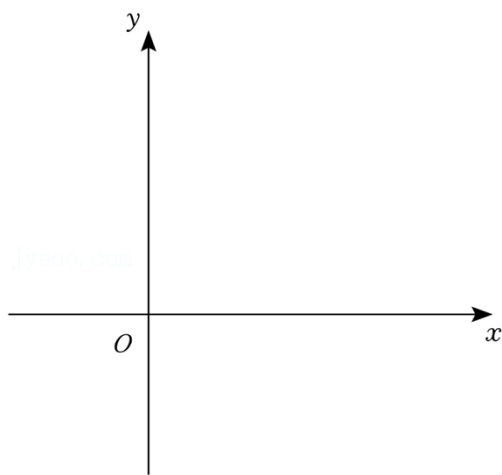


第18讲 二次函数中的线段相等与和差倍半问题（核心考点讲与练）

【考点剖析】

1. （2022•黄浦区二模）在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = -x^2 + mx + n$ 经过点 $A(5, 0)$ ，顶点为点 B ，对称轴为直线 $x=3$ ，且对称轴与 x 轴交于点 C 。直线 $y=kx+b$ 经过点 A ，与线段 BC 交于点 E 。
- （1）求抛物线 $y = -x^2 + mx + n$ 的表达式；
- （2）联结 BO 、 EO 。当 $\triangle BOE$ 的面积为 3 时，求直线 $y=kx+b$ 的表达式；
- （3）在（2）的条件下，设点 D 为 y 轴上的一点，联结 BD 、 AD 。当 $BD=EO$ 时，求 $\angle DAO$ 的余切值。



【分析】（1）利用待定系数法和抛物线对称轴公式即可求解；

（2）先求出顶点 B 坐标，根据 $\triangle BOE$ 的面积为 3 求出 BE ，进而求出点 E 坐标，利用待定系数法即可求解；

（3）分 $BD \parallel OE$ 和 BD 与 OE 不平行两种情况，分别求出 D 坐标，利用余切定义即可求解。

【解答】解：（1） $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + mx + n$ 经过点 $A(5, 0)$ ，对称轴为直线 $x=3$ ，

$$\therefore \begin{cases} -\frac{m}{-2} = 3 \\ -25 + 5m + n = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} m = 6 \\ n = -5 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线表达式为 $y = -x^2 + 6x - 5$ ；

（2）把 $x=3$ 代入 $y = -x^2 + 6x - 5$ 得 $y=4$ ，

$\therefore$ 抛物线顶点 B 坐标为 $(3, 4)$ ，

由 $\triangle BOE$ 的面积为3得 $\frac{1}{2}BE \times 3 = 3$,

$$\therefore BE = 2,$$

$\because$ 点 E 在线段 BC 上,

$$\therefore \text{点 } E \text{ 坐标为 } E(3, 2),$$

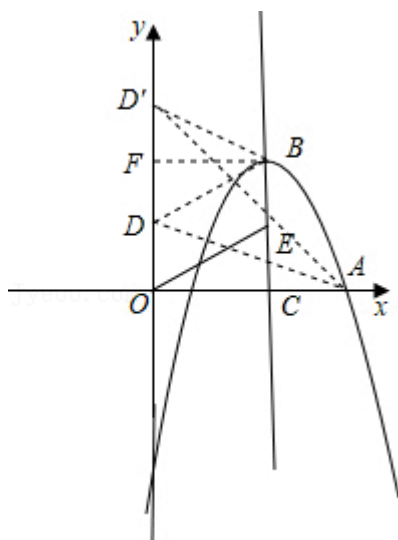
把点 $E(3, 2)$ 和点 $A(5, 0)$ 代入 $y = kx + b$ 得,

$$\begin{cases} 5k + b = 0 \\ 3k + b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -1 \\ b = 5 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线的表达式为 $y = -x + 5$;

(3) 如图, ①若 $BD \parallel OE$,



$$\therefore BD = EO,$$

$\therefore$ 四边形 $OEBD$ 为平行四边形,

则点 D 坐标为 $(0, 2)$,

连接 DA ,

$$\therefore \cot \angle DAO = \frac{OA}{DO} = \frac{5}{2};$$

②若 BD 不平行 OE , 如图 D' ,

则四边形 $OEBD'$ 为等腰梯形,

做 $BF \perp y$ 轴于 F , 则 $D'F = DF = 2$,

$$\therefore \text{点 } D' \text{ 坐标为 } (0, 6),$$

连接 $D'A$,

$$\therefore \cot \angle D'AO = \frac{AO}{D'O} = \frac{5}{6},$$

综上所述，此时 $\angle DAO$ 的余切值为 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5}{6}$ 。

