



# 高等数学



# 学习内容

## 第二讲

单侧导数

导数的几何意义

可导与连续的关系

小结

左导数: 
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

右导数: 
$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点可导  $\Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

主要用于判定分段函数在分段点处的可导性.

# 结 论

1. 如果  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内每一点可导, 则称  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内可导.
2. 如果  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内每一点可导, 且  $f'_+(a)$  和  $f'_-(b)$  都存在, 则  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上可导 .

**例** 讨论函数  $f(x)=|x|$  在  $x=0$  处的可导性.

**解**

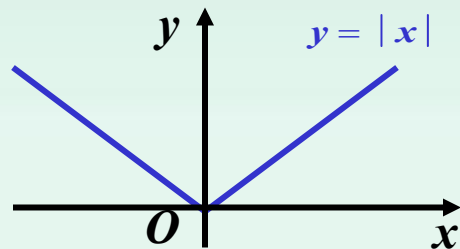
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x},$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

$$\therefore f'_+(0) \neq f'_-(0),$$

$\therefore$  函数  $y = f(x)$  在  $x=0$  点不可导.

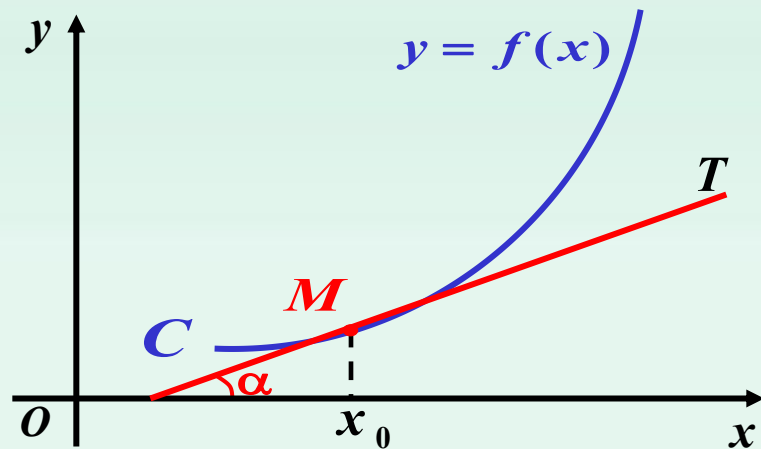


几何意义:

$f'(x_0)$ 表示 曲线  $y = f(x)$

在点  $M(x_0, f(x_0))$  处的 切线斜率.

$k_{\text{切}} = f'(x_0) = \tan \alpha, (\alpha \text{ 为倾角})$



**例**

求等边双曲线  $y = \frac{1}{x}$  在  $(\frac{1}{2}, 2)$  处的切线斜率,  
并写出在该点处的切线方程和法线方程.

**解**

先求导数的斜率,

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad \therefore y'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{x^2} \bigg|_{x=\frac{1}{2}} = -4.$$

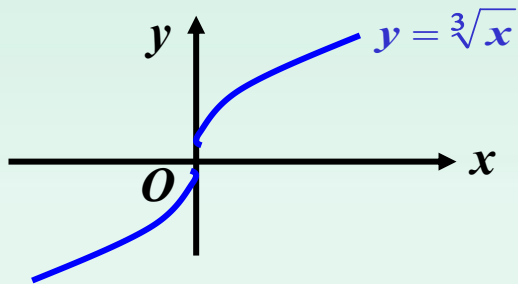
切线方程  $y - 2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad 4x + y - 4 = 0.$

法线方程  $y - 2 = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad 2x - 8y + 15 = 0.$

# 结 论

- (1) 若  $f'(x_0) \neq 0$ ,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{切线方程为: } y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \\ \text{法线方程为: } y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \end{array} \right.$
- (2) 若  $f'(x_0) = 0$ ,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{切线方程为: } y = y_0 \\ \text{法线方程为: } x = x_0 \end{array} \right.$
- (3) 若  $f'(x_0) = \infty$ ,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{切线方程为: } x = x_0 \\ \text{法线方程为: } y = y_0 \end{array} \right.$

**问题：** 函数在可导点的切线，可以由导数来表示其斜率；  
连续函数在它的不可导点，切线又是什么情况呢？



如 $y = \sqrt[3]{x}$ 在 $x = 0$ 处不可导，  
但切线存在，切线为y轴.

**答案是：** 切线也可能存在

**定理** 如果函数  $f(x)$  在点  $x$  处可导, 则在该点必连续.

**证明**

设函数  $f(x)$  在点  $x$  可导,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \text{ 当 } \Delta x \rightarrow 0 \text{ 时, } \alpha \rightarrow 0.$$

函数、极限和  
无穷小的关系

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \Delta x] = 0$$

所以, 函数  $f(x)$  在点  $x$  连续.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/088142125064006105>