

湖南省石门县一中 2024 年高考数学五模试卷

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚, 将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂; 非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写, 字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁, 不要折叠, 不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $a = \sqrt[4]{6}$, $b = \log_{\frac{5}{4}} \frac{4}{21}$, $c = \left(\frac{1}{3}\right)^{2.9}$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > c > a$ D. $c > a > b$

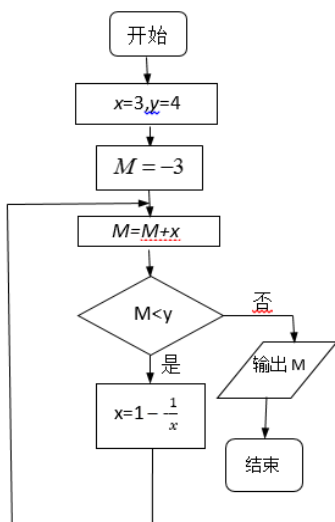
2. 第七届世界军人运动会于 2019 年 10 月 18 日至 27 日在中国武汉举行, 中国队以 133 金 64 银 42 铜位居金牌榜和奖牌榜的首位. 运动会期间有甲、乙等五名志愿者被分配到射击、田径、篮球、游泳四个运动场地提供服务, 要求每个人都要被派出去提供服务, 且每个场地都要有志愿者服务, 则甲和乙恰好在同一组的概率是 ()

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{40}$ D. $\frac{9}{40}$

3. 公元前 5 世纪, 古希腊哲学家芝诺发表了著名的阿基里斯悖论: 他提出让乌龟在跑步英雄阿基里斯前面 1000 米处开始与阿基里斯赛跑, 并且假定阿基里斯的速度是乌龟的 10 倍. 当比赛开始后, 若阿基里斯跑了 1000 米, 此时乌龟便领先他 100 米, 当阿基里斯跑完下一个 100 米时, 乌龟先他 10 米, 当阿基里斯跑完下一个 10 米时, 乌龟先他 1 米.... 所以, 阿基里斯永远追不上乌龟. 按照这样的规律, 若阿基里斯和乌龟的距离恰好为 0.1 米时, 乌龟爬行的总距离为 ()

- A. $\frac{10^5 - 1}{900}$ 米 B. $\frac{10^5 - 9}{90}$ 米
C. $\frac{10^4 - 9}{900}$ 米 D. $\frac{10^4 - 1}{90}$ 米

4. 执行如图所示的程序框图, 输出的结果为 ()



- A. $\frac{19}{3}$ B. 4 C. $\frac{25}{4}$ D. $\frac{13}{2}$

5. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, O 是坐标原点, 过点 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线, 垂足为 P . 若 $|PF_1| = \sqrt{6}|OP|$, 则 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

6. 已知函数 $f(x) = xe^{1-x}$, 若对于任意的 $x_0 \in (0, e]$, 函数 $g(x) = \ln x - x^2 + ax - f(x_0) + 1$ 在 $(0, e]$ 内都有两个不同的零点, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(1, e]$ B. $(e - \frac{2}{e}, e]$ C. $(e - \frac{2}{e}, e + \frac{2}{e}]$ D. $(1, e - \frac{2}{e}]$

7. 连接双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 及 $C_2: \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 的 4 个顶点的四边形面积为 S_1 , 连接 4 个焦点的四边形的面积为

S_2 , 则当 $\frac{S_1}{S_2}$ 取得最大值时, 双曲线 C_1 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

8. 点 O 在 $\triangle ABC$ 所在的平面内, $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$, $|\vec{AB}| = 2$, $|\vec{AC}| = 1$, $\vec{AO} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC} (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$, 且 $4\lambda - \mu = 2 (\mu \neq 0)$, 则 $|\vec{BC}| =$ ()

- A. $\frac{7}{3}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ C. 7 D. $\sqrt{7}$

