

§ 2.3 直线、平面垂直的判定及其性质

§ 2.3.1 直线与平面垂直的判定

一、教材分析

空间中直线与平面之间的位置关系中，垂直是一种非常重要的位置关系，它不仅应用较多，而且是空间问题平面化的典范.空间中直线与平面的垂直问题是连接线线垂直和面面垂直的桥梁和纽带，可以说线面垂直是立体几何的核心.本节重点是直线与平面垂直的判定定理的应用.

二、教学目标

1. 知识与技能

- (1) 使学生掌握直线和平面垂直的定义及判定定理；
- (2) 使学生掌握直线和平面所成的角求法；
- (3) 培养学生的几何直观能力，使他们在直观感知，操作确认的基础上学会归纳、概括结论.

2. 过程与方法

- (1) 通过教学活动，使学生了解，感受直线和平面垂直的定义的形成过程；
- (2) 探究判定直线与平面垂直的方法.

3. 情态、态度与价值观

培养学生学会从“感性认识”到“理性认识”过程中获取新知.

三、教学重点与难点

教学重点:直线与平面垂直的判定.

教学难点:灵活应用直线与平面垂直判定定理解决问题.

四、课时安排

1 课时

五、教学设计

(一) 导入新课

思路 1.(情境导入)

日常生活中，我们对直线与平面垂直有很多感性认识，比如，旗杆与地面的位置关系，大桥的桥柱与水面的位置关系等，都给我们以直线与平面垂直的印象.

在阳光下观察直立于地面的旗杆及它在地面的影子.随着时间的变化，尽管影子 BC 的位置在移动，但是旗杆 AB 所在直线始终与 BC 所在直线垂直.也就是说，旗杆 AB 所在直线与地面内任意一条不过点 B 的直线 $B'C'$ 也是垂直的.

思路 2.(事例导入)

如果一条直线垂直于一个平面的无数条直线，那么这条直线是否与这个平面垂直？举例说明.

如图 1，直线 AC_1 与直线 BD 、 EF 、 GH 等无数条直线垂直，但直线 AC_1 与平面 $ABCD$ 不垂直.

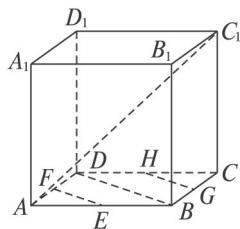


图 1

(二) 推进新课、新知探究、提出问题

- ①探究直线与平面垂直的定义和画法.
- ②探究直线与平面垂直的判定定理.
- ③用三种语言描述直线与平面垂直的判定定理.

④探究斜线在平面内的射影，讨论直线与平面所成的角.

⑤探究点到平面的距离.

活动:问题①引导学生结合事例观察探究.

问题②引导学生结合事例实验探究.

问题③引导学生进行语言转换.

问题④引导学生思考其合理性.

问题⑤引导学生回忆点到直线的距离得出点到平面的距离.

讨论结果:①直线与平面垂直的定义和画法:

教师演示实例并指出书脊（想象成一条直线）、各书页与桌面的交线，由于书脊和书页底边（即与桌面接触的一边）垂直，得出书脊和桌面上所有直线都垂直，书脊和桌面的位置关系给了我们直线和平面垂直的形象.从而引入概念：一条直线和平面内的任何一条直线都垂直，我们说这条直线和这个平面互相垂直，直线叫做平面的垂线，平面叫做直线的垂面.过一点有且只有一条直线和一个平面垂直；过一点有且只有一个平面和一条直线垂直.平面的垂线和平面一定相交，交点叫做垂足.直线和平面垂直的画法及表示如下：

如图 2，表示方法为： $a \perp \alpha$.

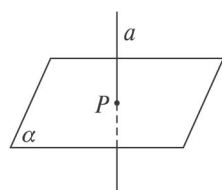


图 2

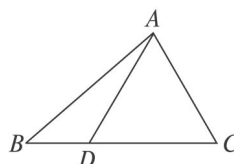


图 3

②如图 3,请同学们准备一块三角形的纸片，我们一起做一个实验：过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 翻折纸片，得折痕 AD，将翻折后的纸片竖起放置在桌面上（BD,DC 与桌面接触）.

(1)折痕 AD 与桌面垂直吗？

(2)如何翻折才能使折痕 AD 与桌面所在的平面 α 垂直？

容易发现，当且仅当折痕 AD 是 BC 边上的高时，AD 所在直线与桌面所在的平面 α 垂直.

如图 4.

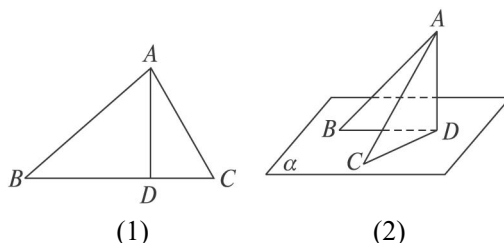


图 4

所以，当折痕 AD 垂直平面内的一条直线时，折痕 AD 与平面 α 不垂直，当折痕 AD 垂直平面内的两条直线时，折痕 AD 与平面 α 垂直.

③直线和平面垂直的判定定理用文字语言表示为：

如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面.

