

摘要

近年来,光与物质相互作用的研究受到了广泛的关注,超导电路、腔量子电动力学(腔 QED)、离子阱和自旋-轨道耦合量子点在实验上已经成功用拉比(Rabi)模型模拟。通过对 Rabi 模型进行可积性讨论,研究者打破了光与原子耦合强度的局限性,这为后续实验的研究提供了一定的理论基础,也激发了人们研究拓展 Rabi 模型丰富物理特性的兴趣。随着纳米机械振子的发展,Rabi 模型的研究从光腔系统拓展到了光力腔系统,为深入探索宏观机械运动的本质提供了一个全新的视角。基于此,本文研究了光腔与二能级原子相互作用的量子相变问题,着重探讨了 Rabi 模型在多光子跃迁下和机械振子影响下的量子相变,主要结果如下:

(一) 拓展 Rabi 模型在原子-场耦合强度、腔频和跃迁光子数影响下的量子相变。首先利用自旋相干态变分法求得多光子跃迁下 Rabi 模型的能量解析解,然后解出能量解析解的一阶、二阶变分以及相变界条件,最后计算了平均光子数、原子布居数。通过刻画单光子、双光子跃迁下光子数随光腔频率和原子-场耦合强度变化下的相图发现:在正频率区,单光子跃迁时系统会发生正常相到超辐射相的二级量子相变,双光子跃迁时正常相和反转态全区域存在,同时在相变界之后的区域中也存在不稳定的光子数解;在负频率区,单光子跃迁时在相变界之后的区域中仅有反转的正常态稳定存在,双光子跃迁时在临界值之后的区域中出现了稳定的非零光子数解,来自于反转的能量态,此时充当了超辐射态。多光子跃迁时,稳定的非零光子数解出现在整个负频率区域,零频线是共存的正常相和反转的超辐射相的边界线。

(二) 通过调控原子-场耦合强度、机械振子耦合强度和非平衡参数探究了拓展 Rabi 模型在共振条件下的量子相变和宏观多稳态等特性,通过自旋相干态变分法得到了在机械振子影响下该模型的能量解析解以及一阶、二阶变分式。首先给出了标准光力腔的平均光子数随原子-场耦合强度和机械振子耦合强度变化下的相图,发现:随着机械振子耦合强度的增大,相变点前正常态的区域不变,但超辐射态的区域会被压制;当机械振子耦合强度达到临界值时,超辐射态将完全塌缩。当光力腔中注入第二个原子后,且假定两个原子之间无相互作用,发现系统出现了丰富的宏观多稳态和新的量子相变。第二个原子的出现会使得系统能量泛函出现多支,且各有稳定的零光子数解和非零光子数解,因此相图出现共存的多稳定态。为了更好的理解不同原子与场耦合强度对相图的影响,我们刻画了非平衡参数调控下的丰富相图。

目 录

中文摘要	I
ABSTRACT	III
1 绪论	1
1.1 Rabi 模型	1
1.2 Rabi 模型的实现与应用	2
1.3 自旋相干态	3
1.4 主要内容及方法	6
2 多光子跃迁下 Rabi 模型的量子相变	7
2.1 引言	7
2.2 Rabi 模型及能量泛函	7
2.2.1 哈密顿量和自旋相干态变分法解	7
2.2.2 稳定性	9
2.2.3 双光子跃迁的能量泛函	12
2.2.4 量子相变	15
2.3 本章小结	17
3 Rabi 模型在机械振子诱导下的量子相变	19
3.1 光力腔系统	19
3.2 在机械振子影响下的 Rabi 模型	19
3.2.1 系统哈密顿量	19
3.2.2 稳定性	19
3.2.3 基态特性	23
3.2.4 宏观多稳态及量子相变	23
3.2.4.1 机械振子影响下的平均光子数线图及相应的相图	23
3.2.4.2 共振条件下的平均光子数线图及相应的相图	25
3.2.4.3 非平衡参数调控下的平均光子数线图及相应的相图	30
3.3 本章小结	37
4 总结与展望	39
参考文献	41
攻读学位期间取得的研究成果	47

1 绪论

1.1 Rabi 模型

19 世纪末, 经典力学已经无法满足对微观世界更深层本质的探索, 而 20 世纪初诞生的量子力学很好的解释了物质的基本结构, 也更加深入的探索了物质与物质间的相互作用。起初, 科学家们探讨的是光与物质之间的相互作用, 将研究重点主要放在了原子光谱、原子和光子的辐射和吸收上。在 1917 年, A. Einstein 在研究原子自发辐射问题时提出了受激发射跃迁理论, 该理论为激光的诞生奠定了理论基础; 在 1937 年, I. I. Rabi 在研究核磁矩与电磁场相互作用模型的过程中发明了分子束共振法, 后来该模型也被人们称为半经典形式的 Rabi 模型^[1,2], 而分子束共振法在建立原子钟、发展核磁共振技术、测量拉姆移位和研制微波激射器等领域发挥了重要的作用。由于 I. I. Rabi 发明了一种能够准确记录原子核磁性的共振法, 因此荣获了 1944 年的诺贝尔物理学奖。在 1963 年, E. T. Jaynes 和 F. W. Cummings 两人在 Rabi 模型的基础上共同提出了一种形式简单、物理内涵极其丰富的模型, 就是 Jaynes-Cummings 模型^[3] (即 J-C 模型)。J-C 模型描述的是把一个具有二能级的原子放入到量子化的光场中, 研究原子与光场之间相互作用的量子模型。Rabi 模型是广泛应用于许多领域中的常见模型, 例如: 凝聚态物理、腔量子电动力学和量子光学等领域, 因此, 该模型受到了物理学相关领域研究人员的广泛关注。自从在实验上成功实现 Rabi 模型以来, 该模型在科学和技术价值上体现的就尤为重要: 首先, Rabi 模型在实验上的实现让凝聚态物理从理论研究上得到了深入的发展, 使人们对场-原子之间相互作用的认识步入到了原子结构更深的层次; 其次, Rabi 模型的物理特性可以在微波腔系统中再现, 这表明 Rabi 模型在其它物理系统中也能够得到应用。随着科学技术的不断发展, 微波腔和光学腔系统与原子相互作用的操控技术得到了极大的发展。这时, 人们必须要考虑包含非旋转波项的 Rabi 模型哈密顿量的精确解析解, 从而在理论上给出该模型的精确解析解成为了十分重要而又迫切解决的问题。关于 Rabi 模型的可积性和是否可精确求解等问题一直以来是人们讨论的热点话题, 直到 2011 年, D. Braak 教授对 Rabi 模型的可积性^[4]进行了讨论, 并给出了其精确的解析解, 这一研究成果是令人瞩目的; 2012 年, 浙江大学陈庆虎教授^[5]用 Bogoliubov 变换方法也给出了 Rabi 模型的精确解析解。2012 年, 法国物理学家 S. Haroche 和美国物理学家 D. Wineland 在实验上成功实现了对单个量子比特的操控和测量; 2017 年,

F. Yoshihara、T. Fuse 和 S. Ashhab 等人成功实现了超导量子比特线路实验，使其原子-场耦合强度从之前的弱耦合达到深度强耦合；2018 年，美国物理学家 A. Ashkin 在实验上成功实现了用激光操控微粒的“光学镊子”。此后，关于 Rabi 模型人们做了很多理论与实验相结合的工作，例如：光场与原子的压缩效应^[6]、原子布居数^[7]的崩塌与复苏现象和量子相变^[8]等等。人们也对 Rabi 模型做了一系列的推广，例如：多光子的 Rabi 模型^[9]，多原子的 Rabi 模型等等。T-C 模型^[10]就是这些推广模型中的一种模型，在 1968 年由 M. Tavis 和 F. W. Cummings 两人共同提出的一种新的模型，该模型描述的是两个完全相同的二能级原子与单模光场之间的相互作用，这是对 Rabi 模型的进一步拓展，因此也被人们称之为 T-C 模型。当然，早在 1954 年，R. H. Dicke 就提出了一个考虑大量处于自发辐射过程中的原子与光学谐振腔相互作用的模型，也被称为 Dicke 模型^[11]，其在量子光学和腔 QED 的应用中可描述为具有 N 个二能级的原子与量子化的单模光场相互作用。

1.2 Rabi 模型的实现与应用

最早在实验上成功模拟出 Rabi 模型的系统是腔量子电动力学系统(即腔 QED 系统)，该系统描述的是一个二能级里德堡原子和量子化的电磁场在高品质因子的微波腔中相互作用。里德堡原子指的是普通原子的一个电子被激发到高的主量子数状态，因而其具备了独特的性质：能级寿命长、半径长和电偶极矩强等等。里德堡原子在相邻能级间跃迁时，辐射或吸收的电磁波都位于微波波段，这与微波腔之间有了很长的相干时间、极强的相互作用，具备了能够在实验上观测到光与原子相互作用的条件。因此，我们可以说许多在基态原子上无法实现的实验用里德堡原子来实现成为了可能。随着光腔和微波腔技术的不断发展，人们对腔的品质因子极为注重，有人提出了介观尺寸的概念，即纳米量级（介于宏观和微观之间的尺寸）。品质因子指的是系统储存的总能量与单一周期损失能量的比值，表示振子阻尼性质的物理量，具有强烈感受周围环境微妙变化的能力，这让微波腔和光腔的感受性能显得极为重要。把里德堡原子放到高品质且小体积的（纳米）微波腔和光腔中做实验，使得相互作用的耦合强度达到深度强耦合成为了可能。通过减小微波腔和光腔的尺寸，就可以显著缩短 Rabi 振荡的时间^[12]，增强了光与里德堡原子之间的耦合强度，最终在后续的实验中成功地实现了真空 Rabi 劈裂^[13]。一般来说，腔的品质因子与共振频率共同决定了腔的特性，所以人们常常把位于微波波段内的腔称之为微波腔，把位于光波段内的腔称之为

