专题 2　函数的图像与性质

考情解读

函数单调性的判断和应用及函数的奇偶性、周期性的应用，识图用图是高考的热点，题型既有选择题、填空题，又有解答题，与函数的概念、图象、性质综合在一起考查.

预计高考仍将综合考查函数性质，并能结合函数图象的特点，对各个性质进行综合运用，另外函数的性质还常常与向量、不等式、三角函数、导数等知识相结合，所以在备考过程中应加强这方面的训练.

重点知识梳理

知识点 1．函数

(1)映射：集合 A(A 中任意 x) $\xrightarrow{\text{对应法则 } f}$ 集合 B(B 中有唯一 y 与 A 中的 x 对应).

(2)函数：非空数集 A—→非空数集 B 的映射，其三要素：定义域 A、值域 C(C⊆B)、对应法则 f.

①求函数定义域的主要依据：

(Ⅰ)分式的分母不为零；

(Ⅱ)偶次方根被开方数不小于零；

(Ⅲ)对数函数的真数必须大于零；

(Ⅳ)指数函数和对数函数的底数必须大于零且不等于 1；

(Ⅴ)正切函数 $y=\tan x$ 中，x 的取值范围是 $x\in R$，且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$.

②求函数值域的方法：无论用什么方法求值域，都要优先考虑定义域，常用的方法有基本函数法、配方法、换元法、不等式法、函数的单调性法、函数的有界性法、导数法.

③函数图象在 x 轴上的正投影对应函数的定义域；函数图象在 y 轴上的正投影对应函数的值域.

知识点 2．函数的性质

(1)函数的奇偶性

如果对于函数 $y=f(x)$ 定义域内的任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$(或 $f(-x)=f(x)$)，那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数(或偶函数).

(2)函数的单调性

函数的单调性是函数的又一个重要性质．给定区间 D 上的函数$f(x)$，若对于任意 x_1、$x_2 \in D$，当 $x_1<x_2$ 时，都有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$)，则称$f(x)$在区间 D 上为单调增(或减)函数．反映在图象上，若函数$f(x)$是

区间 D 上的增(减)函数，则图象在 D 上的部分从左到右是上升(下降)的．如果函数$f(x)$在给定区间$(a，b)$上恒有$f'(x)>0(f'(x)<0)$，则$f(x)$在区间$(a，b)$上是增(减)函数，$(a，b)$为$f(x)$的单调增(减)区间.

判定单调性方法主要有定义法、图象法、导数法等.

(3)函数的周期性

设函数$y=f(x)$，$x\in D$，如果存在非零常数 T，使得对任意 $x\in D$，都有$f(x+T)=f(x)$，则函数$f(x)$为周期函数，T 为$y=f(x)$的一个周期.

(4)最值

一般地，设函数$y=f(x)$的定义域为 I，如果存在实数 M 满足：

①对于任意的 $x\in I$，都有$f(x)\leq M$　(或$f(x)\geq M$)；

②存在 $x_0\in I$，使$f(x_0)=M$，那么称 M 是函数$y=f(x)$的最大值(或最小值).

知识点 3．函数图象

(1)函数图象部分的复习应该解决好画图、识图、用图三个基本问题，即对函数图象的掌握有三方面的要求：

①会画各种简单函数的图象；

②能依据函数的图象判断相应函数的性质；

③能用数形结合的思想以图辅助解题.

(2)利用基本函数图象的变换作图

①平移变换：

$$y=f(x)\xrightarrow[h<0，左移|h|个单位]{h>0，右移|h|个单位}y=f(x-h)，$$

$$y=f(x)\xrightarrow[k<0，下移|k|个单位]{k>0，上移|k|个单位}y=f(x)+k.$$

②伸缩变换：

$$y=f(x)\xrightarrow[\omega>1\text{，横坐标缩短到原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍}]{0<\omega<1\text{，横坐标伸长到原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍}}y=f(\omega x),$$

$$y=f(x)\xrightarrow[A>1\text{，纵坐标伸长到原来的 }A\text{ 倍}]{0<A<1\text{，纵坐标缩短到原来的 }A\text{ 倍}}y=Af(x).$$

③对称变换：

$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于 } x \text{ 轴对称}} y=-f(x)$，

$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于 } y \text{ 轴对称}} y=f(-x)$，

$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于直线 } x=a \text{ 对称}} y=f(2a-x)$，

$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于原点对称}} y=-f(-x)$.

高频考点突攻

高频考点一　函数表示及定义域、值域

例 1、【2019 年高考江苏】函数 $y=\sqrt{7+6x-x^2}$ 的定义域是__________________。

【举一反三】（2018 年江苏卷）函数 $f(x)=\sqrt{\log_2 x-1}$ 的定义域为____________________。

【变式探究】 (1)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)$，则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为(　　)

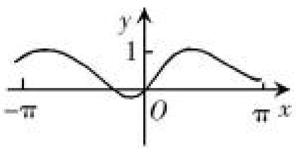
A．$(-1,1)$　　B．$\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$　　C．$(-1,0)$　　D．$\left[\frac{1}{2},1\right]$

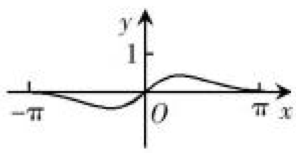
(2)设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\log_2(2-x), & x<1,\\ 2^{x-1}, & x\geq 1,\end{cases}$ 则 $f(-2)+f(\log_2 12)=$(　　)

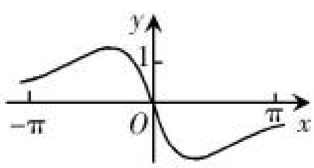
A．3　　B．6　　C．9　　D．12

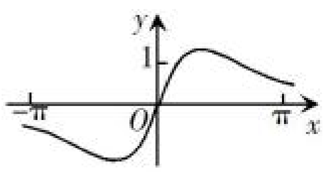
高频考点二　函数的奇偶性、对称性

例 2、【2019 年高考全国Ⅰ卷】函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致为(　　)

