. **在一次课外综合实践活动中，甲、乙两位同学测量校园内的一棵大树的高度，他们分别在 A，B 两处用高度为1.5 m 的测角仪（AE 和 BD）测得大树顶部 C 的仰角分别为 30°，45°，两人间的水平距离(AB)为20 m，已知点 A，E，F，C，B，D 在同一竖直平面内，且 $FC\perp AB$，求大树的高度 CF.（结果保留根号）**



【答案】$\left(10\sqrt{3}-\frac{17}{2}\right)$m

【分析】连接 ED，交 FC 于点 G，在 Rt△CDG 和 Rt△CEG 中，求出公共边 CG 的长度，然后可求得 $CF=CG+GF$.

解：如答图，连接 ED，交 FC 于点 G，

由题可知四边形 $AEGF$，四边形 $BDGF$，四边形 $ABDG$ 是矩形，

$\therefore ED=AB=20$ m，$GF=AE=1.5$ m.

在 $Rt\triangle CDG$ 中，$\because\angle CDG=45°$，

$\therefore DG=\frac{CG}{\tan 45°}=CG$，

在 $Rt\triangle CEG$ 中，$\because\angle CEG=30°$，

$\therefore EG=\frac{CG}{\tan 30°}=\sqrt{3}CG$，

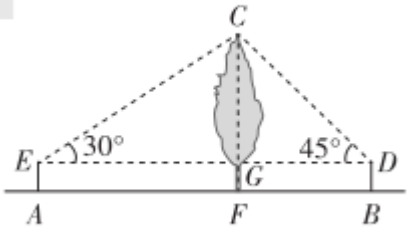
$\because EG+DG=ED$，

$\therefore CG+\sqrt{3}CG=20$.

解，得$CG=10\sqrt{3}-10$.

$\therefore CF=CG+GF=10\sqrt{3}-10+1.5=\left(10\sqrt{3}-\dfrac{17}{2}\right)(\mathrm{m})$.

答：大树CF的高度为$\left(10\sqrt{3}-\dfrac{17}{2}\right)\mathrm{m}$.



答图

【点拨】本题考查了解直角三角形的应用，解答本题的关键是根据仰角构造直角三角形，利用三角函数的知识求解.

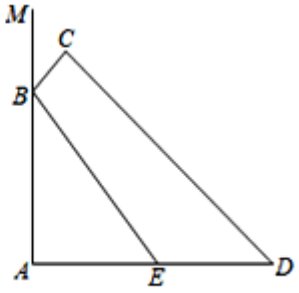
举一反三：

【变式 1】如图①，在我国古建筑的大门上常常悬挂着巨大的匾额，图②中的线段 *BC* 就是悬挂在墙壁 *AM* 上的某块匾额的截面示意图．已知 *BC*＝1 米，∠*MBC*＝37°．从水平地面点 *D* 处看点 *C* 的仰角∠*ADC*＝45°，从点 *E* 处看点 *B* 的仰角∠*AEB*＝53°，且 *DE*＝2.4 米.

（1）求点 *C* 到墙壁 *AM* 的距离；

（2）求匾额悬挂的高度 *AB* 的长．（参考数据：sin37°≈$\dfrac{3}{5}$，cos37°≈$\dfrac{4}{5}$，tan37°≈$\dfrac{3}{4}$）


①



②

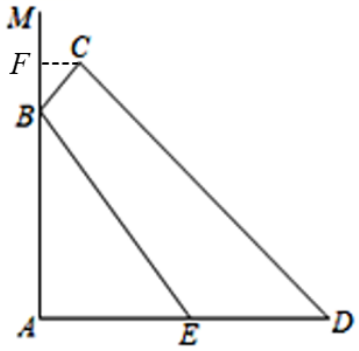
【答案】（1）点 *C* 到墙壁 *AM* 的距离为$\dfrac{3}{5}$米；（2）匾额悬挂的高度是 4 米.