为光学腔。随着 21 世纪的到来，纳米科学技术的发展取得了长足的进步，光学腔的品质也随之提升，相继出现了从 g - z g 的品质因子。因为光学腔的制作工艺有所不同，所以光学腔也可分为法布里-珀罗腔^[14-16]、基于回音壁模式的微型腔^[17-19]以及光子晶体腔^[20-22]等几大类。

腔 QED 系统是一种非常重要的系统，可以帮助人们更好地理解光子与原子之间的相互作用。近几十年来，许多重要的量子力学效应都已得到了验证，并且拥有着巨大的发展空间。特别是在实验中实现了光子与原子之间相互作用的耦合强度达到深度强耦合之后，标志着腔 QED 系统将涉及到前所未有的领域。基于深度强耦合机制下的腔 QED 系统已经在光领域取得了重大突破，成功地制备出了单光子源，实现了单光子和单原子之间量子态的传递，并且还可以检测到光子阻塞效应^[23]等重要现象。腔 QED 系统为实现量子信息^[24]传输和量子计算^[25]等方面提供了重要帮助，对基础理论和应用研究也都具有重要价值^[26]。

1.3 自旋相干态

早在上世纪九十年代初，自旋晶体管的概念就已经被 S. Datta 和 B. Das^[27]这两人提出了，这是一种新型的电子器件，在实现电荷的双向传输的同时还携带着自旋。近年来，A. Imamoglu^[28]利用自旋波函数构建了一种新型的量子计算机，并且一些实验结果表明，这种电子器件可以通过自旋相干态来实现，因为其自旋相干状态能够持续保持几百 PS 的量级^[29]。此后，人们在制造自旋电子器件的过程中遇到了两个棘手的挑战：一方面，如何将极化的自旋电子（或空穴）引入半导体^[30]；另一方面，又如何检测到这些自旋电子。因此，让我们对这一领域的研究进展先简要的介绍一下。波函数 ψ 在孤立的量子系统中满足Schrödinger方程：

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \dots\dots\dots(1.1)$$

系统的哈密顿量用(1.1)式中的 H 来表示，系统的波函数为

$$\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1.2)$$

(1.2)式中的 b 和 a 是用来描述系统在不同状态下振幅的量度。当时间 t 处于零时刻时，系统正处在基态（即 $a = 0, b = 1$ ），这时，系统的哈密顿量 H 可以用下面的公式来表示：

$$H = -\vec{e}E \cdot \mathbf{r} \dots\dots\dots(1.3)$$

根据(1.3)式，由于哈密顿量 H 对二能级系统的能量影响可以被完全忽略，因此，我们

可以将(1.1)式的结构重新构建，并将其中的电场的单位矢量替换成 \vec{e} ，

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -eEr_{12} \\ -eEr_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1.4)$$

在态 1 和态 2 之间，电偶极矩阵元可以用(1.4)式中 $r_{12} = \langle 1|r|2\rangle$ 来表示，以便更好地描述它们之间的关系。通过应用波函数的初始条件，我们可以求解出方程(1.4)式，并得到以下结果：

$$a = \sin \frac{eEr_{12}}{\hbar} t, \quad b = \cos \frac{eEr_{12}}{\hbar} t \dots\dots\dots(1.5)$$

从(1.5)式可以发现：一个二能级量子系统与光场相互作用时在基态和激发态之间电子将会不断地进行跃迁，跃迁频率为

$$\omega = \frac{eEr_{12}}{\hbar} \dots\dots\dots(1.6)$$

(1.6)式的跃迁频率后来被称之为拉比(Rabi)频率。在该系统中，当电子从基态跃变为激发态，将从光场中获取能量，而当回归到基态时会释放能量。当 t 为零时，半导体系统仍然保持具有同样的振幅 a 和 b，并且可以按照(1.6)式的规律进行时间演化，这种现象被称为电荷相干态。

当然，自旋相干态应该是更一般性的选择。由于自旋算符 \hat{J}_x, \hat{J}_y 和 \hat{J}_z 的不可约性，使其构成了一个稳固的与经典-量子系统相对应的宏观量子状态。首先，SU(2)群的对易关系可由自旋算符来满足：

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i \sum_k \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k \dots\dots\dots(1.7)$$

这里令 $\hbar = 1$ ，使得自旋算符无量纲化；若我们引入升降算符 $\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y, \hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y$ ，那式(1.7)对易关系转化为：

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = \pm \hat{J}_\pm, \quad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_z \dots\dots\dots(1.8)$$

由于 Hilbert 空间中SU(2)群的维数为 2J+1，我们通常采用完备组 J^2 和 J_z 来讨论其共同本征矢量 $|j, m\rangle$ ，

$$\hat{J}^2 |j, m\rangle = J(J + 1) |j, m\rangle \dots\dots\dots(1.9)$$

$$\hat{J}_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle \dots\dots\dots(1.10)$$

其中，量子数 J 和 m 的可能取值如下所示，

$$J = 0, 1/2, 1, 3/2, 2 \dots \dots\dots(1.11)$$

$$m = \{-J, -J + 1, \dots, J - 1, J\} \dots\dots\dots(1.12)$$

一般情况下，在接下来的讨论过程中将忽略平庸解 $J = 0$ 时的情况，下面我们给出的

是自旋算符的测不准关系式:

$$|\langle \hat{J}_z \rangle| \leq 2 \langle (\Delta \hat{J}_x)^2 \rangle^{1/2} \langle (\Delta \hat{J}_y)^2 \rangle^{1/2} \dots\dots\dots(1.13)$$

其中 $\langle \hat{J} \rangle = \langle \psi | \hat{J} | \psi \rangle$, $\Delta \hat{J}_i = \hat{J}_i - \langle \hat{J}_i \rangle$, 将波函数 $|\psi\rangle = |j, m\rangle$ 作用于方程式(1.13)式, 可以得到:

$$|m| \leq J(J+1) - m^2 \dots\dots\dots(1.14)$$

(1.14)式中等号成立的条件是取 $m = \pm J$, 那么两个最小的测不准态就是态 $|J, -J\rangle$ 和 $|J, J\rangle$ 。当 m 取为最大值时, 态 $|J, J\rangle$ 在 $SU(2)$ 群中有如下关系式:

$$\hat{J} \cdot \vec{e}_z |J, J\rangle = \hat{J}_z |J, J\rangle = J |J, J\rangle \dots\dots\dots(1.15)$$

在这里, 以 \vec{e}_z 轴为态 $|J, J\rangle$ 的量子化方向, 把自旋相干态 $|n\rangle$ 定义成由量子化方向只为 \vec{e}_z 轴的态转变成到任意量子化方向为 \vec{n} 的态。换言之, 自旋相干态^[31]就是自旋在空间任意位置上的最大自旋本征值对应的本征态, 其满足的关系式为:

$$\vec{n} \cdot \hat{J} |n\rangle = J |n\rangle \dots\dots\dots(1.16)$$

根据不同的参数化方式, 有两种方式来构成自旋算符在 $SU(2)$ 空间群中的生成元, 这两种自旋相干态的定义方式^[32]分别为:

定义 1: 设单位矢量 \vec{n} 在球坐标空间中的分量极角为 θ 和方位角为 ϕ , 也就是说 $\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$, 则我们可以将自旋相干态 $|n\rangle$ 定义为^[33,34]

$$|n\rangle \equiv e^{-i\phi\hat{J}_z} e^{-i\theta\hat{J}_y} e^{-i\phi\hat{J}_z} |J, J\rangle \dots\dots\dots(1.17)$$

(1.17)式中的 ϕ 角为任意值, 这主要与定义的规范有关。可以从一些简单的计算中得到: 从(1.17)式中得到的自旋相干态满足方程(1.16)式的条件, 证明如下:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \hat{J} |n\rangle &= R(\vec{e}_z, \phi) R(\vec{e}_y, \theta) R(\vec{e}_z, \phi) \vec{e}_z \cdot \hat{J} |n\rangle \\ &= e^{-i\phi\hat{J}_z} e^{-i\phi\hat{J}_z} e^{-i\theta\hat{J}_y} e^{-i\phi\hat{J}_z} (\vec{e}_z \cdot \hat{J}) e^{-i\theta\hat{J}_y} e^{-i\phi\hat{J}_z} (\vec{e}_z \cdot \hat{J}) e^{i\phi\hat{J}_z} e^{i\theta\hat{J}_y} e^{i\phi\hat{J}_z} |n\rangle \\ &= e^{-i\phi\hat{J}_z} e^{-i\theta\hat{J}_y} e^{-i\phi\hat{J}_z} (\vec{e}_z \cdot \hat{J}) |J, J\rangle = J |n\rangle \dots\dots\dots(1.18) \end{aligned}$$

定义 2: 自旋相干态的另外一种定义方式为^[35-37]

$$|n\rangle = e^{-i\theta\vec{m} \cdot \hat{J}} |J, J\rangle \dots\dots\dots(1.19)$$

其中

$$\vec{m} = \frac{(\vec{e}_z \times \vec{n})}{|\vec{e}_z \times \vec{n}|} = \cos\phi \vec{e}_y - \sin\theta \vec{e}_x = (-\sin\theta, \cos\phi, 0) \dots\dots\dots(1.20)$$

或者我们可以将其改写成

$$|n\rangle = e^{i\theta(\sin\phi\hat{J}_x - \cos\phi\hat{J}_y)} |J, J\rangle = e^{\frac{\theta}{2}(e^{i\phi}\hat{J}_- - e^{-i\phi}\hat{J}_+)} |J, J\rangle \dots\dots\dots(1.21)$$

我们可以发现：由第二种方式定义的自旋相干态同样满足方程(1.16)式的条件，

$$\begin{aligned}
 \vec{n} \cdot \hat{J}|n\rangle &= R(\vec{m}, \theta) \vec{e}_z \cdot \hat{J}|n\rangle \\
 &= e^{-\theta \vec{m} \cdot \hat{J}} \vec{e}_z \cdot \hat{J} e^{i\theta \vec{m} \cdot \hat{J}} |n\rangle \\
 &= e^{-i\theta \vec{m} \cdot \hat{J}} \vec{e}_z \cdot \hat{J} |J, J\rangle \\
 &= J|n\rangle \dots\dots\dots(1.22)
 \end{aligned}$$