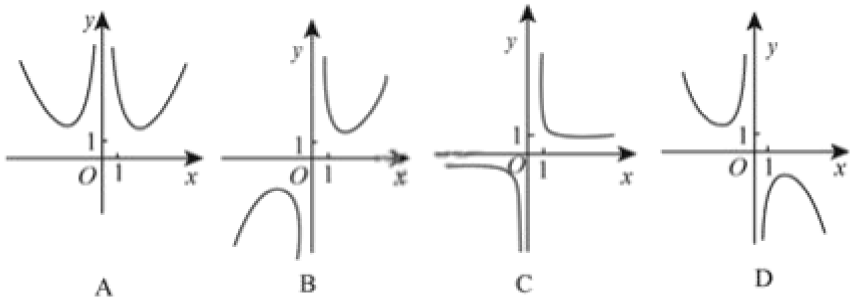
A．

B．

C．

D．

【举一反三】（2018 年全国 II 卷）函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x^2}$ 的图像大致为(　　)



A. A　　B. B　　C. C　　D. D

【变式探究】(1)若函数$f(x)=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$为偶函数，则 $a=$________。

(2)设函数$f(x)$，$g(x)$的定义域都为 **R**，且$f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，则下列结论中正确的是(　　)

A．$f(x)g(x)$是偶函数

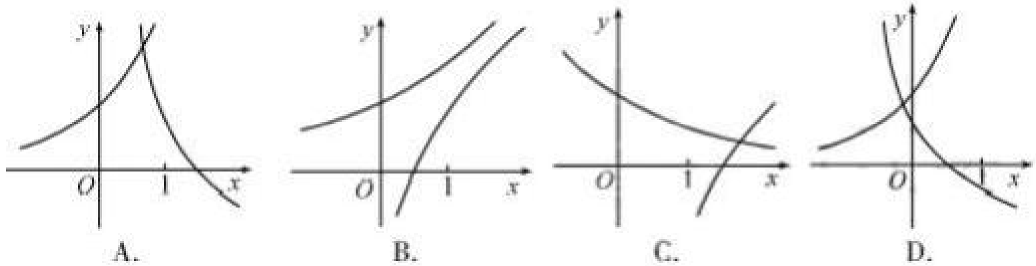
B．$f|(x)|g(x)$是奇函数

C．$f(x)|g(x)|$是奇函数

D．$f|(x)g(x)|$是奇函数

高频考点三　函数单调性、周期性与对称性

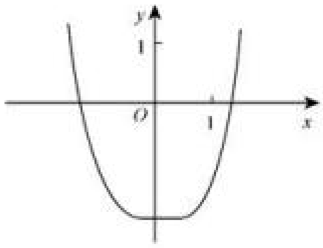
例 3、【2019 年高考浙江】在同一直角坐标系中，函数$y=\dfrac{1}{a^x}$，$y=\log_a(x+\dfrac{1}{2})$ ($a>0$，且 $a\neq1$)的图象可能是(　　)



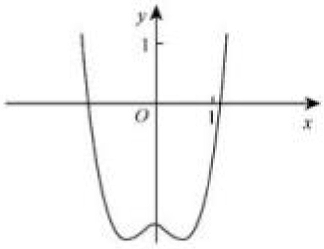
【举一反三】（2018 年全国 II 卷）若$f(x)=\cos x-\sin x$在$[-a,a]$是减函数，则a的最大值是(　　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. π

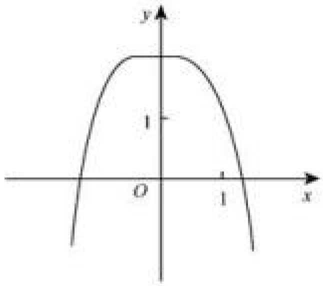
【举一反三】（2018 年全国III卷）函数$y=-x^4+x^2+2$的图像大致为(　　)



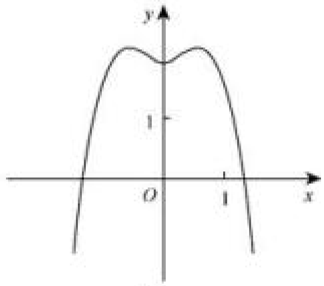
A



B



C



D

A. A　　　　B. B　　　　C. C　　　　D. D

【方法技巧】

1.基本法是利用单调性化简不等式．速解法是特例检验法.

2．求函数的单调区间与确定单调性的方法一样．常用的方法有：

(1)利用已知函数的单调性，即转化为已知函数的和、差或复合函数，求单调区间．(2)定义法：先求定义域，再利用单调性定义确定单调区间．(3)图象法：如果$f(x)$是以图象形式给出的，或者$f(x)$的图象易作出，则可由图象的直观性写出它的单调区间．(4)导数法：利用导数取值的正负确定函数的单调区间.

3．若函数$f(x)$在定义域上(或某一区间上)是增函数，则$f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow x_1<x_2$.利用上式，可以去掉抽象函数的符号，将函数不等式(或方程)的求解化为一般不等式(或方程)的求解，但无论如何都必须在定义域内或给定的范围内进行.

【变式探究】(1)偶函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=2$对称，$f(3)=3$，则$f(-1)=$________。

(2)已知函数$f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数，且在区间$[0，+\infty)$上单调递增．若实数 a 满足$f(\log_2 a)+f(\log_{\frac{1}{2}} a)\le 2f(1)$，则 a 的取值范围是(　　)

A. $[1,2]$　　　　B. $\left[0，\frac{1}{2}\right]$

C. $\left[\frac{1}{2}，2\right]$　　　　D．$(0,2]$

高频考点四　比较函数值的大小

例 4、【2019 年高考天津】已知 $a = \log_5 2$，$b = \log_{0.5} 0.2$，$c = 0.5^{0.2}$，则 a, b, c 的大小关系为（　）

A．$a < c < b$　　　　B．$a < b < c$

C． $b < c < a$　　　　　　　　　　　　D． $c < a < b$

【举一反三】（2018 年天津卷） 已知$a=\log_2 e$，$b=\ln 2$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则 a，b，c 的大小关系为(　)

A. $a>b>c$　B. $b>a>c$　C. $c>b>a$　D. $c>a>b$

【变式探究】(1)设 $a=\log_3 2$，$b=\log_5 2$，$c=\log_2 3$，则(　　)

A．$a>c>b$　　　B．$b>c>a$

C．$c>b>a$　　　D．$c>a>b$

(2)已知 $x=\ln\pi$，$y=\log_5 2$，$z=e^{-\frac{1}{2}}$，则(　　)