【分析】

（1）过 C 作 CF⊥AM 于 F， 由 $BC=1,\angle MBC=37°$,结合 $\sin\angle MBC=\sin 37°=\frac{CF}{BC}$，从而可得答案；

（2）过 C 作 CH⊥AD 于 H，又 $CF\perp AM,MA\perp AD$， 则四边形 AHCF 是矩形，所以 AF=CH，CF=AH． 在 Rt△BCF 中，先求解 $BF=\frac{4}{5}$，再在 Rt△BAE 中，∠BEA=53°，求解 $AE=\frac{3}{4}AB$，再表示 $AD=AH+DH=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+AB$，或 $AD=AE+DE=\frac{3}{4}AB+2.4$,列方程，解方程可得答案．

解：（1）过 C 作 CF⊥AM 于 F，



在 Rt△BCF 中， $BC=1,\angle MBC=37°$,

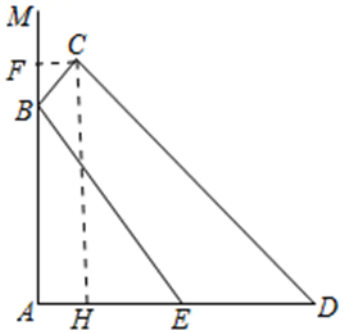
由 $\sin\angle MBC=\sin 37°=\frac{CF}{BC}$,

$\therefore CF=1\times\sin 37°=\frac{3}{5}$,

所以：点 C 到墙壁 AM 的距离为 $\frac{3}{5}$ 米．

（2）过 C 作 CH⊥AD 于 H，又 $CF\perp AM,MA\perp AD$,

则四边形 AHCF 是矩形，所以 AF=CH，CF=AH．



在 Rt△BCF 中， $BC=1,\angle MBC=37°$,

由 $\cos\angle MBC=\cos 37°=\frac{BF}{BC}$,

$\therefore BF = 1 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5},$

在 Rt△BAE 中，∠BEA=53°，

$\therefore \angle ABE = 90° - 53° = 37°,$

由 $\tan \angle ABE = \tan 37° = \frac{AE}{AB} = \frac{3}{4},$

$\therefore AE = \frac{3}{4} AB,$

在 Rt△CDH 中，∠CDH=45°，

$\therefore CH = DH = FA = \frac{4}{5} + AB,$

$\therefore AD = AH + DH = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + AB = \frac{7}{5} + AB,$

$\because AD = AE + DE = \frac{3}{4} AB + 2.4,$

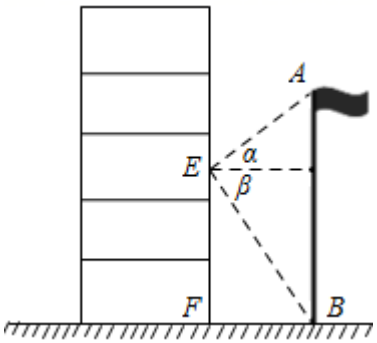
$\therefore \frac{7}{5} + AB = \frac{3}{4} AB + 2.4,$

$\therefore AB = 4.$

答：匾额悬挂的高度是 4 米.

【点拨】本题考查了矩形的判定与性质，解直角三角形的应用，掌握作出适当的辅助线构建直角三角形是解题的关键.

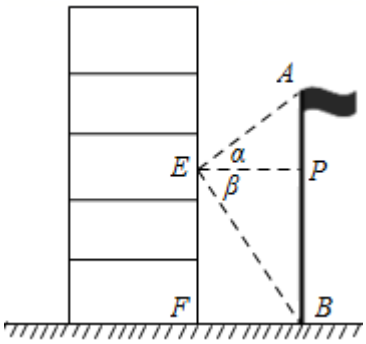
【变式 2】.**数学实践课上，同学们分组测量教学楼前国旗杆的高度．小明同学所在的组先设计了测量方案，然后开始测量了．他们全组分成两个测量队，分别负责室内测量和室外测量（如图）．室内测量组来到教室内窗台旁，在点 E 处测得旗杆顶部 A 的仰角 α 为 45°，旗杆底部 B 的俯角 β 为 60°．室外测量组测得 BF 的长度为 5 米，求旗杆 AB 的高度.**



【答案】$\left(5+5\sqrt{3}\right)$ 米

【分析】此题根据题意作 $PE \perp AB$，利用 $AP = EP \times \tan \angle \alpha$ 和 $PB = EP \times \tan \angle 60°$ 分别求出 PB，AP 即可求出 AB 的长.