另外，我们发现，如果使 $\varphi = -\phi$ ，则两种定义可以相互转化

$$\begin{aligned}
 |n\rangle &\equiv e^{-i\phi \hat{J}_z} e^{-i\theta \hat{J}_y} e^{i\phi \hat{J}_z} |J, J\rangle \\
 &= e^{i\theta(\sin\phi \hat{J}_x - \cos\phi \hat{J}_y)} |J, J\rangle \dots\dots\dots(1.23)
 \end{aligned}$$

在以上运算过程中我们用到了公式

$$e^{-i\phi \hat{J}_z} \hat{J}_y e^{i\phi \hat{J}_z} = -\sin\phi \hat{J}_x + \cos\phi \hat{J}_y \dots\dots\dots(1.24)$$

1.4 主要内容及方法

第一章中我们简要的介绍了 Rabi 模型的背景综述，为后文的理论基础进行了铺垫。

第二章中我们主要研究了 Rabi 模型在多光子跃迁下的量子相变及多稳态。通过自旋相干态变分法把等效的赝自旋哈密顿量对角化并解得了系统的能量泛函表达式，同时根据变分结果求得了光子数解和相变界条件，之后对原子-场耦合强度和原子频率等条件进行调控，然后通过相应的线图和相图观察到光腔内单光子、双光子和多光子跃迁时对 Rabi 模型量子态、多稳性和量子相变的影响。

第三章中我们主要研究了 Rabi 模型在机械振子影响下的量子相变。利用自旋相干态变分法，我们可以获得系统的能量表达式，基于能量表达式求解出了能量泛函的一阶、二阶变分，根据变分的极值条件可求得系统的平均光子数、原子布居数和平均能量。在共振条件下，通过调控原子-场耦合强度、机械振子耦合强度和非平衡参数探究了系统的量子相变和宏观多稳态等相关特性，并且对线图和相图进行了分析。

2 多光子跃迁下 Rabi 模型的量子相变

2.1 引言

目前,相变已成为凝聚态物理学领域的重要研究课题,涵盖了物质世界中各种物态的存在以及物态与物态之间的转变,是物理学研究的基础。相变是一种物理现象,其可分为经典相变^[38]和量子相变^[39]。经典相变研究的是宏观物质在热力学极限下发生的变化,这种变化取决于系统的热涨落。量子相变研究的是多体系统的基态能量随序参数的变化而引起的量子涨落现象^[40],系统的序参数在相变点附近发生微小的变化就能导致体系的物理性质发生本质的改变。目前,量子相变已经成为处理量子光学、量子信息等问题的重要途径。

Rabi 模型^[41]广泛应用于量子相变^[42]理论,该模型描述的是一个二能级原子与单模量子化的光腔进行相互作用,当原子-场耦合强度达到临界值时,系统会发生从正常相到超辐射相的量子相变。虽然 Rabi 模型形式简单,但在腔量子电动力学^[43]、量子信息^[44]和量子测量^[45]中发挥着核心作用。Birnbbaum 等研究者^[46]发现,在腔量子电动力学系统中有效的非线性光子-光子相互排斥的本质源自于系统中原子和光子之间的耦合,即所谓的光子阻塞效应^[47],该效应与腔内光子隧穿之间的相互作用将会导致腔量子电动力学系统耦合形成晶格。最近,人们提出了 J-C 晶格模型^[48],可用于研究从 Mott 绝缘相到超流相的量子相变问题^[49]。目前,人们广泛研究了双光子、多光子 Rabi 模型的特性^[50],这些研究结果对深入理解 Rabi 模型的特性有一定的指导意义。

在本章中我们运用自旋相干态变分法解出了多光子跃迁下 Rabi 模型的能量解析解,并分析研究了当多光子 Rabi 模型退回到单光子、双光子 Rabi 模型时的量子相变等基态特性问题。

2.2 Rabi 模型及能量泛函

2.2.1 哈密顿量和自旋相干态变分法解

当一个二能级原子和单模光腔相互作用时,在 n 光子跃迁下系统的哈密顿量可表示为($\hbar = 1$):

$$H = \omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \omega_a \sigma_z + g(a^n + a^{\dagger n})(\sigma_+ + \sigma_-) \dots \dots \dots (2.1)$$

式中 ω 代表着光场的频率， ω_a 是指原子的跃迁频率， a^\dagger 、 a 则是指光场的产生和湮灭算符， σ_z 、 σ_+ 、 σ_- 则是指原子的集体赝自旋算符， g 是指原子与光场相互作用的耦合强度。如果我们假设基态波函数为玻色场的相干态 $|\alpha\rangle$ ，且满足 $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ ，其复特征根可以用 $\alpha = \gamma e^{i\eta}$ 来表示。在玻色场相干态 $|\alpha\rangle$ 表象下，方程(2.1)成为有效自旋哈密顿量：

$$H_{eff}(\alpha) = \langle \alpha | H | \alpha \rangle = \omega \gamma^2 + \frac{1}{2} \omega_a \sigma_z + g(\gamma^n e^{i\eta n} + \gamma^n e^{-i\eta n})(\sigma_+ + \sigma_-) \dots\dots\dots(2.2)$$

用自旋投影算符 $\vec{s} \cdot \vec{n}$ 的本征态 $|\mp n\rangle$ 把赝自旋哈密顿量对角化，本征方程为：

$$H_{sp}(\gamma, \eta) |\mp n\rangle = E_{sp}^\mp |\mp n\rangle \dots\dots\dots(2.3)$$

算符 $\vec{s} \cdot \vec{n}$ 是一种自旋投影算符，其本征态是 $|\mp n\rangle$ ，本征值是 $\mp s$ ，其中 $s = N/2$ 。如果我们假定 $\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ 是方向角 θ 和 ϕ 的单位矢量^[51]，那么我们可以通过旋转算符^[52] $\mathcal{R}(\theta, \phi) = e^{\frac{\theta}{2}(\sigma_+ e^{-i\phi} - \sigma_- e^{i\phi})}$ 和 σ_z 的本征态 $|\mp\rangle$ 来生成自旋相干态 $|\mp n\rangle$ ，即 $|\mp n\rangle = \mathcal{R}(\theta, \phi) |\mp\rangle$ 。则系统的试探波函数为玻色相干态 $|\alpha\rangle$ 和自旋相干态 $|\mp n\rangle$ 的直积，即

$$|\psi_\mp\rangle = |\alpha\rangle |\mp n\rangle \dots\dots\dots(2.4)$$

把系统的哈密顿量作用到试探波函数上，最终得到的本征能量为

$$E_\mp(\gamma) = \langle \psi_\mp | H | \psi_\mp \rangle = \omega \gamma^2 \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} \omega_a^2 + 16g^2 \gamma^{2n}} \dots\dots\dots(2.5)$$

从(2.5)式发现，体系的多重稳定态会被正常自旋态(\downarrow)和反常自旋态(\uparrow)所影响，其对应的能量泛函分别为：

$$E_\downarrow(\gamma_\downarrow) = \omega \gamma_\downarrow^2 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} \omega_a^2 + 16g^2 \gamma_\downarrow^{2n}} \dots\dots\dots(2.6)$$

$$E_\uparrow(\gamma_\uparrow) = \omega \gamma_\uparrow^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} \omega_a^2 + 16g^2 \gamma_\uparrow^{2n}} \dots\dots\dots(2.7)$$

能量的极值条件是由能量泛函(2.6)和(2.7)式求一阶变分得到

$$\frac{\partial E_\downarrow(\gamma_\downarrow)}{\partial \gamma_\downarrow} = 2\omega \gamma_\downarrow - \frac{8ng^2 \gamma_\downarrow^{2n-1}}{\sqrt{\frac{1}{4} \omega_a^2 + 16g^2 \gamma_\downarrow^{2n}}} = 2\gamma_\downarrow \left(\omega - \frac{4ng^2 \gamma_\downarrow^{2n-2}}{\sqrt{\frac{1}{4} \omega_a^2 + 16g^2 \gamma_\downarrow^{2n}}} \right) = 0 \dots\dots\dots(2.8)$$

$$\frac{\partial E_\uparrow(\gamma_\uparrow)}{\partial \gamma_\uparrow} = 2\omega \gamma_\uparrow + \frac{8ng^2 \gamma_\uparrow^{2n-1}}{\sqrt{\frac{1}{4} \omega_a^2 + 16g^2 \gamma_\uparrow^{2n}}} = 2\gamma_\uparrow \left(\omega + \frac{4ng^2 \gamma_\uparrow^{2n-2}}{\sqrt{\frac{1}{4} \omega_a^2 + 16g^2 \gamma_\uparrow^{2n}}} \right) = 0 \dots\dots\dots(2.9)$$

其对应的能量二阶变分分别为：

$$\frac{\partial^2 E_\downarrow(\gamma_\downarrow)}{\partial^2 \gamma_\downarrow^2} = 2\omega - \frac{(16n^2 - 8n)g^2 \gamma_\downarrow^{2n-2} \sqrt{\frac{1}{4} \omega_a^2 + 16g^2 \gamma_\downarrow^{2n}} - \frac{128n^2 g^4 \gamma_\downarrow^{4n-2}}{\sqrt{\frac{1}{4} \omega_a^2 + 16g^2 \gamma_\downarrow^{2n}}}}{\frac{1}{4} \omega_a^2 + 16g^2 \gamma_\downarrow^{2n}} \dots\dots\dots(2.10)$$

$$\frac{\partial^2 E_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow})}{\partial^2 \gamma_{\uparrow}^2} = 2\omega + \frac{(16n^2+8n)g^2\gamma_{\uparrow}^{2n-2}\sqrt{\frac{1}{4}\omega_a^2+16g^2\gamma_{\uparrow}^{2n}} - \frac{128n^2g^4\gamma_{\uparrow}^{4n-2}}{\sqrt{\frac{1}{4}\omega_a^2+16g^2\gamma_{\uparrow}^{2n}}}}{\frac{1}{4}\omega_a^2+16g^2\gamma_{\uparrow}^{2n}} \dots\dots\dots(2.11)$$

