

2023-2024 学年广东省汕尾市陆河外国语学校高三元月调研考试数学试题试卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 我国古代有着辉煌的数学研究成果，其中的《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《缉古算经》，有丰富多彩的内容，是了解我国古代数学的重要文献。这 5 部专著中有 3 部产生于汉、魏、晋、南北朝时期。某中学拟从这 5 部专著中选择 2 部作为“数学文化”校本课程学习内容，则所选 2 部专著中至少有一部是汉、魏、晋、南北朝时期专著的概率为（ ）

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{7}{10}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{9}{10}$

2. 已知点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 是函数 $f(x) = a\sqrt{x} + bx^2$ 的函数图像上的任意两点，且 $y = f(x)$ 在点

$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$ 处的切线与直线 AB 平行，则（ ）

- A. $a = 0$, b 为任意非零实数 B. $b = 0$, a 为任意非零实数
C. a, b 均为任意实数 D. 不存在满足条件的实数 a, b

3. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x \in \mathbb{R})$ 的导函数，当 $x > 0$ 时， $f'(x) \ln x < -\frac{1}{x}f(x)$ ，则使得 $(x^2 - 1)f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是（ ）

- A. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

4. 若复数 $z = \frac{2}{1+i}$ ，其中 i 为虚数单位，则下列结论正确的是（ ）

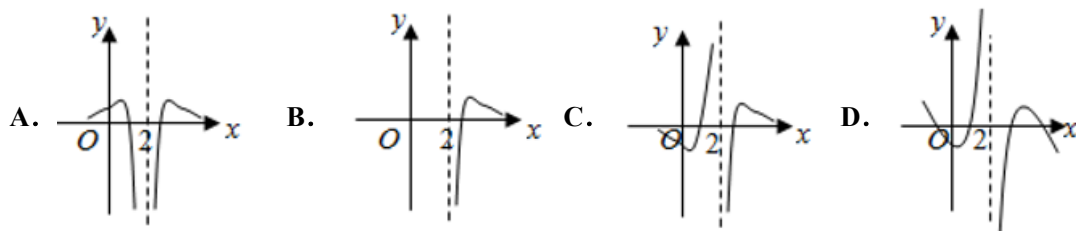
- A. z 的虚部为 $-i$ B. $|z| = 2$ C. z 的共轭复数为 $-1-i$ D. z^2 为纯虚数

5. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = -\frac{1}{f(x)} (f(x) \neq 0)$ ，且在区间 $(2017, 2018)$ 上单调递减，已知 α, β 是

锐角三角形的两个内角，则 $f(\sin \beta), f(\cos \alpha)$ 的大小关系是（ ）

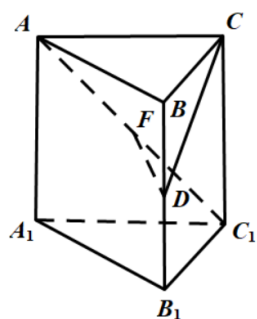
- A. $f(\sin \beta) < f(\cos \alpha)$ B. $f(\sin \beta) > f(\cos \alpha)$
C. $f(\sin \beta) = f(\cos \alpha)$ D. 以上情况均有可能

6. 函数 $\varphi(\varphi) = \frac{\ln(\varphi^2 - 4\varphi + 4)}{(\varphi - 2)^3}$ 的图象可能是下面的图象()



7. 在棱长均相等的正三棱柱 $ABC = A_1B_1C_1$ 中, D 为 BB_1 的中点, F 在 AC_1 上, 且 $DF \perp AC_1$, 则下述结论: ①

$AC_1 \perp BC$; ② $AF = FC_1$; ③ 平面 $DAC_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 ; ④ 异面直线 AC_1 与 CD 所成角为 60° 其中正确命题的个数为()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

8. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 3 \geq 0 \\ x + 2y \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$, 则 $z = 3x + y$ 的最小值为()