直线和平面垂直的判定定理用符号语言表示为：

$$\left. \begin{array}{l} a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ l \perp a \\ l \perp b \\ a \cap b = P \end{array} \right\} \Rightarrow l \perp \alpha.$$

直线和平面垂直的判定定理用图形语言表示为：如图 5,

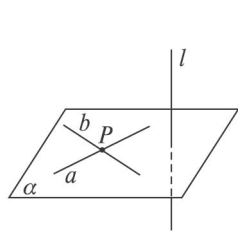


图 5

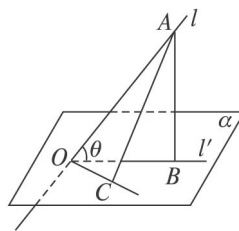


图 6

④斜线在平面内的射影.

斜线：一条直线和一个平面相交，但不和这个平面垂直时，这条直线就叫做这个平面的斜线.

斜足：斜线和平面的交点.

斜线在平面内的射影：从斜线上斜足以外的一点向平面引垂线，过垂足和斜足的直线叫做斜线在这个平面内的射影.

直线与平面相交，直线与平面的相互位置类同于两条相交直线，也需要用角来表示，但过交点在平面内可以作很多条直线.与平面相交的直线 l 与平面内的线 a 、 b ...所成的角是不相等的.为了定义的确定性，我们必须找到一些角中有确定值的，又能准确描述其位置的一个角，这就是由斜线与其在平面内的射影所成的锐角作为直线和平面所成的角.

平面的一条斜线和它在这个平面内的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角.

特别地：如果一条直线垂直于平面，我们说它们所成的角为直角.

一条直线和平面平行或在平面内，我们说它们所成的角为 0° .如图 6， l 是平面 α 的一条斜线，点 O 是斜足， A 是 l 上任意一点， AB 是 α 的垂线，点 B 是垂足，所以直线 OB （记作 l' ）是 l 在 α 内的射影， $\angle AOB$ （记作 θ ）是 l 与 α 所成的角.

直线和平面所成的角是一个非常重要的概念，在实际中有着广泛的应用，如发射炮弹时，当炮筒和地面所成的角为多少度时，才能准确地命中目标，也即射程为多远？又如铅球运动员在投掷时，以多大的角度投掷，投出的距离最远？

⑤点到平面的距离:经过一点向平面引垂线，垂足叫做这点在这个平面内的射影，点在平面内的射影还是一个点.

垂线段：上述的点与垂足间的线段叫做这点到这个平面的垂线段.

点到平面的距离：垂线段的长叫做点到平面的距离.

（三）应用示例

思路 1

例 1 如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于同一个平面.

解：已知 $a \parallel b$ ， $a \perp \alpha$. 求证： $b \perp \alpha$.

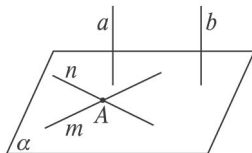


图 7

证明：如图 7,在平面 α 内作两条相交直线 m 、 n ，设 $m \cap n = A$.

变式训练

如图 8,已知点 P 为平面 ABC 外一点， $PA \perp BC$ ， $PC \perp AB$ ，求证： $PB \perp AC$.

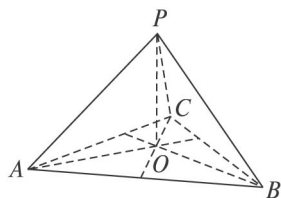


图 8

证明: 过 P 作 $PO \perp$ 平面 ABC 于 O, 连接 OA、OB、OC.

$\because PO \perp$ 平面 ABC, $BC \subset$ 平面 ABC,

$\therefore PO \perp BC$.

又 $\because PA \perp BC, \therefore BC \perp$ 平面 PAO.

又 $\because OA \subset$ 平面 PAO, $\therefore BC \perp OA$.

同理, 可证 $AB \perp OC, \therefore O$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

$\therefore OB \perp AC$. 可证 $PO \perp AC$.

$\therefore AC \perp$ 平面 PBO.

又 $PB \subset$ 平面 PBO, $\therefore PB \perp AC$.

点评: 欲证线面垂直需要转化为证明线线垂直, 欲证线线垂直往往转化为线面垂直. 用符号语言证明问题显得清晰、简洁.

例 2 如图 9, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 求直线 A_1B 和平面 A_1B_1CD 所成的角.

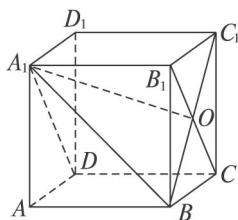


图 9

活动: 先让学生思考或讨论后再回答, 经教师提示、点拨, 对回答正确的学生及时表扬, 对回答不准确的学生提示引导考虑问题的思路.

解: 连接 BC_1 交 B_1C 于点 O, 连接 A_1O .

设正方体的棱长为 a,

因为 $A_1B_1 \perp B_1C_1, A_1B_1 \perp B_1B$, 所以 $A_1B_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

所以 $A_1B_1 \perp BC_1$.

又因为 $BC_1 \perp B_1C$, 所以 $BC_1 \perp$ 平面 A_1B_1CD .

所以 A_1O 为斜线 A_1B 在平面 A_1B_1CD 内的射影, $\angle BA_1O$ 为直线 A_1B 与平面 A_1B_1CD 所成的角.

在 $Rt\triangle A_1BO$ 中, $A_1B = \sqrt{2}a, BO = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, 所以 $BO = \frac{1}{2}A_1B, \angle BA_1O = 30^\circ$.

