2.2 基本不等式（第二课时）

复习回顾 **1. 两个重要的不等式**

(1)$a, b \in R$，那么$a^2 + b^2 \geq 2ab$，当且仅当$a = b$时等号成立

(2)$a > 0, b > 0$，那么$a + b \geq 2\sqrt{ab}$，当且仅当$a = b$时等号成立

变形式1：$a + b \geq 2\sqrt{ab}$

变形式2：$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Rightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

一正、二定、三相等

已知 x, y 都是正数，P, S 是常数.

(1) $xy=P \Rightarrow x+y \geqslant 2\sqrt{P}$（当且仅当 $x=y$ 时，取“=”号）

(2) $x+y=S \Rightarrow xy \leqslant \frac{1}{4}S^2$（当且仅当 $x=y$ 时，取“=”号）.

例1(１)用篱笆围一个面积为１００的矩形菜园 ,当这个矩形的边长为多少时 , 所用篱笆最短？ 最短篱笆的长度是多少？

(２) 用一段长为 ３６m 的篱笆围成一个矩形菜园 ,当这个矩形的边长为多少时,菜园的面积最大？ 最大面积是多少？

解:设矩形菜园的相邻两条边的长分别为xm,ym,

篱笆的长度为2(x+y)m.

(1)由已知由 $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$,

可得 $x+y\geq 2\sqrt{xy}=20$

所以, $2(x+y)\geq 40$

当且仅当x=y=10时，上式等号成立.

最短篱笆的长度是40m.

例1(１)用篱笆围一个面积为１００的矩形菜园 ,当这个矩形的边长为多少时，所用篱笆最短？ 最短篱笆的长度是多少？
(２) 用一段长为 ３６m 的篱笆围成一个矩形菜园 ,当这个矩形的边长为多少时,菜园的面积最大？ 最大面积是多少？

(2)由已知得2(x+y)=36，矩形菜园的面积为xy

由 $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ **= 9,**

可得 $xy \leq$ **81，**

当且仅当x= y=9时，”=”成立.

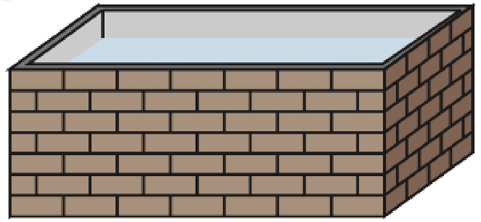
菜园的最大面积是81m^2.

例某工厂要建造一个长方体形贮水池，其容积为4800m³，深为3m．如果池底每平方米的造价为150，池壁每平方米的造价为120元，那么怎样设计水池能使总造价最低？最低造价是多少？

分析:贮水池是长方体形，它的高是3m，池底的边长没有确定．
如果池底的边长确定了，那么水池的总造价也就确定了．
因此，应当考察池底的边长取什么值时，水池的总造价最低．

解: 设贮水池池底的相邻两边的边长分别为xm，ym，水池的总造价为z元．根据题意，有

$$z=150\times\frac{4\,800}{3}+120(2\times 3x+2\times 3y)$$
$$=240\,000+720(x+y)$$



由容积为4800m³,可得3xy=4800,因此xy=1600.

$$z\geqslant 240\,000+720\times 2\sqrt{xy}$$

当且仅x=y=40时，等号成立，此时z=297600.

所以，将贮水池的池底设计成边长为40m的正方形时，总造价最低．
最低总造价是297600元．

归纳

在应用基本不等式解决实际问题时，应按如下步骤进行：

（1）先理解题意，设变量，设变量时一般把要求最大值或最小值的变量定为函数；

（2）建立相应的函数关系式，把实际问题抽象为函数的最大值或最小值问题；

（3）在定义域内，求出函数的最大值或最小值；

（4）正确写出答案．

练习:做一个体积为$32m^3$，高为2m的长方体纸盒，当底面的边长取什么值时，用纸最少?

解:设长方体纸盒底面的相邻两边的边长分别为xm，ym，

根据题意，有$xy=16$.

若要用纸最少,只要底面周长最小,即$2(x+y)$取得最小值.

因为 $2(x+y)\geq 2\cdot 2\sqrt{xy}=16$

当且仅当x=y=4时等号成立.

所以当纸盒底面是边长为4m的正方形时，用纸最少.

4．用一段长为30m的篱笆围成一边靠墙的矩形菜园，墙长18m．当这个矩形的边长为多少时，菜园的面积最大?最大面积是多少?

解:设矩形的一边长为xm，另外两边长为ym，其中$0<x\leqq 18$，根据题意$x+2y=30$．若要菜园面积最大，只要xy取得最大值．

因为 $$x \cdot y=\frac{1}{2}x\cdot 2y \le \frac{1}{2}\cdot\frac{(x+2y)^2}{4}=\frac{225}{2}$$

当且仅当x=2y即x=15, y=7. 5时等号成立.

所以当矩形菜园的一边长为15m,另两边长为7. 5m时,菜园的面积最大，最大面积是 $\frac{225}{2}\mathrm{m}^2$

已知一个矩形的周长为32 cm，矩形绕它的一条边旋转形成一个圆柱．当矩形的边长为多少时，旋转形成的圆柱的侧面积最大？

解： 设矩形的长为a，宽为b，

则由题意得$2(a+b)=36$,即$a+b=18$.

因为旋转形成的圆柱的侧面积为:$2\pi ab$，

所以要求侧面积最大，即求ab的最大值，

由基本不等式得：$ab\le (\frac{a+b}{2})^2=81$，当且仅当$a=b=9$时取等号.

故当矩形的长宽都为9时，旋转形成的圆柱的侧面积最大.

作业课本 P_{48} 习题2.2第3，6，7，8题

利用基本不等式求最值

（1）已知$x>0$，求$x+\frac{4}{x}$的最小值；

解：（1）$\because x>0$

$$\therefore x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$$

当且仅当$x=\frac{4}{x}$，即$x=2$时，等号成立

$\therefore x+\frac{4}{x}$的最小值为4.