- A. -5 B. 2 C. 7 D. 11

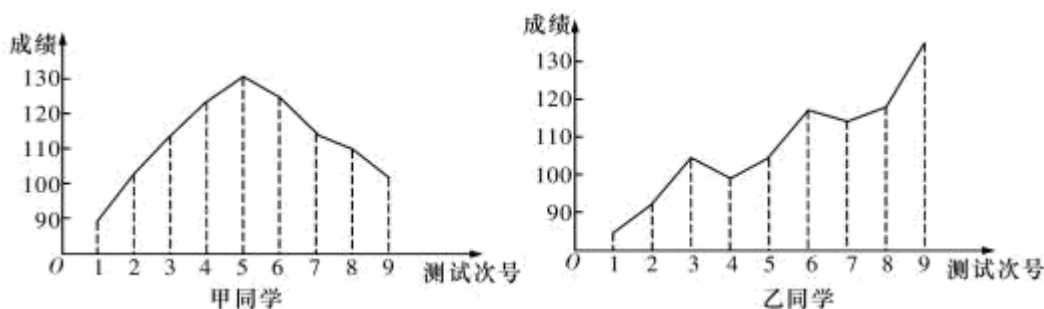
9. 设抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点 P 到 y 轴的距离为 d_1 , 到直线 $l: 3x + 4y + 12 = 0$ 的距离为 d_2 , 则 $d_1 + d_2$ 的最小值为()

- A. 2 B. $\frac{15}{3}$ C. $\frac{16}{3}$ D. 3

10. 若函数 $f(x) = (x^2 - mx + 2)e^x$ ($e = 2.71828...$ 为自然对数的底数)在区间 $[1, 2]$ 上不是单调函数, 则实数 m 的取值范围是()

- A. $\left[\frac{5}{2}, \frac{10}{3}\right]$ B. $\left(\frac{5}{2}, \frac{10}{3}\right)$ C. $\left[2, \frac{10}{3}\right]$ D. $\left(2, \frac{10}{3}\right)$

11. 对某两名高三学生在连续 9 次数学测试中的成绩(单位: 分)进行统计得到折线图, 下面是关于这两位同学的数学成绩分析.



- ①甲同学的成绩折线图具有较好的对称性，故平均成绩为 130 分；
 ②根据甲同学成绩折线图提供的数据进行统计，估计该同学平均成绩在区间 $[110, 120]$ 内；
 ③乙同学的数学成绩与测试次号具有比较明显的线性相关性，且为正相关；
 ④乙同学连续九次测验成绩每一次均有明显进步.

其中正确的个数为 ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

12. 抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点为 F ，则经过点 F 与点 $M(2, 2)$ 且与抛物线的准线相切的圆的个数有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 0 个 D. 无数个

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$ 展开式的第 5 项的系数为_____.

14. 若 $ax\left(x - \frac{2}{x}\right)^5$ 展开式中的常数项为 240，则实数 a 的值为_____.

15. 某地区连续 5 天的最低气温 (单位: $^{\circ}\text{C}$) 依次为 8, -4, -1, 0, 2, 则该组数据的标准差为_____.

16. 甲, 乙两队参加关于“一带一路”知识竞赛, 甲队有编号为 1, 2, 3 的三名运动员, 乙队有编号为 1, 2, 3, 4 的四名运动员, 若两队各出一名队员进行比赛, 则出场的两名运动员编号相同的概率为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x+1| - |4-2x|$.

(1) 求不等式 $f(x) \geq \frac{1}{3}(x-1)$ 的解集;

(2) 若函数 $f(x)$ 的最大值为 m , 且 $2a+b=m(a>0, b>0)$, 求 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值.

18. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\cos A = \frac{3}{5}$, $\tan(B-A) = \frac{1}{3}$.

(1) 求 $\tan B$ 的值;

(2) 若 $c=13$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (12分) 已知函数 $f(x) = |x-2| + |2x+4|$.

(1) 解不等式 $f(x) \geq -3x+4$;

(2) 若函数 $f(x)$ 的最小值为 a , $m+n=a$ ($m>0, n>0$), 求 $\frac{2020}{m+1008} + \frac{2020}{n+1008}$ 的最小值.