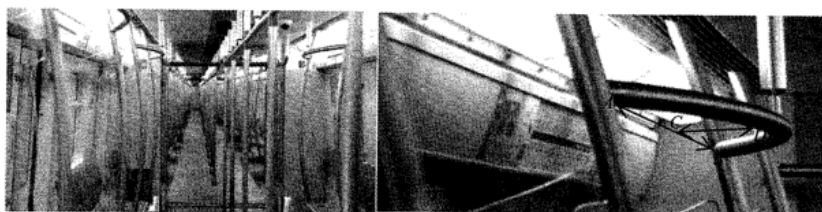
9. 已知角 α 的终边与单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 交于点 $P(\frac{1}{3}, y_0)$, 则 $\cos 2\alpha$ 等于 ()

- A. $\frac{1}{9}$ B. $-\frac{7}{9}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

10. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_1 的直线 l 交双曲线的右支于点 P ，以双曲线的实轴为直径的圆与直线 l 相切，切点为 H ，若 $|F_1P| = 3|F_1H|$ ，则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $\sqrt{13}$

11. 在很多地铁的车厢里，顶部的扶手是一根漂亮的弯管，如下图所示。将弯管形状近似地看成是圆弧，已知弯管向外的最大突出(图中 CD)有 15cm ，跨接了 6 个坐位的宽度(AB)，每个座位宽度为 43cm ，估计弯管的长度，下面的结果中最接近真实值的是 ()



- A. 250cm B. 260cm C. 295cm D. 305cm

12. 已知 $|2\vec{a} + \vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} \in [-4, 0]$ ，则 $|\vec{a}|$ 的取值范围是 ()

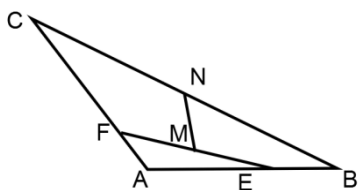
- A. $[0, 1]$ B. $[\frac{1}{2}, 1]$ C. $[1, 2]$ D. $[0, 2]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若向量 $\vec{a} = (x-1, 2)$ 与向量 $\vec{b} = (2, 1)$ 垂直，则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 如图，在等腰三角形 ABC 中，已知 $|AB| = |AC| = 1$, $\angle A = 120^\circ$ ， E, F 分别是边 AB, AC 上的点，且

$\vec{AE} = \lambda \vec{AB}$, $\vec{AF} = \mu \vec{AC}$, 其中 $\lambda, \mu \in (0, 1)$ 且 $\lambda + 4\mu = 1$ ，若线段 EF, BC 的中点分别为 M, N ，则 $|\vec{MN}|$ 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

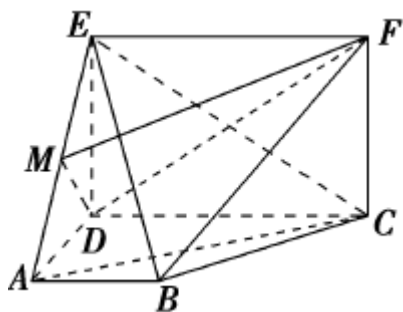


15. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，点 P 是上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内一动点，若三棱锥 $P - ABC$ 的外接球表面积恰为 $\frac{41\pi}{4}$ ，则此时点 P 构成的图形面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知椭圆 $C: x^2 + \frac{y^2}{m} = 1$, $M(\sqrt{2}, 0)$, 若椭圆 C 上存在点 N 使得 $\triangle OMN$ 为等边三角形 (O 为原点), 则椭圆 C 的离心率为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 如图, 矩形 $CDEF$ 和梯形 $ABCD$ 所在的平面互相垂直, $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$, $AB = AD = \frac{1}{2}CD$, $BE \perp DF$.



(1) 若 M 为 EA 的中点, 求证: $AC \parallel$ 平面 MDF ;

(2) 若 $AB = 2$, 求四棱锥 $E-ABCD$ 的体积.

18. (12 分) 已知变换 T 将平面上的点 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $(0, 1)$ 分别变换为点 $\left(\frac{9}{4}, -2\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$. 设变换 T 对应的矩阵为 M .