A．$x<y<z$　B．$z<x<y$

C．$z<y<x$　D．$y<z<x$

高频考点五　指数函数、对数函数图象的变换与应用

例 5、【2019 年高考全国 I 卷】已知 $a=\log_2 0.2$，$b=2^{0.2}$，$c=0.2^{0.3}$，则(　　)

A． $a<b<c$　　　　　　B． $a<c<b$

C． $c<a<b$　　　　　　D． $b<c<a$

【举一反三】【2017 课标 1】设 x、y、z 为正数，且 $2^x=3^y=5^z$，则(　　)

A．$2x<3y<5z$　　B．$5z<2x<3y$　　C．$3y<5z<2x$　　D．$3y<2x<5z$

【变式探究】若关于 x 的不等式 $4a^{x-1}<3x-4(a>0$，且 $a\neq1)$对于任意的 $x>2$ 恒成立，则 a 的取值范围为(　　)

A.$\left(0, \frac{1}{2}\right]$　　B.$\left(0, \frac{1}{2}\right)$

C．$[2，+\infty)$　D．$(2，+\infty)$

真题感怪

1．【2019 年高考全国 I 卷】已知 $a=\log_2 0.2$，$b=2^{0.2}$，$c=0.2^{0.3}$，则(　　)

A． $a<b<c$　　　　　　B． $a<c<b$

C． $c<a<b$　　　　　　D． $b<c<a$

2．【2019 年高考天津】已知 $a=\log_5 2$， $b=\log_{0.5} 0.2$， $c=0.5^{0.2}$，则 a,b,c 的大小关系为(　　)

A． $a < c < b$　　　　B． $a < b < c$

C． $b < c < a$　　　　D． $c < a < b$

3．【2019 年高考全国Ⅱ卷】若 $a>b$，则(　　)

A． $\ln(a-b)>0$　　　　B． $3^a<3^b$

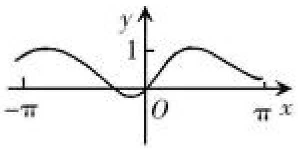
C． $a^3-b^3>0$　　　　D． $|a|>|b|$

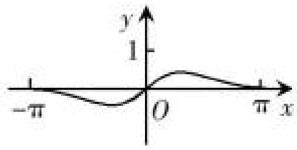
4．【2019 年高考北京】在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述．两颗星的星等与亮度满足 $m_2-m_1=\frac{5}{2}\lg\frac{E_1}{E_2}$，其中星等为 m_k 的星的亮度为 E_k（k=1，2）． 已知太阳的星等是−26.7，天狼星的星等是−1.45，则太阳与天狼星的亮度的比值为(　　)

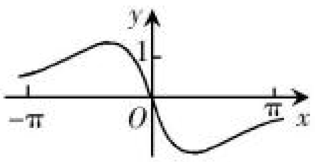
A． $10^{10.1}$　　　　B． 10.1

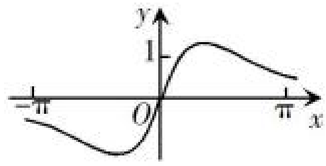
C． lg10.1　　　　D． $10^{-10.1}$

5．【2019 年高考全国Ⅰ卷】函数 $f(x)=\frac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致为(　　)

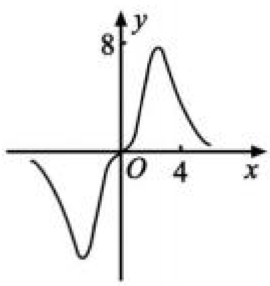
A．


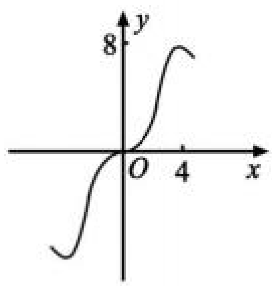
B．


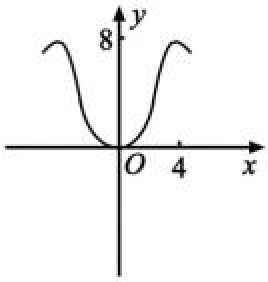
C．


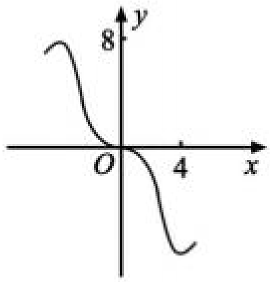
D．


6．【2019 年高考全国Ⅲ卷】函数 $y=\frac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$ 在 $[-6,6]$ 的图像大致为(　　)

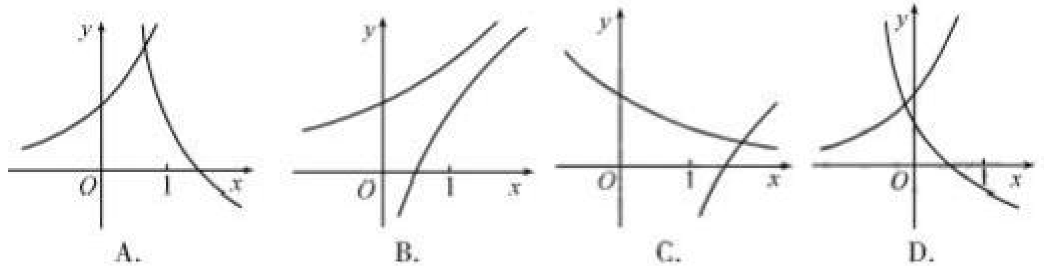
A．


B．


C. 

D. 