由一阶变分(2.8)和(2.9)式发现：为零的光子数解全区域存在，不为零的光子数解在相变点之后的区域存在。不为零的光子数解为

$$n_p^n = (\gamma^2)^n = \frac{n^2g^2}{\omega^2}\gamma^{4(n-1)} - \frac{\omega_a^2}{64g^2} \dots\dots\dots(2.12)$$

原子布居数为

$$\Delta n_a = \pm \frac{1}{4} \frac{\omega_a}{\sqrt{\frac{1}{4}\omega_a^2+16g^2\gamma^{2n}}} \dots\dots\dots(2.13)$$

2.2.2 稳定性

当跃迁光子数 $n = 1$ 时，此时系统退回到了 Rabi 模型，对应的能量泛函(2.6)和(2.7)式退化为

$$E_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow}) = \omega\gamma_{\downarrow}^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\omega_a^2 + 16g^2\gamma_{\downarrow}^2} \dots\dots\dots(2.14)$$

$$E_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow}) = \omega\gamma_{\uparrow}^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\omega_a^2 + 16g^2\gamma_{\uparrow}^2} \dots\dots\dots(2.15)$$

能量的一阶变分可由(2.8)和(2.9)式得到

$$\frac{\partial E_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow})}{\partial \gamma_{\downarrow}} = 2\omega\gamma_{\downarrow} - \frac{8g^2\gamma_{\downarrow}}{\sqrt{\frac{1}{4}\omega_a^2+16g^2\gamma_{\downarrow}^2}} = 2\gamma_{\downarrow} \left(\omega - \frac{4g^2}{\sqrt{\frac{1}{4}\omega_a^2+16g^2\gamma_{\downarrow}^2}} \right) = 0 \dots\dots(2.16)$$

$$\frac{\partial E_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow})}{\partial \gamma_{\uparrow}} = 2\omega\gamma_{\uparrow} + \frac{8g^2\gamma_{\uparrow}}{\sqrt{\frac{1}{4}\omega_a^2+16g^2\gamma_{\uparrow}^2}} = 2\gamma_{\uparrow} \left(\omega + \frac{4g^2}{\sqrt{\frac{1}{4}\omega_a^2+16g^2\gamma_{\uparrow}^2}} \right) = 0 \dots\dots(2.17)$$

对(2.16)和(2.17)式求解，可得到系统的光子数解

$$\gamma = 0, \gamma = \pm \sqrt{\frac{g^2}{\omega^2} - \frac{\omega_a^2}{64g^2}} \dots\dots\dots(2.18)$$

此时全区域存在的是为零的光子数解($\gamma = 0$)，其对应的能量泛函的二阶导为

$$\frac{\partial^2 E_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow}=0)}{\partial^2 \gamma_{\downarrow}^2} = 2\omega - \frac{16g^2}{\omega_a} > 0 \dots\dots\dots(2.19)$$

$$\frac{\partial^2 E_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow}=0)}{\partial^2 \gamma_{\uparrow}^2} = 2\omega + \frac{16g^2}{\omega_a} > 0 \dots\dots\dots(2.20)$$

解(2.19)式可得到系统相变界的临界值 $g_{c\downarrow} = 1/2\sqrt{\omega\omega_a/2}$ ，Rabi 模型在 $g_{c\downarrow}$ 处发生了从正常相(N_{\downarrow})到超辐射相(S_{\downarrow})的二阶量子相变。当 $g < g_{c\downarrow}$ 时，此时系统处于正常相光子数为零的解是稳定存在的。对于 $\gamma_{\uparrow} = 0$ ，能量泛函的二阶导(2.20)式是恒大于零，可见光子数为零的解是稳定的，用 N_{\uparrow} 表示，称为反转的正常相。为了更好地理解平均

光子数的解情况和稳定性，图 2-1 刻画了能量的一阶变分和能量随光子数变化的线图，其中正常自旋态(\downarrow)的光子数稳定的解用 $\gamma_{s\downarrow}$ 表示，且具有最小值的能量泛函；用 $\gamma_{us\uparrow}$ 表示反转的自旋态(\uparrow)的光子数不稳定的解，且具有最大值的能量泛函；正常自旋态(\downarrow)的稳定和不稳定零光子数的解用 $\gamma_{0s\downarrow}$ 和 $\gamma_{0us\downarrow}$ 表示；反转自旋态(\uparrow)的稳定和不稳定零光子数的解用 $\gamma_{0s\uparrow}$ 和 $\gamma_{0us\uparrow}$ 表示。

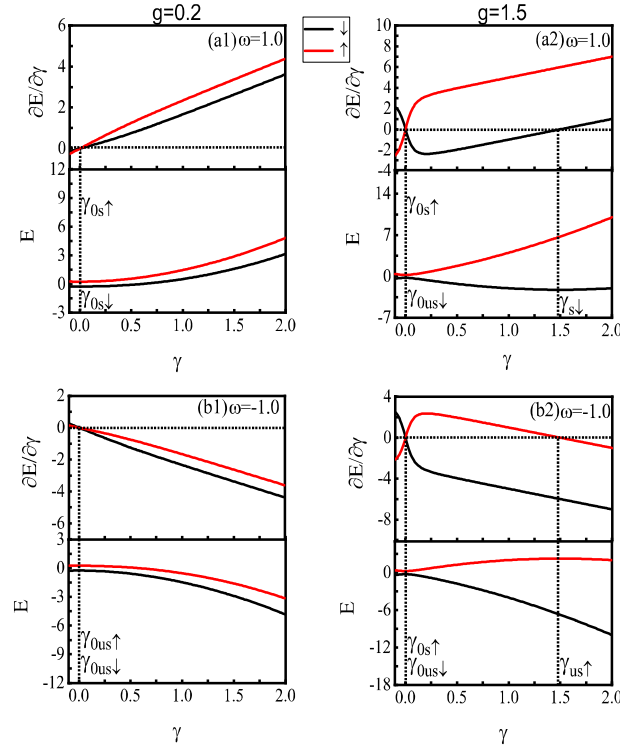


图 2-1 $\partial E(\gamma)/\partial\gamma$ 和 $E(\gamma)$ 随变量 γ 的变化。变化的参数是光腔频率 $\omega = 1.0$ (a), -1.0 (b)和原子-场耦合常数 $g = 0.2$ (1), 1.5 (2)，而原子的频率 $\omega_a = 1.0$ 。

图 2-1 中正常态的能量泛函的一阶变分 $\partial E_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow})/\partial\gamma_{\downarrow}$ 和正常态的能量泛函 $E_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow})$ 用黑线表示，而反转态的能量泛函的一阶变分 $\partial E_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow})/\partial\gamma_{\uparrow}$ 和反转态的能量泛函 $E_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow})$ 用红线表示。所有图我们选择用 $\omega = 1.0$ MHz作为单位矢量。从图(a)可看出：腔频率取正时， $\partial E_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow})/\partial\gamma_{\downarrow}$ 存在为零的解 $\gamma_{0us\downarrow}$ 和不为零的解 $\gamma_{s\downarrow}$ ，通过 E_{\downarrow} 的极值来验证其稳定性；为零的解 $\gamma_{0s\downarrow}$ 和 $\gamma_{0s\uparrow}$ 的位置并没有受原子-场耦合强度增大的影响，只是推迟了不为零的解 $\gamma_{s\downarrow}$ 的出现，但并未改变所有解的稳定性。当腔频率取负时，从图(b)可看出：发生显著变化的是 $\partial E_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow})/\partial\gamma_{\downarrow}$ ， $\gamma_{s\downarrow}$ 不为零的解消失了，只存在为零的解 $\gamma_{0us\downarrow}$ ，此时具有极大值的是能量 E_{\downarrow} 。对于红线，图(a)显示出：腔频率取正时， $\partial E_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow})/\partial\gamma_{\uparrow}$ 仅存在为零的解 $\gamma_{0s\uparrow}$ ，此时 E_{\uparrow} 具有极小值；为零的解 $\gamma_{0s\uparrow}$ 的位置并没有受原子-场耦合强度增大的影响。当腔频率取负时，图(b)有了显著变化，为零的解 $\gamma_{0s\uparrow}$ 没有发生变化，同时 $\partial E_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow})/\partial\gamma_{\uparrow}$ 出现了不为零的解 $\gamma_{us\uparrow}$ ，对应极大值的是能量 E_{\uparrow} 。

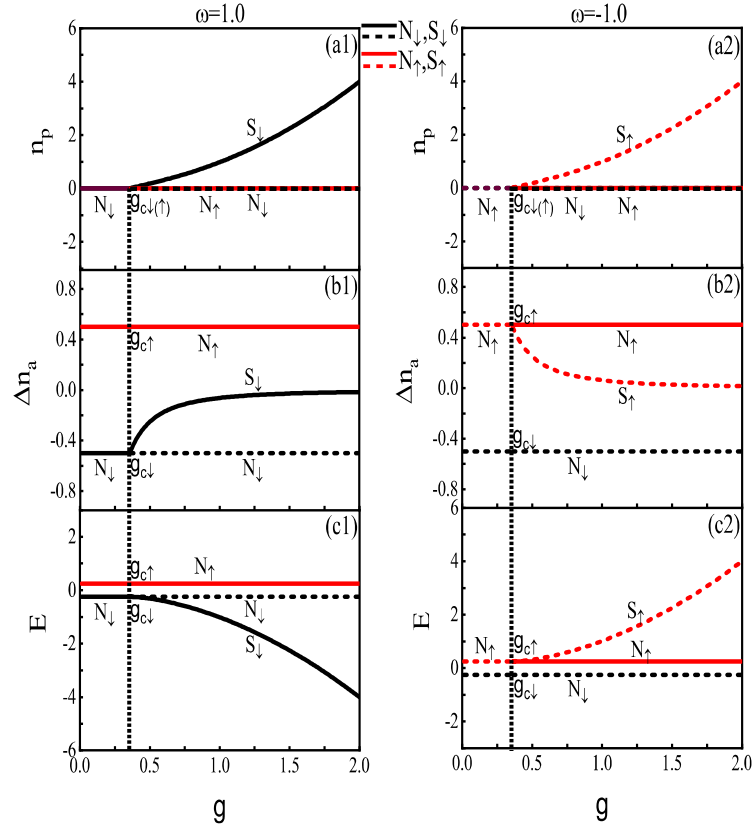


图 2-2 平均光子数 n_p (a1-a2)、原子布居数 Δn_a (b1-b2)和能量 E (c1-c2)随原子-场耦合强度 g 的变化曲线。变化的参数是光腔频率 $\omega = 1.0, -1.0$ 和原子的频率 $\omega_a = 1.0$ 。