(1) 求矩阵 M ;

(2) 求矩阵 M 的特征值.

19. (12 分) 在三角形 ABC 中, 角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , 若 $\frac{2\sqrt{3}}{3}bc \sin A = b^2 + c^2 - a^2$.

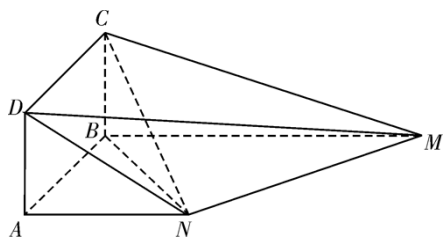
(I) 求角 A ;

(II) 若 $c = 5$, $\cos B = \frac{1}{7}$, 求 b .

20. (12 分) 如图, 已知正方形 $ABCD$ 所在平面与梯形 $ABMN$ 所在平面垂直, $BM \parallel AN$, $NA = AB = 2$, $BM = 4$, $CN = 2\sqrt{3}$.

(1) 证明: $MN \perp$ 平面 BCN ;

(2) 求点 N 到平面 CDM 的距离.



21. (12 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, 若矩阵 $M = BA$, 求矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1} .

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 + ax + 1 - e^{2x}$.

(1) 若函数 $g(x) = f'(x)$, 试讨论 $g(x)$ 的单调性;

(2) 若 $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$, 求 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

先将三个数通过指数, 对数运算变形 $a = \sqrt[4]{6} = 6^{\frac{1}{4}} > 6^0 = 1$, $b = \log_{\frac{5}{4}} \frac{4}{21} < \log_{\frac{5}{4}} 1 = 0$, $0 < c = \left(\frac{1}{3}\right)^{2.9} < \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$ 再判断.

【详解】

因为 $a = \sqrt[4]{6} = 6^{\frac{1}{4}} > 6^0 = 1$, $b = \log_{\frac{5}{4}} \frac{4}{21} < \log_{\frac{5}{4}} 1 = 0$, $0 < c = \left(\frac{1}{3}\right)^{2.9} < \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$,

所以 $a > c > b$,

故选: B.

【点睛】

本题主要考查指数、对数的大小比较, 还考查推理论证能力以及化归与转化思想, 属于中档题.

2、A

【解析】

根据题意, 五人分成四组, 先求出两人组成一组的所有可能的分组种数, 再将甲乙组成一组的情况, 即可求出概率.

【详解】

五人分成四组, 先选出两人组成一组, 剩下的人各自成一组,

所有可能的分组共有 $C_5^2 = 10$ 种,

甲和乙分在同一组，则其余三人各自成一组，只有一种分法，与场地无关，

故甲和乙恰好在同一组的概率是 $\frac{1}{10}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查组合的应用和概率的计算，属于基础题.

3、D

【解析】

根据题意，是一个等比数列模型，设 $a_1 = 100, q = \frac{1}{10}, a_n = 0.1$ ，由 $a_n = 0.1 = 100 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ ，解得 $n = 4$ ，

再求和.

【详解】

根据题意，这是一个等比数列模型，设 $a_1 = 100, q = \frac{1}{10}, a_n = 0.1$ ，

所以 $a_n = 0.1 = 100 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ ，

解得 $n = 4$ ，

所以 $S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{100\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^4\right)}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10^4-1}{90}$.

故选：D

【点睛】

本题主要考查等比数列的实际应用，还考查了建模解模的能力，属于中档题.

4、A

【解析】

模拟执行程序框图，依次写出每次循环得到的 x, M 的值，当 $x = 3, M = \frac{19}{3} > 4$ ，退出循环，输出结果.

【详解】

程序运行过程如下：

$x = 3, M = 0; x = \frac{2}{3}, M = \frac{2}{3}; x = -\frac{1}{2}, M = \frac{1}{6};$

$x = 3, M = \frac{19}{6}; x = \frac{2}{3}, M = \frac{23}{6};$

$$x = -\frac{1}{2}, M = \frac{10}{3}; x = 3, M = \frac{19}{3} > 4, \text{退出循环, 输出结果为 } \frac{19}{3},$$

故选: A.