7. 【2019 年高考浙江】在同一直角坐标系中，函数 $y =$ 1　$y = \log_a(x + \frac{1}{2})$ (a>0，且 a≠1)的图象可能是(　　)



8. 【2019 年高考全国Ⅱ卷】2019 年 1 月 3 日嫦娥四号探测器成功实现人类历史上首次月球背面软着陆，我国航天事业取得又一重大成就，实现月球背面软着陆需要解决的一个关键技术问题是地面与探测器的通讯联系．为解决这个问题，发射了嫦娥四号中继星“鹊桥”，鹊桥沿着围绕地月拉格朗日 L_2 点的轨道运行．L_2 点是平衡点，位于地月连线的延长线上．设地球质量为 M_1， 月球质量为 M_2， 地月距离为 R，L_2 点到月球的距离为 r，根据牛顿运动定律和万有引力定律，r 满足方程：$\frac{M_1}{(R+r)^2} + \frac{M_2}{r^2} = (R+r)\frac{M_1}{R^3}$.设$X = \frac{r}{R}$，由于X 的值很小，因此在近似计算中$\frac{3\alpha^3+3\alpha^4+\alpha^5}{(1+\alpha)^2} \sim 3X^3$，则 r 的近似值为(　　)

A．$\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}R$　　B．$\sqrt{\frac{M_2}{2M_1}}R$

C．$\sqrt[3]{\frac{3M_2}{M_1}}R$　　D．$\sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}R$

9．【2019 年高考全国Ⅲ卷】设$f(x)$ 是定义域为 **R** 的偶函数，且在(0,+伪) 单调递减，则(　　)

A．f（$\log_3\frac{1}{4}$）>f（$2^{-\frac{3}{2}}$）>f（$2^{-\frac{2}{3}}$）

B．f（$\log_3\frac{1}{4}$）>f（$2^{-\frac{2}{3}}$）>f（$2^{-\frac{3}{2}}$）

C．f（$2^{-\frac{3}{2}}$）>f（$2^{-\frac{2}{3}}$）>f（$\log_3\frac{1}{4}$）

D．f（$2^{-\frac{2}{3}}$）>f（$2^{-\frac{3}{2}}$）>f（$\log_3\frac{1}{4}$）

10．【2019 年高考全国Ⅱ卷】设函数$f(x)$ 的定义域为 **R**，满足$f(x+1)=2f(x)$，且当$x\in(0,1]$时，$f(x)=x(x-1)$．若对任意$x\in(-\infty,m]$，都有$f(x)\geq-\frac{8}{9}$，则 m 的取值范围是(　　)

A．$\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$　　　　B．$\left(-\infty,\frac{7}{3}\right]$

C．$\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$　　　　D．$\left(-\infty,\frac{8}{3}\right]$

11．【2019 年高考浙江】已知 $a,b \in \mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases} x, x<0 \\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+ax, x>0 \end{cases}$．若函数 $y=f(x)-ax-b$ 恰有 3 个零点，则(　　)

A．$a<-1$，$b<0$　　　　B．$a<-1$，$b>0$

C．$a>-1$，$b<0$　　　　D．$a>-1$，$b>0$

12．【2019 年高考江苏】函数 $y=\sqrt{7+6x-x^2}$ 的定义域是____▲____。

13．【2019 年高考全国 II 卷】已知 $f(x)$ 是奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=-\mathrm{e}^{ax}$．若 $f(\ln 2)=8$，则 $a=$__________。

$f(x)=-\mathrm{e}^{ax}$ 14．【2019 年高考北京】设函数（a 为常数）．若 f（x）为奇函数，则 a=_________；若 f（x）是 **R** 上的增函数，则 a 的取值范围是___________。

15．【2019 年高考浙江】已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=ax^3-x$，若存在 $t\in\mathbf{R}$，使得 $|f(t+2)-f(t)|<\frac{2}{3}$，则实数 a 的最大值是___________。

16．【2019 年高考北京】李明自主创业，在网上经营一家水果店，销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃，价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒．为增加销量，李明对这四种水果进行促销：一次购买水果的总价达到 120 元，顾客就少付 x 元．每笔订单顾客网上支付成功后，李明会得到支付款的 80%．

①当 x=10 时，顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒，需要支付__________元；

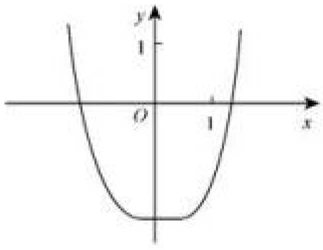
②在促销活动中，为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则 x 的最大值为__________。

17．【2019 年高考江苏】设 $f(x), g(x)$ 是定义在 **R** 上的两个周期函数，$f(x)$ 的周期为 4，$g(x)$ 的周

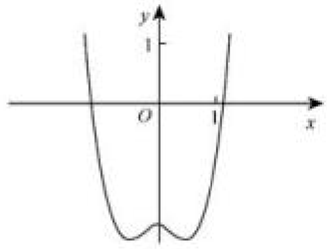
期为 2，且 $f(x)$ 是奇函数.当 $x = (0,2]$ 时，$f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$，$g(x) = \begin{cases} k(x+2), & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < x < 2 \end{cases}$，其中 $k>0$.

若在区间(0，9]上，关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有 8 个不同的实数根，则 k 的取值范围是__▲__。

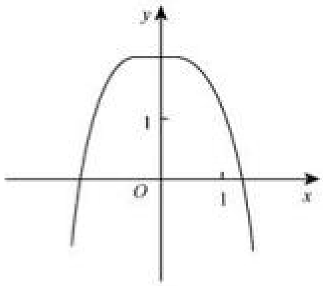
1. （2018 年全国Ⅲ卷）函数 $y=-x^4+x^2+2$ 的图像大致为(　　)



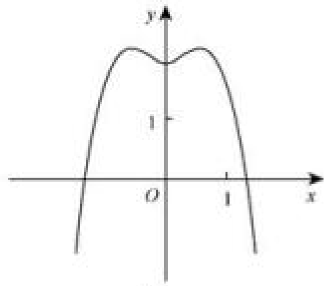
A



B



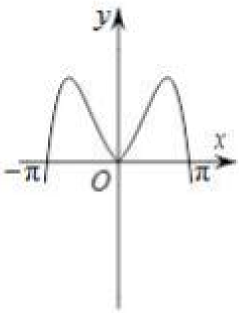
C

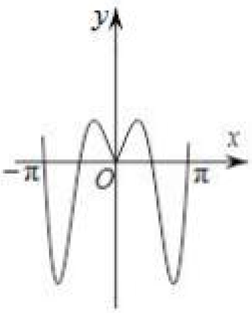


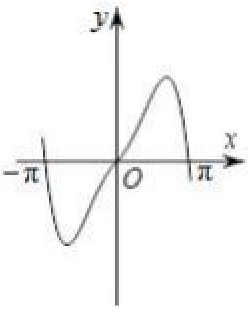
D

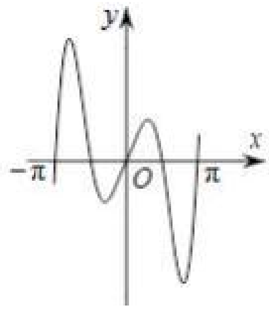
A. A　　B. B　　C. C　　D. D

2. （2018 年浙江卷）函数 $y=2^{|x|}\sin 2x$ 的图象可能是(　　)