图 2-2 分别刻画了腔频率为正频率(a1 – c1)和负频率(a2 – c2)下平均光子数 n_p 、原子布居数 Δn_a 和能量 E 随原子-场耦合强度 g 变化的曲线。图 2-2(a1)显示：原子-场耦合常数在临界值 $g_{c\downarrow}$ 处发生了相变，此时系统发生了从正常相 N_\downarrow 到超辐射相 S_\downarrow 的转变，稳定的反转正常相 N_\uparrow 全区域存在，系统中稳定的正常相 N_\downarrow 与反转正常相 N_\uparrow 共存是发生在 $g \leq g_{c\downarrow}$ 时；而在 $g \geq g_{c\downarrow}$ 区域正常相 N_\downarrow 变成不稳，可通过图 2-1 (a) 中能量的一阶变分解的情形和能量的极值来判断。图 2-2(b1)和图 2-2(b2)与图 2-2(c1)和 2-2(c2)对应的是原子布居数和能量。图 2-2(b2)显示，不稳定的正常相 N_\downarrow 全空间存在，而反转的正常相 N_\uparrow 在 $g \geq g_{c\uparrow}$ 区域内是不稳定的，在 $g \leq g_{c\uparrow}$ 区域内是稳定的，且与不稳定的光子数不为零的解 S_\uparrow 共存。图 2-2(c2)显示：正常相 N_\downarrow 在全区域是不稳定的，对应的能量 E_\downarrow 始终是 -0.25 ；在 $g \geq g_{c\uparrow}$ 区域，反转正常相 N_\uparrow 是不稳定的，对应的能量 E_\uparrow 的值为 0.25 ，在 $g \leq g_{c\uparrow}$ 区域，系统中存在稳定的反转正常相 N_\uparrow 和不稳定的超辐射相 S_\uparrow ，稳定的反转正常相 N_\uparrow 对应的能量 E_\uparrow 的值为 0.25 。

图 2-3 是原子频率为 $\omega_a = 1$ 时 $g - \omega$ 平面的相图。正频率区域，在临界值 $g_{c\downarrow}$ 处，系统发生了正常相 N_\downarrow 到超辐射相 S_\downarrow 的转变，反转的正常相 N_\uparrow 全区域稳定存在。在负频率区域，在 $g \leq g_{c\uparrow}$ 区域内没有稳定的态，仅有稳定的反转正常相 N_\uparrow 在 $g \geq g_{c\uparrow}$ 区域内

成为了基态。

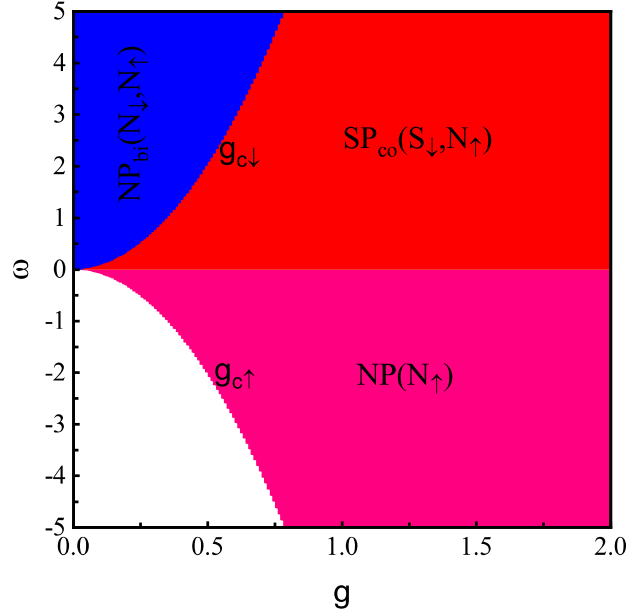


图 2-3 平均光子数 n_p 随腔场频率 ω 和原子-场耦合强度 g 变化的相图，并且 $\omega_a = 1$ 。

2.2.3 双光子跃迁的能量泛函

当跃迁光子数 $n = 2$ 时，此时系统变成了双光子 Rabi 模型，对应的能量泛函分别为

$$E_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow}) = \omega\gamma_{\downarrow}^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\omega_a^2 + 16g^2\gamma_{\downarrow}^4} \dots\dots\dots(2.21)$$

$$E_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow}) = \omega\gamma_{\uparrow}^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\omega_a^2 + 16g^2\gamma_{\uparrow}^4} \dots\dots\dots(2.22)$$

通过对能量泛函(2.21)和(2.22)式求一阶导，得到的系统能量泛函的极值条件为

$$\frac{\partial E_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow})}{\partial \gamma_{\downarrow}} = 2\omega\gamma_{\downarrow} - \frac{16g^2\gamma_{\downarrow}^3}{\sqrt{\frac{1}{4}\omega_a^2 + 16g^2\gamma_{\downarrow}^4}} = 2\gamma_{\downarrow} \left(\omega - \frac{8g^2\gamma_{\downarrow}^2}{\sqrt{\frac{1}{4}\omega_a^2 + 16g^2\gamma_{\downarrow}^4}} \right) = 0 \dots\dots(2.23)$$

$$\frac{\partial E_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow})}{\partial \gamma_{\uparrow}} = 2\omega\gamma_{\uparrow} + \frac{16g^2\gamma_{\uparrow}^3}{\sqrt{\frac{1}{4}\omega_a^2 + 16g^2\gamma_{\uparrow}^4}} = 2\gamma_{\uparrow} \left(\omega + \frac{8g^2\gamma_{\uparrow}^2}{\sqrt{\frac{1}{4}\omega_a^2 + 16g^2\gamma_{\uparrow}^4}} \right) = 0 \dots\dots(2.24)$$

对(2.23)和(2.24)式求解，得到的不为零的光子数解分别为

$$\gamma_{\downarrow}^2 = \frac{\omega\omega_a}{8g\sqrt{4g^2 - \omega^2}} \dots\dots\dots(2.25)$$

$$\gamma_{\uparrow}^2 = \frac{-\omega\omega_a}{8g\sqrt{4g^2 - \omega^2}} \dots\dots\dots(2.26)$$

根据能量泛函的一阶导 (2.23)和(2.24)式，我们发现：为零的光子数解在全区域内稳定存在，其对应的能量泛函的二阶导为

$$\frac{\partial^2 E_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow}=0)}{\partial^2 \gamma_{\downarrow}^2} = 2\omega \dots\dots\dots (2.27)$$

$$\frac{\partial^2 E_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow}=0)}{\partial^2 \gamma_{\uparrow}^2} = 2\omega \dots\dots\dots (2.28)$$

通过(2.25)和(2.26)式可解得系统相变界的临界值为： $g_c = \omega/2$ 。

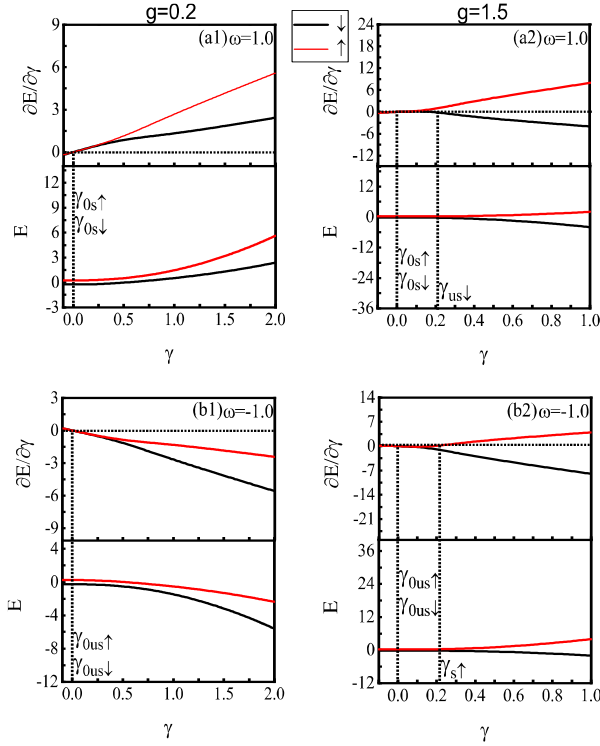


图 2-4 $\partial E(\gamma)/\partial\gamma$ 和 $E(\gamma)$ 随光子数 γ 的变化。变化的参数是光腔频率 $\omega = 1.0$ (a), -1.0 (b)和原子-场耦合常数 $g = 0.2$ (1), 1.5 (2), 而原子的频率 $\omega_a = 1.0$ 。