因此, 直线 A_1B 和平面 A_1B_1CD 所成的角为 30° .

变式训练

如图 10, 四面体 $A-BCD$ 的棱长都相等, Q 是 AD 的中点, 求 CQ 与平面 DBC 所成的角的正弦值.

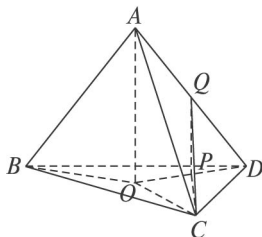


图 10

解: 过 A 作 $AO \perp$ 面 BCD, 连接 OD、OB、OC, 则可证 O 是 $\triangle BCD$ 的中心, 作 $QP \perp OD$,

$\because QP \parallel AO, \therefore QP \perp$ 面 BCD.

连接 CP, 则 $\angle QCP$ 即为所求的角.

设四面体的棱长为 a,

$\because$ 在正 $\triangle ACD$ 中, Q 是 AD 的中点, $\therefore CQ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

$\because QP \parallel AO$, Q 是 AD 的中点,

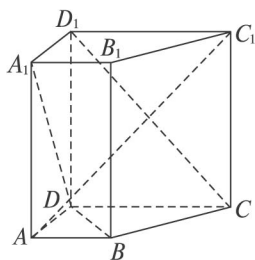
$\therefore QP = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{6}}{6}a$, 得

$$\sin \angle QCP = \frac{QP}{CQ} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

点评: 求直线与平面所成的角, 是本节的又一重点, 作线面角的关键是找出平面的垂线.

思路 2

例 1 (2007 山东高考, 文 20) 如图 11(1), 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $DC=DD_1=2AD=2AB$, $AD \perp DC$, $AB \parallel DC$.

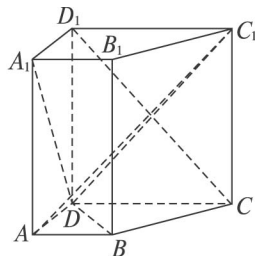


(1)

(1) 求证: $D_1C \perp AC_1$;

(2) 设 E 是 DC 上一点, 试确定 E 的位置, 使 $D_1E \parallel$ 平面 A_1BD , 并说明理由.

(1) 证明: 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 连接 C_1D , 如图 11(2).



(2)

$\because DC=DD_1$,

$\therefore$ 四边形 DCC_1D_1 是正方形.

$\therefore DC_1 \perp D_1C$.

又 $AD \perp DC$, $AD \perp DD_1$, $DC \cap DD_1 = D$,

$\therefore AD \perp$ 平面 DCC_1D_1 , $D_1C \subset$ 平面 DCC_1D_1 .

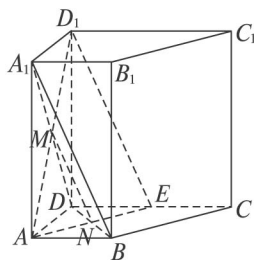
$\therefore AD \perp D_1C$.

$\because AD, DC_1 \subset \text{平面 } ADC_1$, 且 $AD \cap DC_1 = D$,

$\therefore D_1C \perp \text{平面 } ADC_1$.

又 $AC_1 \subset \text{平面 } ADC_1$, $\therefore D_1C \perp AC_1$.

(2)解: 连接 AD_1 、 AE , 如图 11(3).



(3)

图 11

设 $AD_1 \cap A_1D = M$,

$BD \cap AE = N$, 连接 MN ,

$\because \text{平面 } AD_1E \cap \text{平面 } A_1BD = MN$,

要使 $D_1E \parallel \text{平面 } A_1BD$,

需使 $MN \parallel D_1E$,

又 M 是 AD_1 的中点,

$\therefore N$ 是 AE 的中点.

又易知 $\triangle ABN \cong \triangle EDN$,

$\therefore AB = DE$,

即 E 是 DC 的中点.

综上所述, 当 E 是 DC 的中点时, 可使 $D_1E \parallel \text{平面 } A_1BD$.

变式训练

如图 12, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, G 为 CC_1 的中点, O 为底面 $ABCD$ 的中心.

求证: $A_1O \perp \text{平面 } GBD$.

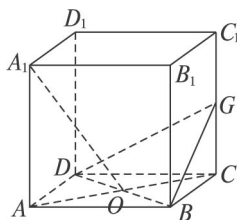


图 12

$$\text{证明: } \left. \begin{array}{l} \because A_1A \perp BD \\ AC \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp \text{平面 } A_1AO \left\{ \begin{array}{l} A_1O \subset \text{面 } A_1AO \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp A_1O.$$

$$\text{又 } \because A_1O^2 = A_1A^2 + AO^2 = a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{3}{2}a^2, OG^2 = OC^2 + CG^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2,$$

$$A_1G^2 = A_1C_1^2 + C_1G^2 = (\sqrt{2}a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}a^2,$$

$$\therefore A_1O^2 + OG^2 = A_1G^2.$$

$$\therefore A_1O \perp OG. \text{ 又 } BD \cap OG = O, \therefore A_1O \perp \text{平面 } GBD.$$