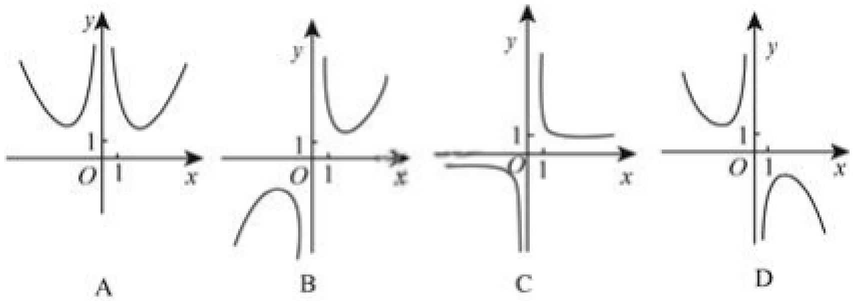
A. 

B. 

C. 

D. 

3. （2018 年全国 II 卷）函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x^2}$ 的图像大致为(　　)



A. A　　B. B　　C. C　　D. D

4．（2018 年全国Ⅱ卷）若$f(x)=\cos x-\sin x$在$[-a,a]$是减函数，则a的最大值是(　　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. π

5. （2018 年天津卷） 已知$a=\log_2 e$，$b=\ln 2$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则 a，b，c 的大小关系为(　　)

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

6. （2018 年全国 I 卷） 已知函数$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0, \\ \ln x, & x>0, \end{cases}$ $g(x)=f(x)+x+a$．若 g（x）存在 2 个零点，则 a 的取值范围是(　　)

A. [–1，0）　　B. [0，+∞）　　C. [–1，+∞）　　D. [1，+∞）

7. （2018 年全国 I 卷）设函数$f(x)=x3+(a-1)x2+ax$，若$f(x)$为奇函数，则曲线$y=f(x)$在点$(0,0)$处的切线方程为(　　)

A. $y=-2x$　　B. $y=-x$　　C. $y=2x$　　D. $y=x$

8. （2018 年全国Ⅲ卷）设$a=\log_{0.2}0.3$，b=10920.3，则(　　)

A. $a+b<ab<0$　　B. $ab<a+b<0$

C. $a+b<0<ab$　　D. $ab<0<a+b$

9. （2018 年全国Ⅱ卷） 已知$f(x)$是定义域为$(-\infty,+\infty)$的奇函数，满足$f(1-x)=f(1+x)$．若f()=2，则 f()+(2)+f(3) +…+f(50)=(　　)

A.-50　　B. 0　　C. 2　　D. 50

1.【2017 课标 1，理 5】函数$f(x)$ 在(-伪,+伪) 单调递减，且为奇函数．若 $f(1)=-1$，则满足 $-1<f(x-2)<1$ 的x 的取值范围是(　　)

A．$[-2,2]$　　B．$[-1,1]$　　C．$[0,4]$　　D．$[1,3]$

2.【2017 课标 1，理 11】设 x、y、z 为正数，且 $2^x = 3^y = 5^z$，则(　　)

A．$2x<3y<5z$　　B．$5z<2x<3y$　　C．$3y<5z<2x$　　D．$3y<2x<5z$

3.【2017 北京，理 5】已知函数 $f(x)=3^x-(\frac{1}{3})^x$，则 $f(x)$ (　　)

（A）是奇函数，且在 R 上是增函数　　　　（B）是偶函数，且在 R 上是增函数

（C）是奇函数，且在 R 上是减函数　　　　（D）是偶函数，且在 R 上是减函数

4.【2017 山东，理 10】已知当 $x\in[0,1]$ 时，函数 $y=(mx-1)^2$ 的图象与 $y=\sqrt{x}+m$ 的图象有且只有一个交点，则正实数 m 的取值范围是(　　)

（A）$(0,1]\cup[2\sqrt{3},+\infty)$　　　　（B）$(0,1]\cup[3,+\infty)$

（C）$(0,\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{3},+\infty)$　　　　（D）$(0,\sqrt{2}]\cup[3,+\infty)$

5.【2017 天津，理 6】已知奇函数 $f(x)$ 在 R 上是增函数，$g(x)=xf(x)$.若 $a=g(-\log_2 5.1)$，$b=g(2^{0.8})$，$c=g(3)$，则 a，b，c 的大小关系为(　　)

（A）$a<b<c$　（B）$c<b<a$　（C）$b<a<c$　（D）$b<c<a$

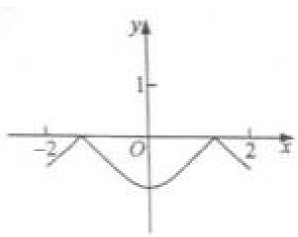
1.【2016 高考新课标 3】已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$，$b=4^{\frac{2}{5}}$，$c=25^{\frac{1}{3}}$，则(　　)

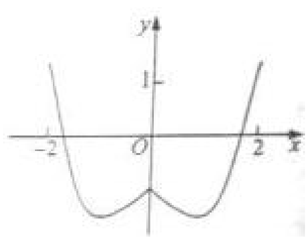
（A）$b<a<c$　（B）$a<b<c$　（C）$b<c<a$　（D）$c<a<b$

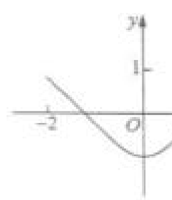
2.【2016 年高考北京】已知 x，$y\in R$，且 $x>y>0$，则(　　)

A. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}>0$　B. $\sin x-\sin y>0$　C. $(\frac{1}{2})^x-(\frac{1}{2})^y<0$　D. $\ln x+\ln y>0$

3.【2016 高考新课标 1 卷】函数 $y=2x^2-e^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 的图像大致为(　　)

(A) 

(B) 

(C) 

4.【2016

高考新课标 2】已知函数$f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足$f(-x) = 2 - f(x)$，若函数 $y =$

图像的交点为$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$, 则 $\sum_{i=1}^{m}(x_i + y_i) =$ （　　）

与 $y = f(x)$

（A）0　　　　　　（B）m　　　　　　（C）$2m$　　　　　　（D）$4m$

5.【2016 年高考四川】已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的周期为 2 的奇函数，当 0＜x＜1 时，$f(x)=4^x$，则 $f(-\frac{5}{2})+f(1)=$____________。