图 2-4 刻画了能量泛函的一阶变分 $\partial E(\gamma)/\partial\gamma$ 和能量泛函 $E(\gamma)$ 随光子数 γ 变化的线图，正常态的能量泛函的一阶变分 $\partial E_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow})/\partial\gamma_{\downarrow}$ 和正常态的能量泛函 $E_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow})$ 用黑线表示，反转态的能量泛函的一阶变分 $\partial E_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow})/\partial\gamma_{\uparrow}$ 和反转态的能量泛函 $E_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow})$ 用红线表示。腔频率取正时， $\partial E_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow})/\partial\gamma_{\downarrow}$ 和 $\partial E_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow})/\partial\gamma_{\uparrow}$ 都存在为零的解 $\gamma_{0s\downarrow}$ 和 $\gamma_{0s\uparrow}$ 在 $g \leq g_{c\downarrow}$ 区域内（见图 2-4 (a1)所示）。 $\partial E_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow})/\partial\gamma_{\downarrow}$ 存在为零的解 $\gamma_{0s\downarrow}$ 和不为零的解 $\gamma_{us\downarrow}$ 在 $g \geq g_{c\downarrow}$ 区域内（见图 2-4 (a2)所示），通过 E_{\downarrow} 的极值来验证其稳定性；为零的解 $\gamma_{0s\downarrow}$ 和 $\gamma_{0s\uparrow}$ 的位置并没有受原子-场耦合强度增大的影响，只是提前了为零的解的出现，但并未改变所有解的稳定性。另外， $\partial E_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow})/\partial\gamma_{\uparrow}$ 仅存在为零的解 $\gamma_{0s\uparrow}$ ，此时 E_{\uparrow} 具有极小值。腔频率取负时， $\partial E_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow})/\partial\gamma_{\downarrow}$ 和 $\partial E_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow})/\partial\gamma_{\uparrow}$ 都存在为零的解 $\gamma_{0s\downarrow}$ 和 $\gamma_{0s\uparrow}$ 在 $g \leq g_{c\downarrow}$ 区域内（见图 2-4 (b1)所示）。 $\partial E_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow})/\partial\gamma_{\downarrow}$ 发生的显著变化是 $\gamma_{us\downarrow}$ 消失、 $\gamma_{0s\downarrow}$ 转变为 $\gamma_{0us\downarrow}$ 在 $g \geq g_{c\downarrow}$ 区域内，此时能量 E_{\downarrow} 具有极大值， $\partial E_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow})/\partial\gamma_{\uparrow}$ 出现了解 $\gamma_{s\uparrow}$ 、 $\gamma_{0s\uparrow}$ 转变为 $\gamma_{0us\uparrow}$ 在 $g \geq g_{c\downarrow}$ 区域内（见图 2-4 (b2)所示），对应的能量 E_{\uparrow} 具有极小值，这与传统的 Rabi

完全不同。这表明，通过调控腔频率可以有效地操控光腔与原子相互作用系统的量子相变。

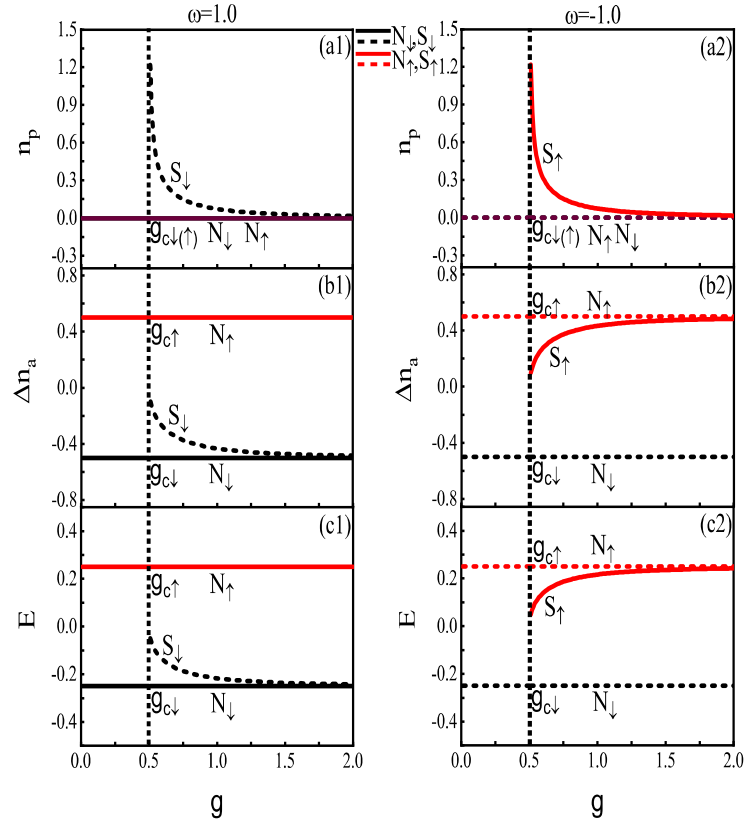


图 2-5 平均光子数 n_p (a1-a2)、原子布居数 Δn_a (b1-b2)和能量 E (c1-c2)随原子-场耦合强度 g 的变化曲线。变化的参数是光腔频率 $\omega = 1.0, -1.0$ 和原子的频率 $\omega_a = 1.0$ 。

图 2-5 分别刻画了双光子 Rabi 模型在腔频率为正频率(a1 – c1)和负频率(a2 – c2)下平均光子数 n_p 、原子布居数 Δn_a 和能量 E 随原子-场耦合强度 g 变化的曲线。在正频率区域，正常相 N_{\downarrow} 和反转的正常相 N_{\uparrow} 全区域存在（见图 2-5(a1)），即相图 2-6 中 $NP_{bi}(N_{\downarrow}, N_{\uparrow})$ 。而不稳定的光子数不为零的解 $S_{us\downarrow}$ 出现在 $g \geq g_{c\downarrow}$ 区域内，与 Rabi 模型的稳定超辐射相 S_{\downarrow} 不同。有趣的是在负频率区域（图 2-5(a2)）内，不稳定的正常相 N_{\downarrow} 和反转的正常相 N_{\uparrow} 全区域存在，而解 S_{\uparrow} 在 $g \geq g_{c\uparrow}$ 区域内存在，且充当了新超辐射相 $SP(S_{\uparrow})$ 。图 2-5(b1)和图 2-5(b2)与图 2-5(c1)和 2-5(c2)对应的是原子布居数和能量。图 2-5(b2)显示，不稳定的正常相 N_{\downarrow} 全空间存在，而反转的正常相 N_{\uparrow} 在 $g \geq g_{c\uparrow}$ 区域内是不稳定的，在 $g \leq g_{c\uparrow}$ 区域内也是不稳定的，且与稳定的光子数不为零的解 S_{\uparrow} 共存。图 2-5(c2)显示：正常相 N_{\downarrow} 在全区域是不稳定的，对应的能量 E_{\downarrow} 始终是 -0.25 ；反转正常相 N_{\uparrow} 在 $g \geq g_{c\uparrow}$ 区域内是不稳定的，在 $g \leq g_{c\uparrow}$ 区域内也是不稳定的，对应的能量 E_{\uparrow} 的值为 0.25 ，且在相变点 $g_{c\uparrow}$ 之后的区域内不稳定的反转正常相 N_{\uparrow} 和稳定的超辐射相 S_{\uparrow} 共存。

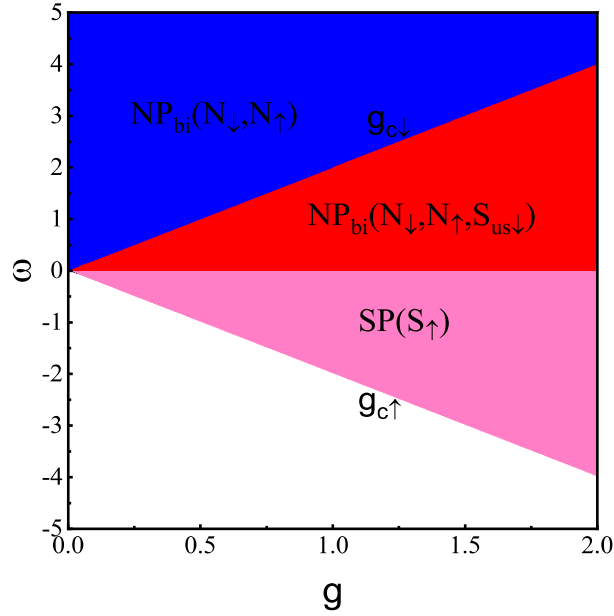


图 2-6 两光子跃迁下平均光子数 n_p 随腔场频率 ω 和原子-场耦合强度 g 变化的相图，并且 $\omega_a = 1.0$ 。

图 2-6 是原子频率为 $\omega_a = 1.0$ 时 $g - \omega$ 平面的相图。在正频率区域，临界值 $g_{c\downarrow}$ 左侧的蓝色区域中共存着正常相 $NP_{bi}(N_{\downarrow}, N_{\uparrow})$ ，而在右侧红色区域中多了不稳定的超辐射相 $S_{us\downarrow}$ 。在负频率区域，临界值 $g_{c\uparrow}$ 的右侧区域中存在着稳定的反转的超辐射相 S_{\uparrow} （即 $SP(S_{\uparrow})$ ），而左侧区域为不稳定的零解区域，与图 2-5（右）中为零解的虚线对应。

2.2.4 量子相变

当跃迁光子数 $n = 3$ 时，此时系统变成了多光子 Rabi 模型，对应的能量泛函的一阶导为

$$\frac{\partial E_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow})}{\partial \gamma_{\downarrow}} = 2\omega\gamma_{\downarrow} - \frac{24g^2\gamma_{\downarrow}^5}{\sqrt{\frac{1}{4}\omega_a^2 + 16g^2\gamma_{\downarrow}^6}} = 0 \dots\dots\dots(2.29)$$

$$\frac{\partial E_{\uparrow}(\gamma_{\uparrow})}{\partial \gamma_{\uparrow}} = 2\omega\gamma_{\uparrow} + \frac{24g^2\gamma_{\uparrow}^5}{\sqrt{\frac{1}{4}\omega_a^2 + 16g^2\gamma_{\uparrow}^6}} = 0 \dots\dots\dots(2.30)$$

图 2-7 根据极值条件给出了三光子以及多光子跃迁下 $g - \omega$ 平面的相图。在正频率区域，多光子跃迁与双光子跃迁时一样，共存相 $NP_{bi}(N_{\downarrow}, N_{\uparrow})$ 与 $NP_{bi}(N_{\downarrow}, N_{\uparrow}, S_{us\downarrow})$ 被临界值 $g_{c\downarrow}$ 分开；在负频率区域，仅有稳定的反转的超辐射相 S_{\uparrow} 存在，并且构成了基态，随着临界值 $g_{c\uparrow}$ 消失原来的白色不稳定区域被 $SP(S_{\uparrow})$ 完全取代。系统从共存相 $NP_{bi}(N_{\downarrow}, N_{\uparrow}, S_{us\downarrow})$ 越变到反转的超辐射相 $SP(S_{\uparrow})$ 是发生在光腔频率 ω 为零处。这说明，不同的量子相和相应的相变是通过调控跃迁光子数来实现的。