20. (12分) 《山东省高考改革试点方案》规定: 从2017年秋季高中入学的新生开始, 不分文理科; 2020年开始, 高考总成绩由语数外3门统考科目和物理、化学等六门选考科目构成. 将每门选考科目的考生原始成绩从高到低划分为A、B+、B、C+、C、D+、D、E共8个等级. 参照正态分布原则, 确定各等级人数所占比例分别为3%、7%、16%、24%、24%、16%、7%、3%. 选考科目成绩计入考生总成绩时, 将A至E等级内的考生原始成绩, 依照等比例转换法则, 分别转换到[91,100]、[81,90]、[71,80]、[61,70]、[51,60]、[41,50]、[31,40]、[21,30]八个分数区间, 得到考生的等级成绩. 某校高一年级共2000人, 为给高一学生合理选科提供依据, 对六个选考科目进行测试, 其中物理考试原始成绩基本服从正态分布 $N(60,169)$.

(1) 求物理原始成绩在区间(47,86)的人数;

(2) 按高考改革方案, 若从全省考生中随机抽取3人, 记 X 表示这3人中等级成绩在区间[61,80]的人数, 求 X 的分布列和数学期望.

(附: 若随机变量 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu-\sigma < \xi < \mu+\sigma) = 0.682$, $P(\mu-2\sigma < \xi < \mu+2\sigma) = 0.954$,

$P(\mu-3\sigma < \xi < \mu+3\sigma) = 0.997$)

21. (12分) 为迎接2022年冬奥会, 北京市组织中学生开展冰雪运动的培训活动, 并在培训结束后对学生进行了考核. 记 X 表示学生的考核成绩, 并规定 $X \geq 85$ 为考核优秀. 为了了解本次培训活动的效果, 在参加培训的学生中随机抽取了30名学生的考核成绩, 并作成如下茎叶图:



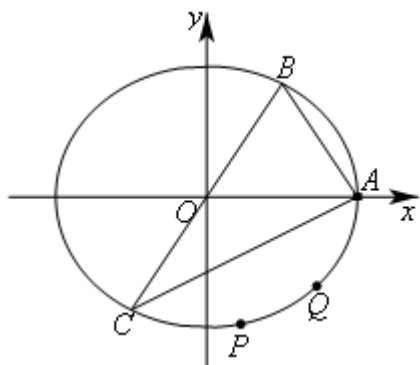
(I) 从参加培训的学生中随机选取1人, 请根据图中数据, 估计这名学生考核优秀的概率;

(II) 从图中考核成绩满足 $X \in [80, 89]$ 的学生中任取2人, 求至少有一人考核优秀的概率;

(III) 记 $P(a \leq X \leq b)$ 表示学生的考核成绩在区间 $[a, b]$ 的概率, 根据以往培训数据, 规定当 $P\left(\left|\frac{x-85}{10}\right| \leq 1\right) \geq 0.5$ 时

培训有效. 请根据图中数据, 判断此次中学生冰雪培训活动是否有效, 并说明理由.

22. (10 分) 如图, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为 4, 点 A 、 B 、 C 为椭圆上的三个点, A 为椭圆的右端点, BC 过中心 O , 且 $|BC| = 2|AB|$, $S_{\triangle ABC} = 3$.



- (1) 求椭圆的标准方程;
- (2) 设 P 、 Q 是椭圆上位于直线 AC 同侧的两个动点 (异于 A 、 C), 且满足 $\angle PBC = \angle QBA$, 试讨论直线 BP 与直线 BQ 斜率之间的关系, 并求证直线 PQ 的斜率为定值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

利用列举法, 从这 5 部专著中选择 2 部作为“数学文化”校本课程学习内容, 基本事件有 10 种情况, 所选 2 部专著中至少有一部是汉、魏、晋、南北朝时期专著的基本事件有 9 种情况, 由古典概型概率公式可得结果.

【详解】

《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《缉古算经》, 这 5 部专著中有 3 部产生于汉、魏、晋、南北朝时期. 记这 5 部专著分别为 a, b, c, d, e , 其中 a, b, c 产生于汉、魏、晋、南北朝时期. 从这 5 部专著中选择 2 部作为“数学文化”校本课程学习内容, 基本事件有 $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de$, 共 10 种情况, 所选 2 部专著中至少有一部是汉、魏、晋、南北朝时期专著的基本事件有 $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce$, 共 9 种情况, 所以所选 2 部专著中至少有一部是汉、魏、晋、南北朝时期专著的概率为 $P = \frac{m}{n} = \frac{9}{10}$. 故选 D.