6.【2016 高考浙江】 已知 $a>b>1$.若 $\log_a b+\log_b a=\frac{5}{2}$，$a^b=b^a$，则 $a=$____，$b=$_____。

7.【2016 高考天津】已知 $f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数，且在区间（$-\infty$，0）上单调递增.若实数 a 满足 $f(2^{|a-1|})>f(-\sqrt{2})$，则 a 的取值范围是______。

8.【2016 年高考四川】在平面直角坐标系中，当 $P(x，y)$不是原点时，定义 P 的“伴随点”为 $P'(\frac{y}{x^2+y^2},\frac{-x}{x^2+y^2})$；当 P 是原点时，定义 P 的“伴随点”为它自身，平面曲线 C 上所有点的“伴随点”所构成的曲线 C' 定义为曲线 C 的“伴随曲线”.现有下列命题：

①若点 A 的“伴随点”是点 A'，则点 A' 的“伴随点”是点 A

②单位圆的“伴随曲线”是它自身；

③若曲线 C 关于 x 轴对称，则其“伴随曲线” C' 关于 y 轴对称；

④一条直线的“伴随曲线”是一条直线.

其中的真命题是_____________（写出所有真命题的序列）。

9.【2016 高考山东】已知函数 $f(x)$的定义域为 **R**.当 $x<0$ 时，$f(x)=x^3-1$；当 $-1<x<1$ 时，$f(-x)=-f(x)$；当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f(x+\frac{1}{2})=f(x-\frac{1}{2})$.则 $f(6)=$

（A）−2　　　　　　（B）−1　　　　　　（C）0　　　　　　（D）2

10.【2016 高考天津】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+(4a-3)x+3a, & x<0,\\ \log_a(x+1)+1, & x\geq 0\end{cases}$（$a>0$,且 $a\neq 1$）在 **R** 上单调递减，且关于 x 的方程恰好有两个不相等的实数解，则 a 的取值范围是（　　）

（A）$(0,\frac{2}{3}]$　（B）$[\frac{2}{3},\frac{3}{4}]$　　（C）$[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\cup\{\frac{3}{4}\}$（D）$[\frac{1}{3},\frac{2}{3})\cup\{\frac{3}{4}\}$

11.【2016 高考江苏卷】设 $f(x)$ 是定义在 R 上且周期为 2 的函数，在区间 $[-1,1)$ 上，

$f(x)=\begin{cases}x+a, & -1<x<0,\\ \left|\frac{2}{5}-x\right|, & 0<x<1,\end{cases}$ 其中$a\in\mathbf{R}$. 若$f(-\frac{5}{2})=f(\frac{9}{2})$ ，则$f(5a)$ 的值是___▲___。

12.【2016 高考江苏卷】函数$y=\sqrt{3-2x-x^2}$的定义域是____▲____。

13.【2016年高考北京】设函数$f(x)=\begin{cases} x^3-3x, & x\le a \\ -2x, & x>a \end{cases}$.

①若 $a=0$，则$f(x)$ 的最大值为______________；

②若$f(x)$ 无最大值，则实数 a 的取值范围是________。

专题 2　函数的图像与性质

考情解读

函数单调性的判断和应用及函数的奇偶性、周期性的应用，识图用图是高考的热点，题型既有选择题、填空题，又有解答题，与函数的概念、图象、性质综合在一起考查.

预计高考仍将综合考查函数性质，并能结合函数图象的特点，对各个性质进行综合运用，另外函数的性质还常常与向量、不等式、三角函数、导数等知识相结合，所以在备考过程中应加强这方面的训练.

重点知识梳理

知识点 1．函数

(1)映射：集合 A(A 中任意 x)集合 B(B 中有唯一 y 与 A 中的 x 对应).

(2)函数：非空数集 A—→非空数集 B 的映射，其三要素：定义域 A、值域 C(C⊆B)、对应法则 f.

①求函数定义域的主要依据：

(Ⅰ)分式的分母不为零；

(Ⅱ)偶次方根被开方数不小于零；

(Ⅲ)对数函数的真数必须大于零；

(Ⅳ)指数函数和对数函数的底数必须大于零且不等于 1；

(Ⅴ)正切函数 $y=\tan x$ 中，x 的取值范围是 $x\in R$，且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$.

②求函数值域的方法：无论用什么方法求值域，都要优先考虑定义域，常用的方法有基本函数法、配方法、换元法、不等式法、函数的单调性法、函数的有界性法、导数法.

③函数图象在 x 轴上的正投影对应函数的定义域；函数图象在y 轴上的正投影对应函数的值域.

知识点 2．函数的性质

(1)函数的奇偶性

如果对于函数$y=f(x)$定义域内的任意一个 x，都有$f(-x)=-f(x)$(或$f(-x)=f(x)$)，那么函数$f(x)$就叫做奇函数(或偶函数).

(2)函数的单调性

函数的单调性是函数的又一个重要性质．给定区间 D 上的函数$f(x)$，若对于任意 x_1、$x_2 \in D$，当 $x_1<x_2$ 时，都有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$)，则称$f(x)$在区间 D 上为单调增(或减)函数．反映在图象上，若函数$f(x)$是

区间 D 上的增(减)函数，则图象在 D 上的部分从左到右是上升(下降)的．如果函数$f(x)$在给定区间$(a，b)$上恒有$f'(x)>0$($f'(x)<0$)，则$f(x)$在区间$(a，b)$上是增(减)函数，$(a，b)$为$f(x)$的单调增(减)区间.

判定单调性方法主要有定义法、图象法、导数法等.

(3)函数的周期性

设函数$y=f(x)$，$x\in D$，如果存在非零常数 T，使得对任意 $x\in D$，都有$f(x+T)=f(x)$，则函数$f(x)$为周期函数，T 为$y=f(x)$的一个周期.

(4)最值

一般地，设函数$y=f(x)$的定义域为 I，如果存在实数 M 满足：

①对于任意的 $x\in I$，都有$f(x)\leq M$ (或$f(x)\geq M$)；

②存在 $x_0\in I$，使$f(x_0)=M$，那么称 M 是函数$y=f(x)$的最大值(或最小值).