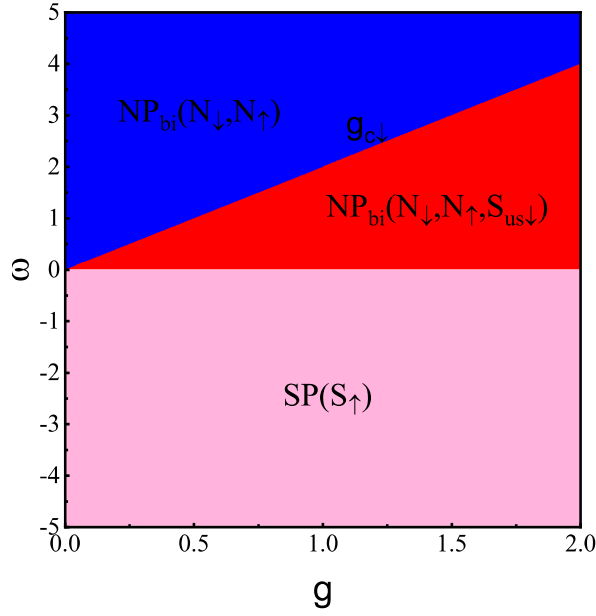


图 2-7 多光子跃迁下平均光子数 n_p 随腔场频率 ω 和原子-场耦合强度 g 变化的相图，并且 $\omega_a = 1.0$ 。

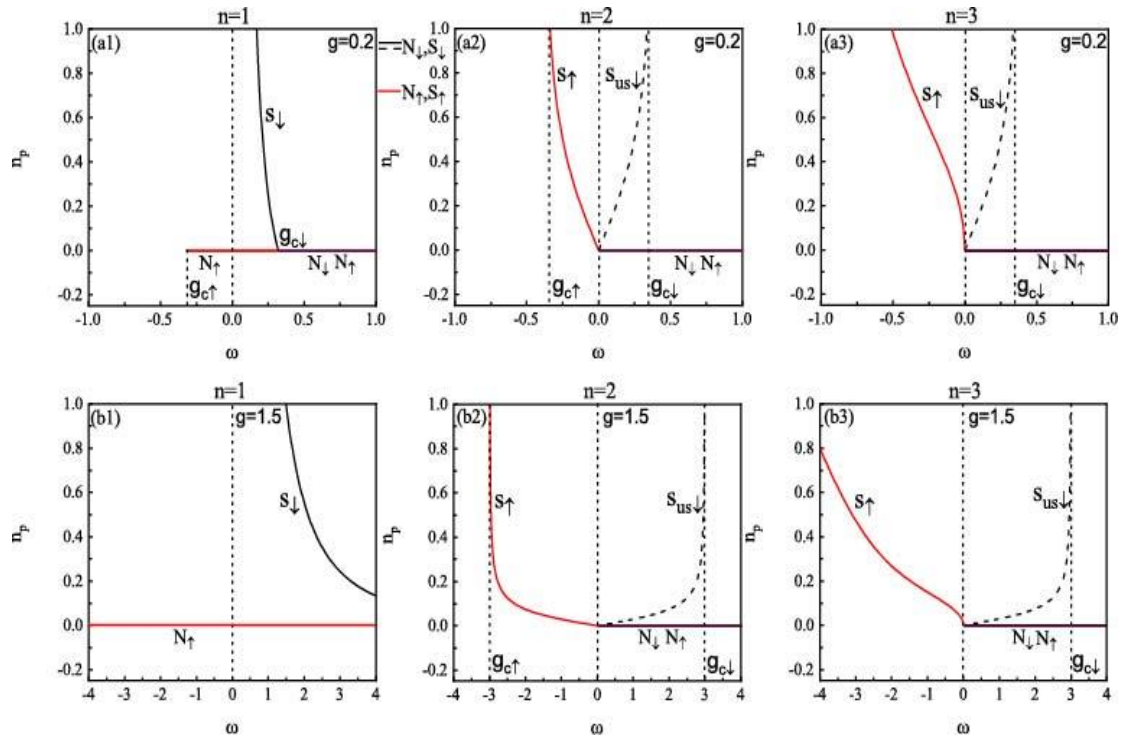


图 2-8 平均光子数 n_p 随光腔频率 ω 的变化曲线图，变化的参数是原子-场耦合强度 $g = 0.2(a) - 1.5(b)$ 和原子的频率 $\omega_a = 1.0$ 。

图 2-8 刻画了当原子-场耦合强度 g 取不同的值时平均光子数 n_p 随腔频变化的曲线。当 $g = 0.2$ 时，我们从图中可以发现：在正频区，跃迁光子数 $n = 1, 2, 3$ 时正常相 N_\downarrow 和反转正常相 N_\uparrow 全区域存在，仅当跃迁光子数 $n = 1$ 时超辐射相 S_\downarrow 存在并且处于稳定

状态，在相变点 $g_{c\downarrow}$ 之后超辐射相 S_{\downarrow} 塌缩；在负频区，跃迁光子数 $n = 1$ 时在 $g_{c\uparrow}$ 之前仅有反转正常相 N_{\uparrow} 存在并且处于稳定状态，跃迁光子数 $n = 2$ 时在 $g_{c\uparrow}$ 之前仅有反转超辐射相 S_{\uparrow} 存在并且处于稳定状态，跃迁光子数 $n = 3$ 时反转超辐射相 S_{\uparrow} 全区域存在。

当 $g = 1.5$ 时，我们从图中可以发现：在正频区，跃迁光子数 $n = 1$ 时反转正常相 N_{\uparrow} 和超辐射相 S_{\downarrow} 存在并且处于稳定状态，跃迁光子数 $n = 2, 3$ 时正常相 N_{\downarrow} 和反转正常相 N_{\uparrow} 全区域存在；在负频区，跃迁光子数 $n = 1$ 时反转正常相 N_{\uparrow} 全区域存在，跃迁光子数 $n = 2$ 时在相变点 $g_{c\uparrow}$ 之前仅有反转超辐射相 S_{\uparrow} 存在并且处于稳定状态，跃迁光子数 $n = 3$ 时反转的超辐射相 S_{\uparrow} 全区域存在。

2.3 本章小结

本章利用自旋相干态变分法解出多光子跃迁下 Rabi 模型的能量解析解，在单光子、双光子和多光子跃迁的情况下分析研究了系统的量子相变等基态特性。通过调整系统的腔频率和原子-场耦合强度显示出了非常丰富的相图。单光子跃迁时，在正频率区域系统发生从正常相 N_{\downarrow} 到超辐射相 S_{\downarrow} 的转变，且反转的正常相 N_{\uparrow} 全区域存在，这与 Dicke 模型量子相变的结论一致。在负频率区域，仅有的反转正常相 N_{\uparrow} 在 $g \geq g_{c\uparrow}$ 处稳定存在，并成为了基态。双光子跃迁时，在正频率区域系统显示出稳定的共存相 $NP_{bi}(N_{\downarrow}, N_{\uparrow})$ ，而原来的超辐射相 S_{\downarrow} 转变成了不稳定的超辐射相 $S_{us\downarrow}$ 发生在临界值 $g \geq g_{c\uparrow}$ 处。在负频率区域，系统仅有的稳定的反转正常相 S_{\uparrow} 存在于临界值 $g \geq g_{c\uparrow}$ 处，并且构成了系统新的超辐射相，而系统中不稳定的零解区域存在于临界值 $g \leq g_{c\uparrow}$ 处。多光子跃迁时，在负频率区域仅有稳定的反转的超辐射相 S_{\uparrow} 存在，且在 $\omega = 0$ 处，系统发生了从共存相 $NP_{bi}(N_{\downarrow}, N_{\uparrow}, S_{us\downarrow})$ 到反转的超辐射相 $SP(S_{\uparrow})$ 的转变，这是一个有趣的变化。因此，不同的量子相和相应的相变是可以通过调控跃迁光子数来实现的。

3 Rabi 模型在机械振子诱导下的量子相变

3.1 光力腔系统

近年来，人们用光力腔模型可以很好地研究量子化的电磁场和宏观机械振子之间的复杂相互作用，该模型在其相关领域中是一个非常重要的模型。早在 1960 年，Braginsky 教授就对电磁辐射与机械振子之间的相互作用进行过相关研究^[53,54]，随后有人提出弱力的精密测量^[55]可以用该系统来实现；在 1980 年，Dorsel 教授把该模型一端的机械振子用悬挂的镜子来取代，并且在实验上成功实现了在腔内光压的作用下悬挂镜子受到的受迫振动^[56]，因此该模型为引力波的探测提供了可能，巨型的迈克尔逊干涉仪在同年也被成功建立；2016 年，在距离地球 13 亿光年之外的两个黑洞合并所产生的引力波被人们成功探测到了，虽然探测到的时间只有仅仅 0.25 秒，但是对物理学的发展这是一个重大的发现，同时也说明了光力腔模型^[57]的重要性。该模型也在量子信息、弱力探测和宏观量子操控等方面发挥着重要的作用。

3.2 在机械振子影响下的 Rabi 模型

3.2.1 系统哈密顿量

在本章中，我们将研究在机械振子的影响下两个二能级原子系统的量子相变，并深入的探讨了系统的基态特性。其中光腔的一端是固定的，另一端与机械振子相连接，通过辐射压力使机械振子与光腔耦合，并将两个无相互作用的二能级原子注入到光力腔内。该系统的哈密顿量写成如下形式：

$$H = \omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \omega_{a,j} \sigma_{z,j} + \sum_{j=1}^2 g_j (\sigma_j^+ a + \sigma_j^- a^\dagger) + \omega_b b^\dagger b + \lambda a^\dagger a (b^\dagger + b) \dots\dots\dots(3.1)$$