点评：判断线面垂直往往转化为线线垂直，勾股定理也是证明线线垂直的重要方法。

例2 如图13，ABCD为正方形，过A作线段 $SA \perp$ 面ABCD，又过A作与SC垂直的平面交SB、SC、SD于E、K、H，求证：E、H分别是点A在直线SB和SD上的射影。

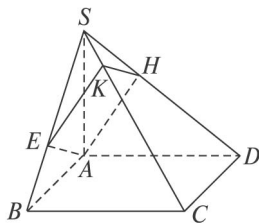


图 13

证明： $\because \begin{cases} SA \perp \text{平面} ABCD \\ BC \subset \text{平面} ABCD \end{cases} \Rightarrow SA \perp BC,$

又 $\because AB \perp BC, SA \cap AB = A,$

$\therefore BC \perp \text{平面} SAB. \therefore BC \perp AE.$

$\because SC \perp \text{平面} AHKE, \therefore SC \perp AE.$

又 $BC \cap SC = C, \therefore AE \perp \text{平面} SBC.$

$\therefore AE \perp SB$, 即E为A在SB上的射影. 同理可证, H是点A在SD上的射影.

变式训练

已知 $Rt\triangle ABC$ 的斜边BC在平面 α 内，两直角边AB、AC与 α 都斜交，点A在平面 α 内的射影是点A'，求证： $\angle BA'C$ 是钝角。

证明：如图14，过A作 $AD \perp BC$ 于D，连接A'D，

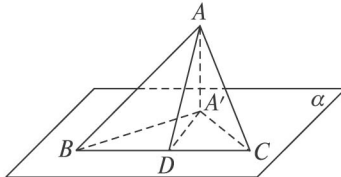


图 14

$\because AA' \perp \alpha, BC \subset \alpha, \therefore AA' \perp BC.$

$\therefore BC \perp A'D.$

$\because \tan \angle BAD = \frac{BD}{AD} < \tan \angle BA'D = \frac{BD}{A'D}, \tan \angle CAD = \frac{CD}{AD} < \tan \angle CA'D = \frac{CD}{A'D},$

$\therefore \angle BAD < \angle BA'D, \angle CAD < \angle CA'D.$

$\therefore \angle BAC < \angle BA'C$, 即 $\angle BA'C$ 是钝角。

(四) 知能训练

如图15，已知a、b是两条相互垂直的异面直线，线段AB与两异面直线a、b垂直且相交，线段AB的长为定值m，定长为n($n > m$)的线段PQ的两个端点分别在a、b上移动，M、N分别是AB、PQ的中点。

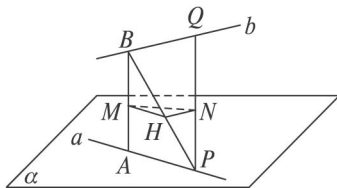


图 15

求证: (1) $AB \perp MN$;

(2) MN 的长是定值.

证明: (1) 取 PB 中点 H , 连接 HN , 则 $HN \parallel b$.

又 $\because AB \perp b, \therefore AB \perp HN$.

同理, $AB \perp MH$.

$\therefore AB \perp$ 平面 $MNH. \therefore AB \perp MN$.

$$(2) \because \begin{cases} b \perp AB \\ b \perp a \end{cases} \Rightarrow b \perp \text{平面 } PAB. \therefore b \perp PB.$$

在 $\text{Rt}\triangle PBQ$ 中, $BQ^2 = PQ^2 - PB^2 = n^2 - PB^2$, ①

在 $\text{Rt}\triangle PBA$ 中, $PA^2 = PB^2 - AB^2 = PB^2 - m^2$, ②

①②两式相加 $PA^2 + BQ^2 = n^2 - m^2, \therefore a \perp b, \therefore \angle MHN = 90^\circ$.

$$\therefore MN = \sqrt{MH^2 + NH^2} = \sqrt{\left(\frac{PA}{2}\right)^2 + \left(\frac{BQ}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{n^2 - m^2} \text{ (定值)}.$$

(五) 拓展提升

1. 如图 16, 已知在侧棱垂直于底面三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=3, AB=5, BC=4, AA_1=4$, 点 D 是 AB 的中点.

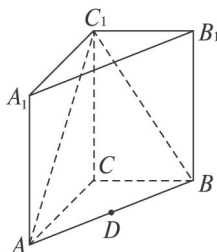


图 16

(1) 求证: $AC \perp BC_1$;

(2) 求证: $AC_1 \parallel$ 平面 CDB_1 ;

(1) 证明: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=3, AB=5, BC=4$,

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形. $\therefore AC \perp CB$.

又 $\because CC_1 \perp$ 面 $ABC, AC \subset$ 面 $ABC, \therefore AC \perp CC_1$.

$\therefore AC \perp$ 面 BCC_1B_1 . 又 $BC_1 \subset$ 面 $BCC_1B_1, \therefore AC \perp BC_1$.

(2) 证明: 连接 B_1C 交 BC_1 于 E , 则 E 为 BC_1 的中点, 连接 DE , 则在 $\triangle ABC_1$ 中, $DE \parallel AC_1$.

又 $DE \subset$ 面 CDB_1 , 则 $AC_1 \parallel$ 面 B_1CD .

(六) 课堂小结

知识总结: 利用面面垂直的性质定理找出平面的垂线, 然后解决证明垂直问题、平行问题、求角问题、求距离问题等.