解：过点 E 作 $PE \perp AB$ 于点 P，



在 $\mathrm{Rt}\triangle APE$ 中，$\angle APE=90°$，$\tan\angle\alpha=\dfrac{AP}{EP}$，$\angle\alpha=45°$，$PE=BF=5$，

$\therefore AP=EP\times\tan\angle\alpha=5\times\tan 45°=5$

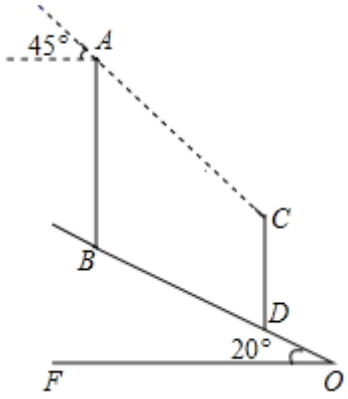
在 $\mathrm{Rt}\triangle PEB$ 中，$\angle\beta=60°$，$\tan\angle\beta=\dfrac{PB}{EP}$，

$\therefore PB=EP\times\tan\angle 60°=5\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

$\therefore AB=AP+BP=\left(5+5\sqrt{3}\right)$ 米.

【点拨】此题考查解直角三角形应用中利用锐角三角函数求高，利用图示找出相关量根据题意列式求解是关键.

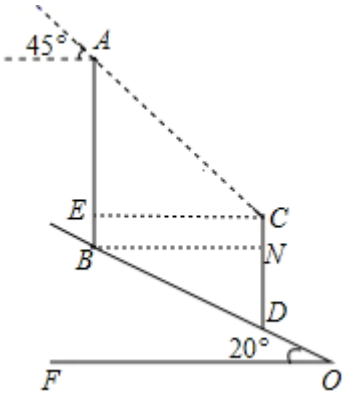
【变式 3】如图，在坡角为 20°的山坡上有一铁塔 *AB*、其正前方矗立着一大型广告牌，当阳光与水平线成 45°角时，测得铁塔 *AB* 落在斜坡上的影子 *BD*＝10 米，落在广告牌上的影子 *CD*＝5 米，已知 *AB*，*CD* 均与水平面垂直，请根据相关测量信息，求铁塔 *AB* 的高.（sin20°≈0.34，cos20°≈0.94，tan20°≈0.36）



【答案】铁塔 AB 的高约为 11 米.

【分析】过点 C 作 $CE\perp AB$ 于 E，过点 B 作 $BN\perp CD$ 于 N，在 $\mathrm{Rt}\triangle BND$ 中，分别求出 DN、BN 的长度，在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，求出 AE、CE 的长度，继而可求得 AB 的长度.

解：过点 C 作 $CE\perp AB$ 于 E，过点 B 作 $BN\perp CD$ 于 N，



在 Rt△*BND* 中，

∵∠*DBN*=20°，*BD*=10，

∴*DN*=*BD*·sin∠*DBN*≈10×0.34=3.4，

BN=*BD*·cos∠*DBN*≈10×0.94=9.4，

∵*AB*∥*CD*，*CE*⊥*AB*，*BN*⊥*CD*，

∴四边形 *BNCE* 为矩形，

∴*BN*=*CE*=9.4，*CN*=*BE*=*CD* - *DN*=1.6，

在 Rt△*ACE* 中，∠*ACE*=45°，

∴*AE*=*CE*=9.4，

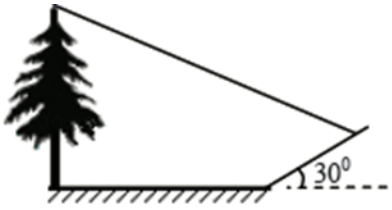
∴*AB*=9.4+1.6=11（米）.

答：铁塔 *AB* 的高约为 11 米.

【点拨】本题考查了解直角三角形的应用，解答本题的关键是根据题目所给的坡角构造直角三角形，利用三角函数的知识求解.

类型三、由多个直角三角形求高

例 3. **小明想测量一棵树的高度，他发现树的影子恰好落在地面和一斜坡上；如图，此时测得地面上的影长为 8 米，坡面上的影长为 4 米，已知斜坡的坡角为 30°，同一时刻，一根长为 1 米，垂直于地面旋转的标杆在地面上的影长为 2 米，求树的高度为多少米？**



【答案】树高为 $\left(6+\sqrt{3}\right)$ 米

【分析】延长 AC 交 BF 延长线于 D 点，则 BD 即为 AB 的影长，然后根据物长和影长

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/088062062040006054