知识点 3．函数图象

(1)函数图象部分的复习应该解决好画图、识图、用图三个基本问题，即对函数图象的掌握有三方面的要求：

①会画各种简单函数的图象；

②能依据函数的图象判断相应函数的性质；

③能用数形结合的思想以图辅助解题.

(2)利用基本函数图象的变换作图

①平移变换：

$$y=f(x)\xrightarrow[h<0，左移|h|个单位]{h>0，右移|h|个单位}y=f(x-h)，$$

$$y=f(x)\xrightarrow[k<0，下移|k|个单位]{k>0，上移|k|个单位}y=f(x)+k.$$

②伸缩变换：

$$y=f(x)\xrightarrow[\omega>1,\text{横坐标缩短到原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍}]{0<\omega<1,\text{横坐标伸长到原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍}}y=f(\omega x),$$

$$y=f(x)\xrightarrow[A>1,\text{纵坐标伸长到原来的}A\text{倍}]{0<A<1,\text{纵坐标缩短到原来的}A\text{倍}}y=Af(x).$$

③对称变换：

$y=f(x)y=-f(x)$，

$y=f(x)y=f(-x)$，

$y=f(x)y=f(2a-x)$，

$y=f(x)y=-f(-x)$.

高频考点突破

高频考点一　函数表示及定义域、值域

例 1、【2019 年高考江苏】函数 $y=\sqrt{7+6x-x^2}$ 的定义域是____________________。

【答案】$[-1,7]$

【解析】由题意得到关于 x 的不等式，解不等式可得函数的定义域。

由已知得 $7+6x-x^2\geq 0$，即 $x^2-6x-7\leq 0$，解得 $-1\leq x\leq 7$，故函数的定义域为 $[-1,7]$。

【举一反三】（2018 年江苏卷）函数 $f(x)=\sqrt{\log_2 x-1}$ 的定义域为____________________。

【答案】$[2，+\infty)$

【解析】要使函数 $f(x)$ 有意义，则 $\log_2 x-1\geq 0$，解得 $x\geq 2$，即函数 $f(x)$ 的定义域为 $[2,+\infty)$。

【变式探究】（1）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)$，则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为(　　)

A．$(-1,1)$　　B．$\left(-1，-\frac{1}{2}\right)$　　C．$(-1,0)$　　D．$\left(\frac{1}{2}，1\right)$

【解析】由已知得 $-1<2x+1<0$，解得 $-1<x<-\frac{1}{2}$，所以函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 $\left(-1，-\frac{1}{2}\right)$，选 B。

【答案】B

(2)设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\log_2(2-x), & x<1,\\ 2^{x-1}, & x\geq 1,\end{cases}$ 则 $f(-2)+f(\log_2 12)=$(　　)

A．3　　B．6　　C．9　　D．12

【解析】∵$-2<1$，∴$f(-2)=1+\log_2[2-(-2)]=3$；

∵$\log_2 12>1$，∴$f(\log_2 12)=2^{\log_2 12-1}=2^{\log_2 6}=6$.

∴$f(-2)+f(\log_2 12)=9$.

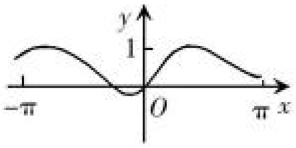
速解法：由 $f(-2)=3$，∴$f(-2)+f(\log_2 12)>3$ 排除 A.

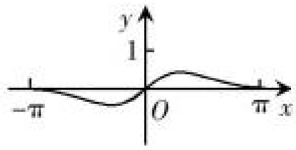
由于 $\log_2 12>1$，要用 $f(x)=2^{x-1}$ 计算，则 $f(\log_2 12)$ 为偶数，∴$f(-2)+f(\log_2 12)$ 为奇数，只能选 C。

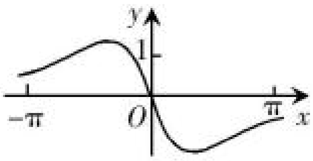
【答案】C

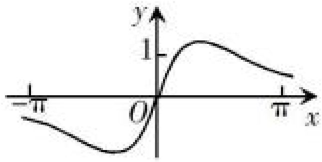
高频考点二　函数的奇偶性、对称性

例 2、【2019 年高考全国Ⅰ卷】函数$f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$在$[-\pi,\pi]$的图像大致为(　　)

A. 

B. 

C. 

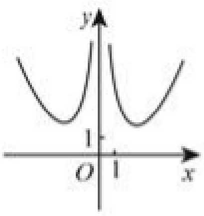
D. 

【答案】D

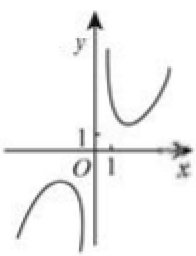
【解析】由$f(-x)=\dfrac{\sin(-x)+(-x)}{\cos(-x)+(-x)^2}=\dfrac{-\sin x-x}{\cos x+x^2}=-f(x)$，得$f(x)$是奇函数，其图象关于原点对称.

又$f(\frac{\pi}{2})=\dfrac{1+\frac{\pi}{2}}{(\frac{\pi}{2})^2}=\dfrac{4+2\pi}{\pi^2}>1$，$f(\pi)=\dfrac{\pi}{-1+\pi^2}>0$，可知应为 D 选项中的图象，故选 D。

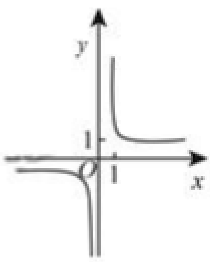
【举一反三】（2018 年全国 II 卷）函数$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x^2}$的图像大致为(　　)



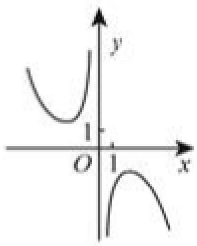
A



B



C



D

A. A　　B. B　　C. C　　D. D

【答案】B

【解析】$\because x\neq 0, f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{x^2}=-f(x)\therefore f(x)$为奇函数，舍去 A, $\because f(1)=e-e^{-1}>0\therefore$舍去 D;

$\because f'(x)=\dfrac{(e^x+e^{-x})x^2-(e^x-e^{-x})2x}{x^4}=\dfrac{(x-2)e^x+(x+2)e^{-x}}{x^3}\therefore x>2, f'(x)>0$,

所以舍去 C；因此选 B.