其中 ω 代表光腔的频率， ω_a 代表原子的频率， ω_b 代表机械振子的频率， $a^\dagger(a)$ 代表光子的产生（湮灭）算符， $b^\dagger(b)$ 代表机械振子的产生（湮灭）算符， g_j 代表原子一场的耦合强度， λ 代表机械振子耦合强度，通过将腔场的辐射压力与机械振子进行耦合， σ_z 、 σ^+ 、 σ^- 是原子的集体赝自旋算符。

3.2.2 稳定性

将哈密顿量 (3.1) 作用在试探波函数 $|\psi\rangle = |\alpha\rangle|\beta\rangle$, 满足 $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ 、 $b|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle$ (本征值 $\alpha = \gamma e^{i\theta}$, $\beta = \rho e^{i\phi}$), 得到的哈密顿量

$$H = \langle\psi|H|\psi\rangle = \omega\gamma^2 + \omega_b\rho^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^2\omega_{a,j}\sigma_{z,j} + \sum_{j=1}^2g_j(\sigma_j^+\gamma e^{i\theta} + \sigma_j^-\gamma e^{-i\theta}) + \lambda\gamma^2(\rho e^{-i\phi} + \rho e^{i\phi}) \dots\dots\dots(3.2)$$

其中

$$H_{sp} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^2\omega_{a,j}\sigma_{z,j} + \sum_{j=1}^2g_j(\sigma_j^+\gamma e^{i\theta} + \sigma_j^-\gamma e^{-i\theta}) \dots\dots\dots(3.3)$$

(3.3) 式是一个有效的哈密顿量, 把有效自旋哈密顿 H_{sp} 用本征态 $|\mp n\rangle$ 对角化, 本征方程为:

$$H_{sp}|\mp n\rangle = E_{sp}^{\mp}|\mp n\rangle \dots\dots\dots(3.4)$$

自旋投影算符 $\vec{s} \cdot \vec{n}$ 的本征态为 $|\mp n\rangle$, 对应的本征值为 $\mp s$, 其中 $s = \frac{1}{2}$ 。如果我们假

定 $\vec{n} = (\sin \xi_j \cos \eta_j, \sin \xi_j \sin \eta_j, \sin \xi_j)$ 是方向角 ξ_j 和 η_j 的单位矢量^[51], 那么我们可以

通过旋转算符^[52] $\mathcal{R}_j(\xi_j, \eta_j) = e^{\frac{\xi_j}{2}(\sigma_j^+ e^{-i\eta_j} - \sigma_j^- e^{i\eta_j})}$, ($j=1,2$) 和 $\sigma_{z,j}$ 的本征态 $|\mp j\rangle$ 来生成自旋相干态, 即

$$|\mp n\rangle = \mathcal{R}_j(\xi_j, \eta_j)|\mp j\rangle \dots\dots\dots(3.5)$$

利用旋转变换关系, 把 (3.5) 式代入到方程 (3.4) 式中, 得到:

$$\begin{cases} \mathcal{R}_j(\xi_j, \eta_j)^\dagger \sigma_{z,j} \mathcal{R}_j(\xi_j, \eta_j) = \sigma_{z,j} \cos \xi_j + \sin \xi_j (\sigma_j^- e^{i\eta_j} + \sigma_j^+ e^{-i\eta_j}) \\ \mathcal{R}_j(\xi_j, \eta_j)^\dagger \sigma_j^+ \mathcal{R}_j(\xi_j, \eta_j) = \sigma_j^+ \cos^2 \frac{\xi_j}{2} - \sigma_j^- e^{2i\eta_j} \sin^2 \frac{\xi_j}{2} - \frac{1}{2} \sigma_{z,j} e^{i\eta_j} \sin \xi_j \dots\dots(3.6) \\ \mathcal{R}_j(\xi_j, \eta_j)^\dagger \sigma_j^- \mathcal{R}_j(\xi_j, \eta_j) = \sigma_j^- \cos^2 \frac{\xi_j}{2} - \sigma_j^+ e^{-2i\eta_j} \sin^2 \frac{\xi_j}{2} - \frac{1}{2} \sigma_{z,j} e^{-i\eta_j} \sin \xi_j \end{cases}$$

将本征方程(3.4)式左乘 $\mathcal{R}_j(\xi_j, \eta_j)^\dagger$ 并考虑方程组(3.6)式, 可得到

$$[A_j(\gamma, \theta, \xi_j, \eta_j)\sigma_{z,j} + B_j(\gamma, \theta, \xi_j, \eta_j)\sigma_j^+ + C_j(\gamma, \theta, \xi_j, \eta_j)\sigma_j^-]|\mp\rangle = E_{sp}^{\mp}(\gamma)|\mp\rangle \dots\dots(3.7)$$

其中

$$\begin{cases} A_j(\gamma, \theta, \xi_j, \eta_j) = \frac{1}{2}\omega_{a,j} \cos \xi_j - \frac{1}{2}g_j \gamma \sin \xi_j e^{i(\eta_j+\theta)} - \frac{1}{2}g_j \gamma \sin \xi_j e^{-i(\eta_j+\theta)} \\ B_j(\gamma, \theta, \xi_j, \eta_j) = \frac{1}{2}\omega_{a,j} e^{-i\eta_j} \sin \xi_j + g_j \gamma \cos^2 \frac{\xi_j}{2} e^{i\theta} - g_j \gamma \sin^2 \frac{\xi_j}{2} e^{-2i\eta_j} e^{-i\theta} \dots(3.8) \\ C_j(\gamma, \theta, \xi_j, \eta_j) = \frac{1}{2}\omega_{a,j} e^{i\eta_j} \sin \xi_j - g_j \gamma \sin^2 \frac{\xi_j}{2} e^{2i\eta_j} e^{i\theta} + g_j \gamma \cos^2 \frac{\xi_j}{2} e^{-i\theta} \end{cases}$$

方程(3.9)式成立的条件是:

$$\begin{cases} B(\gamma, \theta, \xi_j, \eta_j) = 0 \\ C(\gamma, \theta, \xi_j, \eta_j) = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(3.9)$$

根据条件(3.9)式, 我们可以计算出 θ, ξ_j, η_j , 将其代入到 $A(\gamma, \theta, \xi_j, \eta_j)$, 从而获得能量泛函的值:

$$E_{sp}^{\mp} = \mp \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} A_j(\gamma) = \mp \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} \sqrt{\omega_{a,j}^2 + 4g_j^2 \gamma^2} \dots\dots\dots(3.10)$$

$|\mp n\rangle$ 和玻色相干态 $|\psi\rangle$ 的直积构成了完整的试探波函数, 即

$$|\psi_{\mp}\rangle = |\psi\rangle|\mp n\rangle \dots\dots\dots(3.11)$$

通过将试探波函数作用在系统的哈密顿量上, 我们可以获得系统的本征能量:

$$\begin{aligned} E_{\mp}(\gamma, \rho) &= \langle \psi_{\mp} | H | \psi_{\mp} \rangle = \omega \gamma^2 + \omega_b \rho^2 \\ &+ 2\lambda \gamma^2 \rho \cos \phi \mp \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} \sqrt{\omega_{a,j}^2 + 4g_j^2 \gamma^2} \dots\dots\dots(3.12) \end{aligned}$$

对于 $\lambda > 0$ 时, 根据 ϕ 的极值条件, 可以将 $\cos \phi = -1$ 来计算孤立相位参数 ϕ , 从而得到相应的结果:

$$\begin{aligned} E_{\mp}(\gamma, \rho) &= \langle \psi_{\mp} | H | \psi_{\mp} \rangle = \omega \gamma^2 + \omega_b \rho^2 \\ &- 2\lambda \gamma^2 \rho \mp \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} \sqrt{\omega_{a,j}^2 + 4g_j^2 \gamma^2} \dots\dots\dots(3.13) \end{aligned}$$

我们对能量泛函(3.13)式进行了量纲统一, 如下:

$$\varepsilon_k = \frac{E_k}{\omega} = \gamma^2 + \frac{\omega_b}{\omega} \rho^2 - \frac{2\lambda \rho \gamma^2}{\omega} \mp \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\omega_{a,j}}{\omega}\right)^2 + 4\left(\frac{g_j}{\omega}\right)^2} \gamma^2 \dots\dots\dots(3.14)$$

我们知道, 变分参数 γ, ρ 可由极值条件确定, 能量的极值条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \gamma} = 2\gamma - \frac{4\lambda \rho}{\omega} \gamma \mp \sum_{j=1}^2 \frac{2\left(\frac{g_j}{\omega}\right)^2 \gamma}{\sqrt{\left(\frac{\omega_{a,j}}{\omega}\right)^2 + 4\left(\frac{g_j}{\omega}\right)^2} \gamma^2} = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \rho} = \frac{2\omega_b}{\omega} \rho - \frac{2\lambda \gamma^2}{\omega} = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(3.15)$$

从方程组(3.15)式中的第二个方程得

$$\rho = \frac{\lambda}{\omega_b} \gamma^2 \dots\dots\dots(3.16)$$

此时能量变为

$$E_{\mp}(\gamma) = \langle \psi_{\mp} | H | \psi_{\mp} \rangle = \omega \gamma^2 - \frac{\lambda^2}{\omega_b} \gamma^4 \mp \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sqrt{\omega_{a,j}^2 + 4g_j^2 \gamma^2} \dots\dots\dots(3.17)$$

从(3.17)式发现: 无论是正常还是反常的自旋态, 都会对系统的多重稳定态^[42]产生影响。四种不同的自旋状态分别是: 两个正常自旋($\Downarrow\Downarrow$), 第一个正常自旋, 第二个反常自旋($\Downarrow\Uparrow$), 第一个反常自旋, 第二个正常自旋($\Uparrow\Downarrow$), 两个反常自旋($\Uparrow\Uparrow$)。其对应的能量表达式分别为:

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/096000101123010223>