【点睛】

本题主要考查古典概型概率公式的应用，属于基础题，利用古典概型概率公式求概率时，找准基本事件个数是解题的关键，基本事件的探求方法有 (1)枚举法：适合给定的基本事件个数较少且易一一列举出的；(2)树状图法：适合于较为复杂的问题中的基本事件的探求.在找基本事件个数时，一定要按顺序逐个写出：先 (A_1, B_1) ， $(A_1, B_2) \dots (A_1, B_n)$ ，再 (A_2, B_1) ， $(A_2, B_2) \dots (A_2, B_n)$ 依次 $(A_3, B_1) (A_3, B_2) \dots (A_3, B_n) \dots$ 这样才能避免多写、漏写现象的发生.

2、A

【解析】

求得 $f'(x)$ 的导函数，结合两点斜率公式和两直线平行的条件：斜率相等，化简可得 $a=0$ ， b 为任意非零实数.

【详解】

依题意 $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} + 2bx$ ， $y = f(x)$ 在点 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$ 处的切线与直线 AB 平行，即有

$$\frac{\frac{a}{2\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}}} + b(x_1+x_2)}{\frac{x_2-x_1}{\frac{x_1+x_2}{2}}} = \frac{a\sqrt{x_2} + bx_2^2 - a\sqrt{x_1} - bx_1^2}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{a(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})}{x_2 - x_1} + b(x_1+x_2), \text{ 所以 } \frac{a}{\sqrt{2(x_1+x_2)}} = \frac{a}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}, \text{ 由于对任意 } x_1, x_2 \text{ 上式都成立, 可得 } a=0, b \text{ 为非}$$

零实数.

故选：A

【点睛】

本题考查导数的运用，求切线的斜率，考查两点的斜率公式，以及化简运算能力，属于中档题.

3、D

【解析】

构造函数，令 $g(x) = \ln x \cdot f(x) (x > 0)$ ，则 $g'(x) = \ln x f'(x) + \frac{f(x)}{x}$ ，

由 $f'(x) \ln x < -\frac{1}{x} f(x)$ 可得 $g'(x) < 0$ ，

则 $g(x)$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的单调递减函数，

且 $g(1) = \ln 1 \times f(1) = 0$ ，

当 $x \in (0, 1)$ 时， $g(x) > 0, \therefore \ln x < 0, f(x) < 0, (x^2-1)f(x) > 0$;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $g(x) < 0, \therefore \ln x > 0, \therefore f(x) < 0, (x^2-1)f(x) < 0$

$\because f(x)$ 是奇函数, 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x) > 0, (x^2 - 1)f(x) < 0$

$\therefore$ 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f(x) > 0, (x^2 - 1)f(x) > 0$.

综上所述, 使得 $(x^2 - 1)f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

本题选择 D 选项.

点睛: 函数的单调性是函数的重要性质之一, 它的应用贯穿于整个高中数学的教学之中. 某些数学问题从表面上看似与函数的单调性无关, 但如果我们能挖掘其内在联系, 抓住其本质, 那么运用函数的单调性解题, 能起到化难为易、化繁为简的作用. 因此对函数的单调性进行全面、准确的认识, 并掌握好使用的技巧和方法, 这是非常必要的. 根据题目的特点, 构造一个适当的函数, 利用它的单调性进行解题, 是一种常用技巧. 许多问题, 如果运用这种思想去解决, 往往能获得简洁明快的思路, 有着非凡的功效.

4、 D

【解析】

将复数 z 整理为 $1 - i$ 的形式, 分别判断四个选项即可得到结果.

【详解】

$$z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i$$

z 的虚部为 -1 , A 错误; $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, B 错误; $\bar{z} = 1+i$, C 错误;

$z^2 = (1-i)^2 = -2i$, 为纯虚数, D 正确

本题正确选项: D

【点睛】

本题考查复数的模长、实部与虚部、共轭复数、复数的分类的知识, 属于基础题.