思想方法总结: 转化思想, 即把面面关系转化为线面关系, 把空间问题转化为平面问题.

(七) 作业

课本习题 2.2 B 组 3、4.

§ 2.3.2 平面与平面垂直的判定

一、教材分析

在空间平面与平面之间的位置关系中,垂直是一种非常重要的位置关系,它不仅应用较多,而且是空间问题平面化的典范.空间中平面与平面垂直的定义是通过二面角给出的,二面角是高考中的重点和难点.使学生掌握两个平面互相垂直的判定,提高学生空间想象能力,提高等价转化思想渗透的意识,进一步提高学生分析问题、解决问题的能力;使学生学会多角度分析、思考问题,培养学生的创新精神.

二、教学目标

1. 知识与技能

(1) 使学生正确理解和掌握“二面角”、“二面角的平面角”及“直二面角”、“两个平面互相垂直”的概念;

(2) 使学生掌握两个平面垂直的判定定理及其简单的应用;

(3) 使学生理会“类比归纳”思想在教学问题解决上的作用.

2. 过程与方法

(1) 通过实例让学生直观感知“二面角”概念的形成过程;

(2) 类比已学知识,归纳“二面角”的度量方法及两个平面垂直的判定定理.

3. 情态、态度与价值观

通过揭示概念的形成、发展和应有和过程,使学生理会教学存在于观实生活周围,从中激发学生积极思维,培养学生的观察、分析、解决问题能力.

三、教学重点与难点

教学重点:平面与平面垂直判定.

教学难点:平面与平面垂直判定和求二面角.

四、课时安排

1 课时

五、教学设计

(一) 复习

两平面的位置关系:

(1) 如果两个平面没有公共点,则两平面平行 $\Leftrightarrow$ 若 $\alpha \cap \beta = \emptyset$, 则 $\alpha \parallel \beta$.

(2) 如果两个平面有一条公共直线,则两平面相交 $\Leftrightarrow$ 若 $\alpha \cap \beta = AB$, 则 α 与 β 相交.

两平面平行与相交的图形表示如图 1.

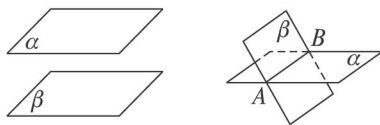


图 1

(二) 导入新课

思路 1.(情境导入)

为了解决实际问题,人们需要研究两个平面所成的角.修筑水坝时,为了使水坝坚固耐用必须使水坝面与水平面成适当的角度;发射人造地球卫星时,使卫星轨道平面与地球赤道平面成一定的角度.为此,我们引入二面角的概念,研究两个平面所成的角.

思路 2.(直接导入)

前边举过门和墙所在平面的关系,随着门的开启,其所在平面与墙所在平面的相交程度在变,怎样描述这种变化呢?今天我们一起探究两个平面所成角问题.

(三) 推进新课、新知探究、提出问题

①二面角的有关概念、画法及表示方法.

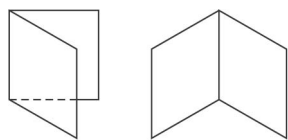
- ②二面角的平面角的概念.
- ③两个平面垂直的定义.
- ④用三种语言描述平面与平面垂直的判定定理, 并给出证明.
- ⑤应用面面垂直的判定定理难点在哪里?

讨论结果: ①二面角的有关概念.

二面角的定义: 从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角. 这条直线叫二面角的棱, 这两个半平面叫二面角的面.

二面角常用直立式和平卧式两种画法: 如图 2 (教师和学生共同动手).

直立式:



(1)

平卧式:



(2)

图 2

二面角的表示方法: 如图 3 中, 棱为 AB , 面为 α 、 β 的二面角, 记作二面角 α - AB - β . 有时为了方便也可在 α 、 β 内 (棱以外的半平面部分) 分别取点 P 、 Q , 将这个二面角记作二面角 P - AB - Q .

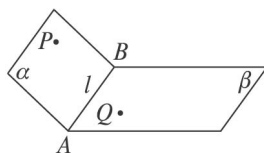


图 3

如果棱为 l , 则这个二面角记作 $\alpha l \beta$ 或 PlQ .

②二面角的平面角的概念.

如图 4, 在二面角 $\alpha l \beta$ 的棱上任取点 O , 以 O 为垂足, 在半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱的射线 OA 和 OB , 则射线 OA 和 OB 组成 $\angle AOB$.

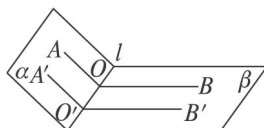


图 4

再取棱上另一点 O' , 在 α 和 β 内分别作 l 的垂线 $O'A'$ 和 $O'B'$, 则它们组成角 $\angle A'O'B'$.

因为 $OA \parallel O'A'$, $OB \parallel O'B'$, 所以 $\angle AOB$ 及 $\angle A'O'B'$ 的两边分别平行且方向相同,

即 $\angle AOB = \angle A'O'B'$.

从上述结论说明了: 按照上述方法作出的角的大小, 与角的顶点在棱上的位置无关.

由此结果引出二面角的平面角概念: 以二面角的棱上任意一点为端点, 在两个面内分别作垂直于棱的两条射线, 这两条射线所成的角叫做二面角的平面角.