【点评】本题为二次函数综合题，考查了二次函数性质，求一次函数解析式，余切定义等知识，熟练掌握各知识点是解题关键，解第（3）步时要注意分类讨论思想应用。

2. (2021 闵行区二模 24) (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = -x^2 + mx + n$ 经过点 $A(5, 0)$ ，顶点为点 B ，对称轴为直线 $x=3$ ，且对称轴与 x 轴交于点 C 。直线 $y=kx+b$ ，经过点 A ，与线段 BC 交于点 E 。

(1) 求抛物线 $y = -x^2 + mx + n$ 的表达式；

(2) 联结 BO 、 EO 。当 $\triangle BOE$ 的面积为 3 时，求直线 $y=kx+b$ 的表达式；

(3) 在 (2) 的条件下，设点 D 为 y 轴上的一点，联结 BD 、 AD ，当 $BD=EO$ 时，求 $\angle DAO$ 的余切值。

【分析】(1) 利用待定系数法和抛物线对称轴公式即可求解；

(2) 先求出顶点 B 坐标，根据 $\triangle BOE$ 的面积为 3 求出 BE ，进而求出点 E 坐标，利用待定系数法即可求解；

(3) 分 $BD \parallel OE$ 和 BD 与 OE 不平行两种情况，分别求出 D 坐标，利用余切定义即可求解。

【解答】解：(1) $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + mx + n$ 经过点 $A(5, 0)$ ，

$$\therefore \begin{cases} -\frac{m}{-2} = 3 \\ -25 + 5m + n = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} m = 6 \\ n = -5 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线表达式为 $y = -x^2 + 6x - 5$ ；

(2) 把 $x=3$ 代入 $y = -x^2 + 6x - 5$ 得 $y=4$ ，

$\therefore$ 抛物线顶点 B 坐标为 $(3, 4)$ ，

由 $\triangle BOE$ 的面积为 3 得 $\frac{6}{2}BE \times 3 = 3$ ，

$\therefore BE=2$ ，

$\because$ 点 E 在线段 BC 上，

$\therefore$ 点 E 坐标为 $E(3, 2)$ ，

把点 $E(3, 2)$ 和点 $A(5, 0)$ ，

$$\begin{cases} 5k+b=0 \\ 3k+b=2 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k=-1 \\ b=8 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线表达式为 $y = -x + 5$;

(3) 如图, ①若 $BD \parallel OE$,

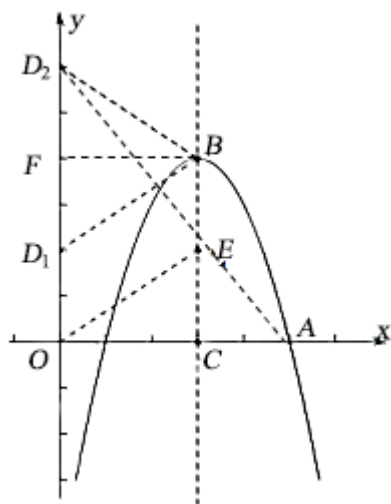
则四边形 $OEBD_1$ 为平行四边形,

则点 D_4 坐标为 $(0, 2)$,

连接 D_5A ,

$$\therefore \cot \angle D_1AO = \frac{AO}{D_1O} = \frac{5}{6},$$

综上所述, 此时 $\angle DAO$ 的余切值为 $\frac{5}{6}$ 或 $\frac{5}{6}$.



【点评】本题为二次函数综合题, 考查了二次函数性质, 求一次函数解析式, 余切定义等知识, 熟练掌握各知识点是解题关键, 解第(3)步时要注意分类讨论思想应用.

3. (2022 春·徐汇区校级期中) 如图, 二次函数 $y = -\frac{1}{3}x^2 + bx + 2$ 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点, 与 y 轴相交于点 C , 点 A 的坐标为 $(-4, 0)$, P 是抛物线上一点 (点 P 与点 A 、 B 、 C 都不重合).

(1) 求抛物线解析式;

(2) 求点 B 的坐标;

(3) 设直线 PB 与直线 AC 相交于点 M , 且存在这样的点 P , 使得 $PM:MB=1:2$, 试确定点 P 的横坐标.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/088124016032006141>