

@备考资料首选

通过无忧 轻松拿下考试

基础阶段—专业知识

刷题阶段—重点题库

冲刺阶段—押题点睛

考点覆盖—精编习题

紧扣考纲—直击考点

历年真题—押题抢分

本封面内容仅供参考，实际内容请认真预览本电子文本

祝您考试顺利

第一章 向量和坐标

一、向量的概念★★

既有大小又有方向的量叫做向量,或称为矢量,简称矢.

向量的大小叫做向量的模,也称向量的长度.向量 \mathbf{AB} 与 \vec{a} 的模分别记做 $|\mathbf{AB}|$ 与 $|\vec{a}|$.

模等于 1 的向量叫做单位向量,模等于 0 的向量叫做零向量.

如果两个向量的模相等且方向相同,那么叫做相等向量,记做 $\vec{a} = \vec{b}$.

二、向量的运算★★★★★

1、已知空间中任意两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 则向量

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

2、已知向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则

$$(1) \text{ 向量 } \vec{a} \text{ 的模为 } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$(2) \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$$

$$(3) \lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

3、向量的数量积(内积) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

其中 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 为向量 \vec{a} , \vec{b} 的夹角, 且 $0 \leq \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq \pi$

注意: 利用向量的内积可求直线与直线的夹角、直线与平面的夹角、平面与平面的夹角。

$$4、(1) \vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

$$(2) \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

(3) 三个非零向量 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ 和 $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, 共面的充

要条件是
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

例 1. $\vec{a} = (6, x, -4)$, $\vec{b} = (y, -2, -2)$, 已知 $\vec{a} // \vec{b}$, 求 x, y 的值分别是 ()

- A. 4, -3 B. -3, -4
C. -3, 4 D. -4, 3

解析: 由于 $\vec{a} // \vec{b}$, 即 $\frac{6}{y} = \frac{x}{-2} = \frac{-4}{-2}$, 故 $x = -4, y = 3$, 故选 D.

例 2. 已知向量 \vec{a} 与向量 $\vec{b} = \{-1, 2, 1\}$ 平行, 与向量 $\vec{c} = \{1, 2, -1\}$ 的数量积为 6, 则向量 \vec{a} 为 ()

- A. $\{-3, 6, -3\}$ B. $\{3, 6, 3\}$
C. $\{3, 6, -3\}$ D. $\{-3, 6, 3\}$

【解析】 由 \vec{a} 与 $\vec{b} = \{-1, 2, 1\}$ 平行, 故设 $\vec{a} = \{-\lambda, 2\lambda, \lambda\}$, 且
 $\vec{a} \cdot \vec{c} = -\lambda \times 1 + 2\lambda \times 2 + \lambda \times (-1) = 2\lambda = 6$, 故 $\lambda = 3$, 即 $\vec{a} = \{-3, 6, 3\}$, 故选 D.

例 3 已知矢量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的分量如下:

(1) $\vec{a} = \{0, -1, 2\}$, $\vec{b} = \{0, 2, -4\}$, $\vec{c} = \{1, 2, -1\}$;

(2) $\vec{a} = \{1, 2, 3\}$, $\vec{b} = \{2, -1, 0\}$, $\vec{c} = \{0, 5, 6\}$.

试判别它们是否共面? 能否将 \vec{c} 表成 \vec{a}, \vec{b} 的线性组合? 若能表示, 写出表示式.

解: (1) 因为
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
, 所以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三矢量共面,

又因为 \vec{a}, \vec{b} 的对应坐标成比例, 即 $\vec{a} // \vec{b}$, 但 $\vec{c} \not// \vec{a}$,
故不能将 \vec{c} 表成 \vec{a}, \vec{b} 的线性组合.

(2) 因为
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$
, 所以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三矢量共面.

又因为 \vec{a}, \vec{b} 的对应坐标不成比例, 即 $\vec{a} \not// \vec{b}$,
故可以将 \vec{c} 表成 \vec{a}, \vec{b} 的线性组合.

设 $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, 亦即 $\{0, 5, 6\} = \lambda\{1, 2, 3\} + \mu\{2, -1, 0\}$

从而

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 0, \\ 2\lambda - \mu = 0, \\ 3\lambda = 6. \end{cases}$$

解得 $\lambda = 2, \mu = -1,$

所以 $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$

5、向量的向量积 (外积) $\vec{a} \times \vec{b}$ (遵循右手原则, 且 $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ 、 $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

例 4. 设 $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, 则 $\vec{a} \times \vec{b} =$ (D)

A. (1,1,1)

B. (1,2,3)

C. (5,1,6)

D. (5,1,7)

解析: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k} = \{5, 1, 7\}.$

例 5. 设 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, 则 $\vec{a} \times \vec{b}$.

解析:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k} = \{1, -5, -3\}.$$

例 6. 已知三角形 ABC 的顶点分别是 $A(1, 2, 3)$ 、 $B(3, 4, 5)$ 和 $C(2, 4, 7)$, 求三角形 ABC 的面积.

解析: 根据向量积的定义, 可知三角形 ABC 的面积

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB}| |\overline{AC}| \sin \angle A = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$, 由于 $\overline{AB} = (2, 2, 2)$, $\overline{AC} = (1, 2, 4)$, 因此

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k},$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/088074124112006031>