图中的 $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$ 都是二面角 $\alpha l \beta$ 的平面角.

③直二面角的定义.

二面角的大小可以用它的平面角来度量, 二面角的平面角是多少度, 就说二面角是多少度. 平面角是直角的二面角叫做直二面角.

教室的墙面与地面, 一个正方体中每相邻的两个面、课桌的侧面与地面都是互相垂直的.

两个平面互相垂直的概念和平面几何里两条直线互相垂直的概念相类似, 也是用它们所成的角为直角来定义, 二面角既可以为锐角, 也可以为钝角, 特殊情形又可以为直角.

两个平面互相垂直的定义可表述为:

如果两个相交平面所成的二面角为直二面角, 那么这两个平面互相垂直.

直二面角的画法：如图 5.

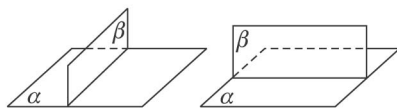


图 5

④两个平面垂直的判定定理.

如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

两个平面垂直的判定定理符号表述为：
$$\left. \begin{array}{l} AB \perp \beta \\ AB \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta.$$

两个平面垂直的判定定理图形表述为：如图 6.

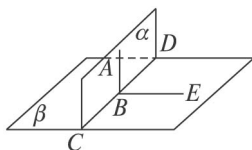


图 6

证明如下：

已知 $AB \perp \beta$, $AB \cap \beta = B$, $AB \subset \alpha$.

求证： $\alpha \perp \beta$.

分析：要证 $\alpha \perp \beta$, 需证 α 和 β 构成的二面角是直二面角，而要证明一个二面角是直二面角，需找到其中一个平面角，并证明这个二面角的平面角是直角.

证明：设 $\alpha \cap \beta = CD$ ，则由 $AB \subset \alpha$ ，知 AB 、 CD 共面.

$\because AB \perp \beta$, $CD \subset \beta$, $\therefore AB \perp CD$ ，垂足为点 B .

在平面 β 内过点 B 作直线 $BE \perp CD$,

则 $\angle ABE$ 是二面角 $\alpha-CD-\beta$ 的平面角.

又 $AB \perp BE$ ，即二面角 $\alpha-CD-\beta$ 是直二面角，

$\therefore \alpha \perp \beta$.

⑤应用面面垂直的判定定理难点在于：在一个平面内找到另一个平面的垂线，即要证面面垂直转化为证线线垂直.

(四) 应用示例

思路 1

例 1 如图 7, $\odot O$ 在平面 α 内, AB 是 $\odot O$ 的直径, $PA \perp \alpha$, C 为圆周上不同于 A 、 B 的任意一点.

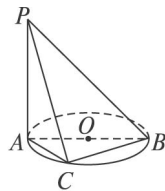


图 7

求证：平面 $PAC \perp$ 平面 PBC .

证明：设 $\odot O$ 所在平面为 α , 由已知条件, $PA \perp \alpha$, $BC \subset \alpha$, $\therefore PA \perp BC$.

$\because C$ 为圆周上不同于 A 、 B 的任意一点, AB 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore BC \perp AC$.

又 $\because PA$ 与 AC 是 $\triangle PAC$ 所在平面内的两条相交直线,

$\therefore BC \perp$ 平面 PAC .

$\because BC \subset$ 平面 PBC , $\therefore$ 平面 $PAC \perp$ 平面 PBC .

变式训练

如图 8, 把等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 沿斜边 AB 旋转至 $\triangle ABD$ 的位置, 使 $CD=AC$,

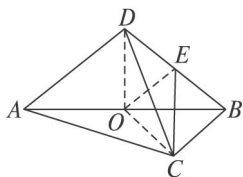


图 8

(1) 求证: 平面 $ABD \perp$ 平面 ABC ;

(2) 求二面角 $CBDA$ 的余弦值.

(1) **证明:** 由题设, 知 $AD=CD=BD$,

作 $DO \perp$ 平面 ABC , O 为垂足, 则 $OA=OB=OC$.

$\therefore O$ 是 $\triangle ABC$ 的外心, 即 AB 的中点.

$\therefore O \in AB$, 即 $O \in$ 平面 ABD .

$\therefore OD \subset$ 平面 ABD .

$\therefore$ 平面 $ABD \perp$ 平面 ABC .

(2) **解:** 取 BD 的中点 E , 连接 CE 、 OE 、 OC ,

$\because \triangle BCD$ 为正三角形, $\therefore CE \perp BD$.

又 $\triangle BOD$ 为等腰直角三角形, $\therefore OE \perp BD$.

$\therefore \angle OEC$ 为二面角 $CBDA$ 的平面角.

同 (1) 可证 $OC \perp$ 平面 ABD .

$\therefore OC \perp OE$. $\therefore \triangle COE$ 为直角三角形.

$$\text{设 } BC=a, \text{ 则 } CE=\frac{\sqrt{3}}{2}a, OE=\frac{1}{2}a, \therefore \cos \angle OEC=\frac{OE}{CE}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

点评: 欲证面面垂直关键在于在一个平面内找到另一个平面的垂线.