【点睛】

该题考查的是有关程序框图的问题, 涉及到的知识点有判断程序框图输出结果, 属于基础题目.

5、B

【解析】

设过点 $F_2(c, 0)$ 作 $y = \frac{b}{a}x$ 的垂线, 其方程为 $y = -\frac{a}{b}(x - c)$, 联立方程, 求得 $x = \frac{a^2}{c}$, $y = \frac{ab}{c}$, 即 $P\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right)$, 由

$|PF_1| = \sqrt{6}|OP|$, 列出相应方程, 求出离心率.

【详解】

解: 不妨设过点 $F_2(c, 0)$ 作 $y = \frac{b}{a}x$ 的垂线, 其方程为 $y = -\frac{a}{b}(x - c)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ y = -\frac{a}{b}(x - c) \end{cases} \text{ 解得 } x = \frac{a^2}{c}, y = \frac{ab}{c}, \text{ 即 } P\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right),$$

$$\text{由 } |PF_1| = \sqrt{6}|OP|, \text{ 所以有 } \frac{a^2b^2}{c^2} + \left(\frac{a^2}{c} + c\right)^2 = 6\left(\frac{a^4}{c^2} + \frac{a^2b^2}{c^2}\right),$$

$$\text{化简得 } 3a^2 = c^2, \text{ 所以离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}.$$

故选: B.

【点睛】

本题主要考查双曲线的概念、直线与直线的位置关系等基础知识, 考查运算求解、推理论证能力, 属于中档题.

6、D

【解析】

将原题等价转化为方程 $\ln x - x^2 + ax + 1 = f(x_0)$ 在 $(0, e]$ 内都有两个不同的根, 先求导 $f'(x)$, 可判断 $x \in (0, 1)$ 时,

$f'(x) > 0$, $f(x)$ 是增函数;

当 $x \in (1, e)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是减函数. 因此 $0 < f(x) \leq 1$, 再令 $F(x) = \ln x - x^2 + ax + 1$, 求导得

$$F'(x) = -\frac{2x^2 - ax - 1}{x}, \text{ 结合韦达定理可知, 要满足题意, 只能是存在零点 } x_1, \text{ 使得 } F'(x) = 0 \text{ 在 } (0, e) \text{ 有解, 通过导}$$

数可判断当 $x \in (0, x_1)$ 时 $F'(x) > 0$, $F(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上是增函数; 当 $x \in (x_1, e)$ 时 $F'(x) < 0$, $F(x)$ 在 (x_1, e)

上是减函数；则应满足 $F(x)_{\max} = F(x_1) > 1$ ，再结合 $2x_1^2 - ax_1 - 1 = 0$ ，构造函数 $m(x) = \ln x + x^2 - 1$ ，求导即可求解；

【详解】

函数 $g(x) = \ln x - x^2 + ax - f(x_0) + 1$ 在 $(0, e]$ 内都有两个不同的零点，

等价于方程 $\ln x - x^2 + ax + 1 = f(x_0)$ 在 $(0, e]$ 内都有两个不同的根.

$f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$ ，所以当 $x \in (0, 1)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 是增函数；

当 $x \in (1, e)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 是减函数. 因此 $0 < f(x) \leq 1$.

设 $F(x) = \ln x - x^2 + ax + 1$ ， $F'(x) = \frac{1}{x} - 2x + a = -\frac{2x^2 - ax - 1}{x}$ ，

若 $F'(x) = 0$ 在 $(0, e)$ 无解，则 $F(x)$ 在 $(0, e]$ 上是单调函数，不合题意；所以 $F'(x) = 0$ 在 $(0, e)$ 有解，且易知只能有一个解.

设其解为 x_1 ，当 $x \in (0, x_1)$ 时 $F'(x) > 0$ ， $F(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上是增函数；

当 $x \in (x_1, e)$ 时 $F'(x) < 0$ ， $F(x)$ 在 (x_1, e) 上是减函数.