5、 B

【解析】

由已知可求得函数的周期, 根据周期及偶函数的对称性可求 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的单调性, 结合三角函数的性质即可比较.

【详解】

由 $f(x+1) = -\frac{1}{f(x)}$ 可得 $f(x+2) = f[(x+1)+1] = -\frac{1}{f(x+1)} = f(x)$, 即函数的周期 $T = 2$,

因为在区间 $(2017, 2018)$ 上单调递减, 故函数在区间 $(-1, 0)$ 上单调递减,

根据偶函数的对称性可知, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

因为 α, β 是锐角三角形的两个内角,

所以 $\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ 且 $\alpha + \beta > \frac{1}{2}\pi$ 即 $\alpha > \frac{1}{2}\pi - \beta$,

所以 $\cos \alpha < \cos(\frac{1}{2}\pi - \beta)$ 即 $0 < \cos \alpha < \sin \beta < 1$,

$f(\cos \alpha) < f(\sin \beta)$.

故选: B.

【点睛】

本题主要考查函数值的大小比较, 根据函数奇偶性和单调性之间的关系是解决本题的关键.

6、C

【解析】

因为 $\varphi(\varphi) = \frac{\ln(\varphi^2 - 4\varphi + 4)}{(\varphi - 2)^3} = \frac{\ln(\varphi - 2)^2}{(\varphi - 2)^3}$, 所以函数 $\varphi(\varphi)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称, 排除 A, B. 当 $\varphi < 0$ 时,

$\ln(\varphi - 2)^2 > 0, (\varphi - 2)^3 < 0$, 所以 $\varphi(\varphi) < 0$, 排除 D. 选 C.

7、B

【解析】

设出棱长, 通过直线与直线的垂直判断直线与直线的平行, 推出①的正误; 判断 F 是 AC_1 的中点推出②正的误; 利用直线与平面垂直推出平面与平面垂直推出③正的误; 建立空间直角坐标系求出异面直线 AC_1 与 CD 所成角判断④的正误.

【详解】

解: 不妨设棱长为: 2, 对于①连结 AB_1 , 则 $AB_1 = AC_1 = 2\sqrt{2}$, $\therefore \angle AC_1B_1 \neq 90^\circ$ 即 AC_1 与 B_1C_1 不垂直, 又 $BC \parallel B_1C_1$, $\therefore$ ①不正确;

对于②, 连结 AD , DC_1 , 在 $\triangle ADC_1$ 中, $AD = DC_1 = \sqrt{5}$, 而 $DF \perp AC_1$, $\therefore F$ 是 AC_1 的中点, 所以 $AF = FC_1$, $\therefore$ ②正确;

对于③由②可知, 在 $\triangle ADC_1$ 中, $DF = \sqrt{3}$, 连结 CF , 易知 $CF = \sqrt{2}$, 而在 $\text{Rt}\triangle CBD$ 中, $CD = \sqrt{5}$, $\therefore DF^2 + CF^2 = CD^2$,

即 $DF \perp CF$, 又 $DF \perp AC_1$, $\therefore DF \perp$ 面 ACC_1A_1 , $\therefore$ 平面 $DAC_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 , $\therefore$ ③正确;

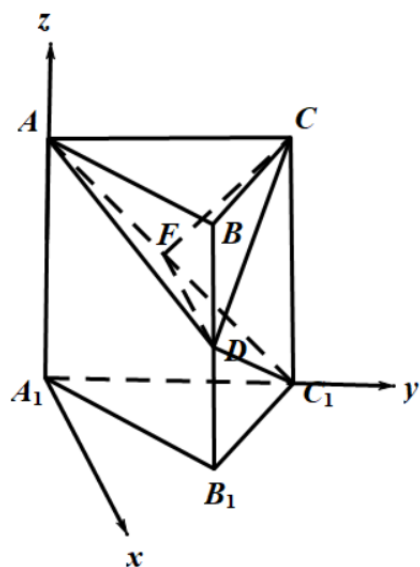
以 A_1 为坐标原点, 平面 $A_1B_1C_1$ 上过 A_1 点垂直于 A_1C_1 的直线为 x 轴, A_1C_1 所在的直线为 y 轴, A_1A 所在的直线为 z 轴, 建立如图所示的直角坐标系;