例 2 如图 9 所示, 河堤斜面与水平面所成二面角为 60° , 堤面上有一条直道 CD , 它与堤角的水平线 AB 的夹角为 30° , 沿这条直道从堤脚向上行走 10 m 时人升高了多少? (精确到 0.1 m)

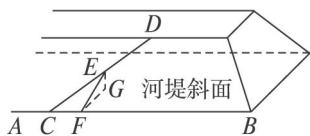


图 9

解: 取 CD 上一点 E , 设 $CE=10$ m, 过点 E 作直线 AB 所在的水平面的垂线 EG , 垂足为 G , 则线段 EG 的长就是所求的高度.

在河堤斜面内, 作 $EF \perp AB$, 垂足为 F , 并连接 FG ,

则 $FG \perp AB$, 即 $\angle EFG$ 就是河堤斜面与水平面 ABG 所成二面角的平面角,

$$\angle EFG=60^\circ, \text{ 由此, 得 } EG=EF \sin 60^\circ=CE \sin 30^\circ \sin 60^\circ=10 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2} \approx 4.3 \text{ (m)}.$$

答: 沿直道行走 10 m 时人升高约 4.3 m.

变式训练

已知二面角 $\alpha AB \beta$ 等于 45° , $CD \subset \alpha$, $D \in AB$, $\angle CDB=45^\circ$. 求 CD 与平面 β 所成的角.

解: 如图 10, 作 $CO \perp \beta$ 交 β 于点 O , 连接 DO , 则 $\angle CDO$ 为 DC 与 β 所成的角.

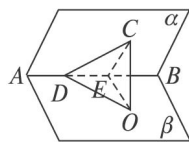


图 10

过点 O 作 $OE \perp AB$ 于 E, 连接 CE, 则 $CE \perp AB$.

$\therefore \angle CEO$ 为二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的平面角,

即 $\angle CEO = 45^\circ$.

设 $CD = a$, 则 $CE = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $\because CO \perp OE$, $OC = OE$,

$\therefore CO = \frac{1}{2}a$. $\because CO \perp DO$, $\therefore \sin \angle CDO = \frac{CO}{CD} = \frac{1}{2}$.

$\therefore \angle CDO = 30^\circ$, 即 DC 与 β 成 30° 角.

点评: 二面角是本节的另一个重点, 作二面角的平面角最常用的方法是: 在一个半平面 α 内找一点 C, 作另一个半平面 β 的垂线, 垂足为 O, 然后通过垂足 O 作棱 AB 的垂线, 垂足为 E, 连接 AE, 则 $\angle CEO$ 为二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的平面角. 这一过程要求学生熟记.

思路 2

例 1 如图 11, ABCD 是菱形, $PA \perp$ 平面 ABCD, $PA = AD = 2$, $\angle BAD = 60^\circ$.

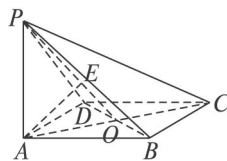


图 11

(1) 求证: 平面 PBD $\perp$ 平面 PAC;

(2) 求点 A 到平面 PBD 的距离;

(3) 求二面角 APBD 的余弦值.

(1) **证明:** 设 AC 与 BD 交于点 O, 连接 PO,

$\because$ 底面 ABCD 是菱形, $\therefore BD \perp AC$.

$\because PA \perp$ 底面 ABCD, $BD \subset$ 平面 ABCD, $\therefore PA \perp BD$.

又 $PA \cap AC = A$, $\therefore BD \perp$ 平面 PAC.

又 $\because BD \subset$ 平面 PBD, $\therefore$ 平面 PBD $\perp$ 平面 PAC.

(2) **解:** 作 $AE \perp PO$ 于点 E, $\because$ 平面 PBD $\perp$ 平面 PAC, $\therefore AE \perp$ 平面 PBD.

$\therefore AE$ 为点 A 到平面 PBD 的距离.

在 $\triangle PAO$ 中, $PA = 2$, $AO = 2 \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}$, $\angle PAO = 90^\circ$,

$$\therefore PO = \sqrt{PA^2 + AO^2} = \sqrt{7}, \therefore AE = \frac{PA \cdot AO}{PO} = \frac{2\sqrt{3}}{7} = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$$

$\therefore$ 点 A 到平面 PBD 的距离为 $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

3) **解:** 作 $AF \perp PB$ 于点 F, 连接 EF,

$\because AE \perp$ 平面 PBD, $\therefore AE \perp PB$.

$\therefore PB \perp$ 平面 AEF, $PB \perp EF$.

∴ ∠AFE 为二面角 APBD 的平面角.

在 Rt△AEF 中, $AE = \frac{2\sqrt{21}}{7}$, $AF = \sqrt{2}$,

$$\therefore \sin \angle AFE = \frac{AE}{AF} = \frac{\sqrt{42}}{7}, \cos \angle AFE = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{42}}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

∴ 二面角 APBD 的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

变式训练

如图 12, $PA \perp$ 矩形 ABCD 所在平面, M、N 分别是 AB、PC 的中点.

- (1) 求证: $MN \parallel$ 平面 PAD;
- (2) 求证: $MN \perp CD$;
- (3) 若二面角 PDCA = 45° , 求证: $MN \perp$ 平面 PDC.