【变式探究】(1)若函数$f(x)=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$为偶函数，则 $a=$________。

【解析】由已知得$f(-x)=f(x)$，

即$-x\ln(\sqrt{a+x^2}-x)=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$，则 $\ln(x+\sqrt{a+x^2})+\ln(\sqrt{a+x^2}-x)=0$，

$\therefore \ln[(\sqrt{a+x^2})^2-x^2]=0$，得 $\ln a=0$，

$\therefore a=1$.

【答案】1

(2)设函数$f(x)$，$g(x)$的定义域都为 **R**，且$f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，则下列结论中正确的是(　　)

A．$f(x)g(x)$是偶函数

B．$f|(x)|g(x)$是奇函数

C．$f(x)|g(x)|$是奇函数

D．$f|(x)g(x)|$是奇函数

【解析】$y=f(x)$是奇函数，则$y=f|(x)|$为偶函数.

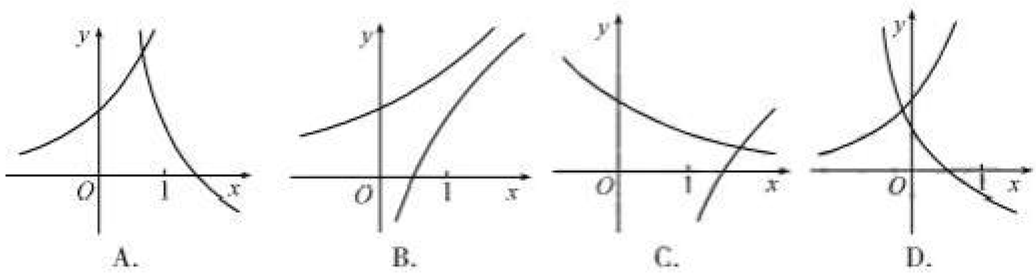
故$f(x)\cdot g(x)=$奇，A 错，$f|(x)|g(x)=$偶，B 错.

$f(x)|g(x)|=$奇，C 正确.

【答案】C

高频考点三　函数单调性、周期性与对称性

例 3、【2019 年高考浙江】在同一直角坐标系中，函数$y=\dfrac{1}{a^x}$，$y=\log_a(x+\dfrac{1}{2})$ $(a>0$，且 $a\neq1)$的图象可能是(　　)



【答案】D

【解析】当$0<a<1$时，函数$y=a^x$ 的图象过定点$(0,1)$且单调递减，则函数$y=\dfrac{1}{a^x}$的图象过定点$(0,1)$且单调递增，函数$y=\log_a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$的图象过定点$(\dfrac{1}{2},0)$且单调递减，D 选项符合；

当$a>1$时，函数$y=a^x$ 的图象过定点$(0,1)$且单调递增，则函数$y=\dfrac{1}{a^x}$的图象过定点$(0,1)$且单调递

减，函数 $y = \log_a (| (x + \frac{1}{2}\right)$ 的图象过定点 $(\frac{1}{2},0)$ 且单调递增，各选项均不符合。综上，选 D。

【举一反三】（2018 年全国 II 卷）若$f(x)=\cos x-\sin x$在$[-a,a]$是减函数，则a的最大值是(　　)

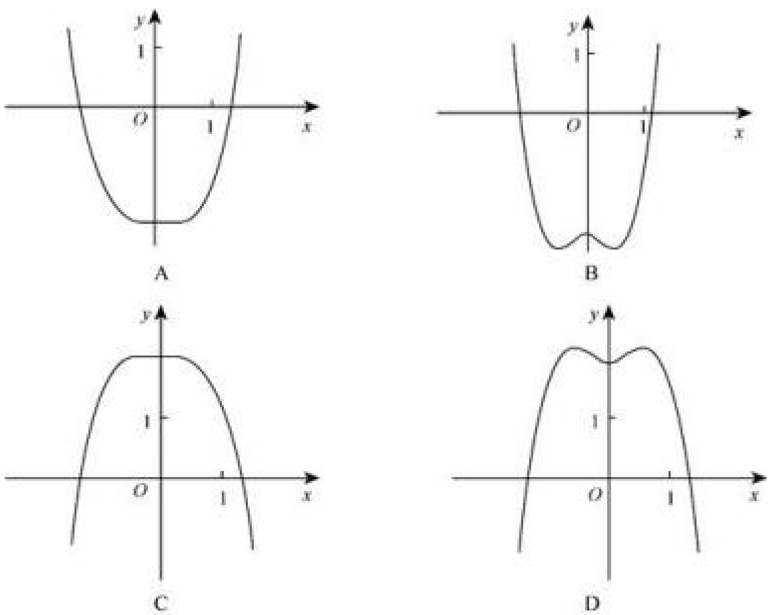
A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. π

【答案】A

【解析】因为$f(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$，所以由$0+2k\pi\le x+\frac{\pi}{4}\le\pi+2k\pi,(k\in Z)$得

$-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le x\le\frac{3\pi}{4}+2k\pi,(k\in Z)$，　因此$[-a,a]\subset[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]\therefore -a<a,-a\ge-\frac{\pi}{4},a\le\frac{3\pi}{4}\therefore 0<a\le\frac{\pi}{4}$，从而 的最大值为$a\frac{\pi}{4}$。

【举一反三】（2018 年全国III卷）函数$y=-x^4+x^2+2$的图像大致为(　　)



A. A　　　　B. B　　　　C. C　　　　D. D

【答案】D

【解析】当$x=0$时，$y=2$，排除 A、B；$y'=-4x^3+2x=-2x(2x^2-1)$,当$x\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$时，$y>0$,排除 C，故正确答案选 D。

【方法技巧】

1.基本法是利用单调性化简不等式．速解法是特例检验法.

2．求函数的单调区间与确定单调性的方法一样．常用的方法有：

(1)利用已知函数的单调性，即转化为已知函数的和、差或复合函数，求单调区间．(2)定义法：先求定义域，再利用单调性定义确定单调区间．(3)图象法：如果$f(x)$是以图象形式给出的，或者$f(x)$的图象易作出，则可由图象的直观性写出它的单调区间．(4)导数法：利用导数取值的正负确定函数的单调区间.

3．若函数$f(x)$在定义域上(或某一区间上)是增函数，则$f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow x_1<x_2$.利用上式，可以去掉抽象函数

的符号，将函数不等式(或方程)的求解化为一般不等式(或方程)的求解，但无论如何都必须在定义域内或给