$$A_1(0,0,0), \quad B_1(\sqrt{3},1,0), \quad C_1(0,2,0), \quad A(0,0,2), \quad C(0,2,2), \quad D(\sqrt{3},1,1);$$

$$\vec{AC_1} = (0,2,-2), \quad \vec{CD} = (\sqrt{3},-1,-1);$$

异面直线 AC_1 与 CD 所成角为 θ , $\cos \theta = \frac{|\vec{AC_1} \cdot \vec{CD}|}{|\vec{AC_1}| |\vec{CD}|} = 0$, 故 $\theta = 90^\circ$. ④不正确.

故选: B.



【点睛】

本题考查命题的真假的判断, 棱锥的结构特征, 直线与平面垂直, 直线与直线的位置关系的应用, 考查空间想象能力以及逻辑推理能力.

8、A

【解析】

根据约束条件画出可行域, 再将目标函数化成斜截式, 找到截距的最小值.

【详解】

$$\text{由约束条件} \begin{cases} x - y + 3 \geq 0 \\ x + 2y \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}, \text{ 画出可行域 } VABC \text{ 如图}$$

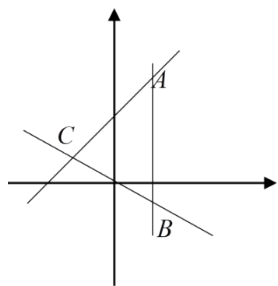
$z = 3x + y$ 变为 $y = -3x + z$ 为斜率为-3 的一簇平行线, z 为在 y 轴的截距,

$\therefore z$ 最小的时候为过 C 点的时候,

$$\text{解} \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \text{ 得} \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 所以 } C(-2,1),$$

$$\text{此时 } z = 3x + y = 3 \times (-2) + 1 = -5$$

故选 A 项



【点睛】

本题考查线性规划求一次相加的目标函数，属于常规题型，是简单题.

9、A

【解析】

分析：题设的直线与抛物线是相离的， $d_1 + d_2$ 可以化成 $d_1 + 1 + d_2 - 1$ ，其中 $d_1 + 1$ 是点 P 到准线的距离，也就是 P 到焦点的距离，这样我们从几何意义得到 $d_1 + 1 + d_2$ 的最小值，从而得到 $d_1 + d_2$ 的最小值.

详解：由 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ 3x + 4y + 12 = 0 \end{cases}$ ①得到 $3y^2 + 16y + 48 = 0$ ， $\Delta = 256 - 12 \times 48 < 0$ ，故①无解，

所以直线 $3x + 4y + 12 = 0$ 与抛物线是相离的.

由 $d_1 + d_2 = d_1 + 1 + d_2 - 1$ ，

而 $d_1 + 1$ 为 P 到准线 $x = -1$ 的距离，故 $d_1 + 1$ 为 P 到焦点 $F(1, 0)$ 的距离，

从而 $d_1 + 1 + d_2$ 的最小值为 F 到直线 $3x + 4y + 12 = 0$ 的距离 $\frac{|1 \times 3 + 0 \times 4 + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$ ，

故 $d_1 + d_2$ 的最小值为 2，故选 A.

点睛：抛物线中与线段的长度相关的最值问题，可利用抛物线的几何性质把动线段的长度转化为到准线或焦点的距离来求解.

10、B

【解析】

求得 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ ，由此构造函数 $g(x) = x^2 + (2 - m)x + 2 - m$ ，根据题意可知 $g(x)$ 在 $(1, 2)$ 上有变号零点.

由此令 $g(x) = 0$ ，利用分离常数法结合换元法，求得 m 的取值范围.

【详解】

$$f'(x) = e^x [x^2 + (2 - m)x + 2 - m],$$

$$\text{设 } g(x) = x^2 + (2 - m)x + 2 - m,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/095134043044011332>