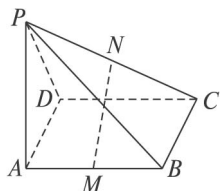


图 12

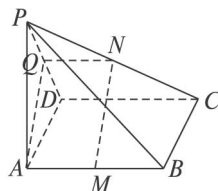


图 13

证明: 如图 13 所示,

- (1) 取 PD 的中点 Q, 连接 AQ、NQ, 则 $QN \parallel \frac{1}{2}DC$, $AM \parallel \frac{1}{2}DC$,

∴ $QN \parallel AM$.

∴ 四边形 AMNQ 是平行四边形. ∴ $MN \parallel AQ$.

又 ∵ $MN \not\subset$ 平面 PAD, $AQ \subset$ 平面 PAD, ∴ $MN \parallel$ 平面 PAD.

- (2) ∵ $PA \perp$ 平面 ABCD, ∴ $PA \perp CD$.

又 ∵ $CD \perp AD$, $PA \cap AD = A$, ∴ $CD \perp$ 平面 PAD.

又 ∵ $AQ \subset$ 平面 PAD, ∴ $CD \perp AQ$.

又 ∵ $AQ \parallel MN$, ∴ $MN \perp CD$.

- (3) 由 (2) 知, $CD \perp$ 平面 PAD,

∴ $CD \perp AD$, $CD \perp PD$.

∴ ∠PDA 是二面角 PDCA 的平面角. ∴ $\angle PDA = 45^\circ$.

又 ∵ $PA \perp$ 平面 ABCD, ∴ $PA \perp AD$. ∴ $AQ \perp PD$.

又 ∵ $MN \parallel AQ$, ∴ $MN \perp PD$.

又 ∵ $MN \perp CD$, ∴ $MN \perp$ 平面 PDC.

例 2 如图 14, 已知直四棱柱 ABCD—A₁B₁C₁D₁ 的底面是菱形, 且 $\angle DAB = 60^\circ$, $AD = AA_1$, F 为棱 BB₁ 的中点, M 为线段 AC₁ 的中点.

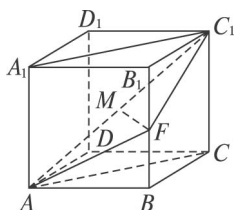


图 14

- (1) 求证: 直线 $MF \parallel$ 平面 $ABCD$;
 (2) 求证: 平面 $AFC_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 ;
 (3) 求平面 AFC_1 与平面 $ABCD$ 所成二面角的大小.
 (1) **证明:** 延长 C_1F 交 CB 的延长线于点 N , 连接 AN .

$\because F$ 是 BB_1 的中点,

$\therefore F$ 为 C_1N 的中点, B 为 CN 的中点.

又 M 是线段 AC_1 的中点, 故 $MF \parallel AN$.

又 $\because MF \not\subset$ 平面 $ABCD, AN \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore MF \parallel$ 平面 $ABCD$.

(2) **证明:** 连接 BD , 由直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 可知 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$,

又 $\because BD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore AA_1 \perp BD$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\therefore AC \perp BD$.

又 $\because AC \cap AA_1 = A, AC, AA_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,

$\therefore BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

在四边形 $DANB$ 中, $DA \parallel BN$ 且 $DA = BN$,

$\therefore$ 四边形 $DANB$ 为平行四边形.

故 $NA \parallel BD$, $\therefore NA \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

又 $\because NA \subset$ 平面 AFC_1 ,

$\therefore$ 平面 $AFC_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

(3) **解:** 由 (2) 知 $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 又 $AC_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 , $\therefore BD \perp AC_1$.

$\because BD \parallel NA$, $\therefore AC_1 \perp NA$.

又由 $BD \perp AC$, 可知 $NA \perp AC$,

$\therefore \angle C_1AC$ 就是平面 AFC_1 与平面 $ABCD$ 所成二面角的平面角或补角.

在 $Rt\triangle C_1AC$ 中, $\tan \angle C_1AC = \frac{C_1C}{CA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 故 $\angle C_1AC = 30^\circ$.

$\therefore$ 平面 AFC_1 与平面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 30° 或 150° .

变式训练

如图 15 所示, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, 侧面 $SDC \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $AB=2, SC=SD=2$.

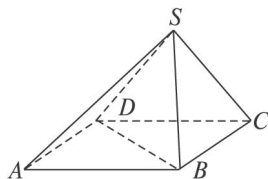


图 15

- (1) 求证: 平面 $SAD \perp$ 平面 SBC ;
 (2) 设 $BC=x$, BD 与平面 SBC 所成的角为 α , 求 $\sin \alpha$ 的取值范围.

(1) **证明:** 在 $\triangle SDC$ 中, $\because SC=SD=\sqrt{2}$, $CD=AB=2$,

$\therefore \angle DSC = 90^\circ$, 即 $DS \perp SC$.

$\because$ 底面 $ABCD$ 是矩形, $\therefore BC \perp CD$.

又 $\because$ 平面 $SDC \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore BC \perp$ 面 SDC .

$\therefore DS \perp BC$. $\therefore DS \perp$ 平面 SBC .

$\because DS \subset$ 平面 SAD , $\therefore$ 平面 $SAD \perp$ 平面 SBC .

(2) **解:** 由 (1) 知 $DS \perp$ 平面 SBC , $\therefore SB$ 是 DB 在平面 SBC 上的射影.

$\therefore \angle DBS$ 就是 BD 与平面 SBC 所成的角, 即 $\angle DBS = \alpha$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/095341304340011314>