因为 $\forall x_0 \in (0, e]$ ，方程 $\ln x - x^2 + ax + 1 = f(x_0)$ 在 $(0, e]$ 内有两个不同的根，

所以 $F(x)_{\max} = F(x_1) > 1$ ，且 $F(e) \leq 0$. 由 $F(e) \leq 0$ ，即 $\ln e - e^2 + ae + 1 \leq 0$ ，解得 $a \leq e - \frac{2}{e}$.

由 $F(x)_{\max} = F(x_1) > 1$ ，即 $\ln x_1 - x_1^2 + ax_1 + 1 > 1$ ，所以 $\ln x_1 - x_1^2 + ax_1 > 0$.

因为 $2x_1^2 - ax_1 - 1 = 0$ ，所以 $a = 2x_1 - \frac{1}{x_1}$ ，代入 $\ln x_1 - x_1^2 + ax_1 > 0$ ，得 $\ln x_1 + x_1^2 - 1 > 0$.

设 $m(x) = \ln x + x^2 - 1$ ， $m'(x) = \frac{1}{x} + 2x > 0$ ，所以 $m(x)$ 在 $(0, e)$ 上是增函数，

而 $m(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$ ，由 $\ln x_1 + x_1^2 - 1 > 0$ 可得 $m(x_1) > m(1)$ ，得 $1 < x_1 < e$.

由 $a = 2x_1 - \frac{1}{x_1}$ 在 $(1, e)$ 上是增函数，得 $1 < a < 2e - \frac{1}{e}$.

综上所述 $1 < a \leq e - \frac{2}{e}$ ，

故选：D.

【点睛】

本题考查由函数零点个数求解参数取值范围问题，构造函数法，导数法研究函数增减性与最值关系，转化与化归能力，

属于难题

7、D

【解析】

先求出四个顶点、四个焦点的坐标，四个顶点构成一个菱形，求出菱形的面积，四个焦点构成正方形，求出其面积，

利用重要不等式求得 $\frac{S_1}{S_2}$ 取得最大值时有 $a=b$ ，从而求得其离心率。

【详解】

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 互为共轭双曲线，

四个顶点的坐标为 $(\pm a, 0), (0, \pm b)$ ，四个焦点的坐标为 $(\pm c, 0), (0, \pm c)$ ，

四个顶点形成的四边形的面积 $S_1 = \frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 2ab$ ，

四个焦点连线形成的四边形的面积 $S_2 = \frac{1}{2} \times 2c \times 2c = 2c^2$ ，

所以 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2ab}{2c^2} = \frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$ ，

当 $\frac{S_1}{S_2}$ 取得最大值时有 $a=b$ ， $c = \sqrt{2}a$ ，离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$ ，

故选：D.

【点睛】

该题考查的是有关双曲线的离心率的问题，涉及到的知识点有共轭双曲线的顶点，焦点，菱形面积公式，重要不等式求最值，等轴双曲线的离心率，属于简单题目。

8、D

【解析】

确定点 O 为 $\triangle ABC$ 外心，代入化简得到 $\lambda = \frac{5}{6}$ ， $\mu = \frac{4}{3}$ ，再根据 $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ 计算得到答案。

【详解】

由 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$ 可知，点 O 为 $\triangle ABC$ 外心，

则 $\vec{AB} \cdot \vec{AO} = \frac{1}{2} \vec{AB}^2 = 2$ ， $\vec{AC} \cdot \vec{AO} = \frac{1}{2} \vec{AC}^2 = \frac{1}{2}$ ，又 $\vec{AO} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$ ，

所以 $\begin{cases} \vec{AO} \cdot \vec{AB} = \lambda \vec{AB}^2 + \mu \vec{AC} \cdot \vec{AB} = 4\lambda + \mu \vec{AC} \cdot \vec{AB} = 2, \\ \vec{AO} \cdot \vec{AC} = \lambda \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \mu \vec{AC}^2 = \lambda \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \mu = \frac{1}{2}, \end{cases} \textcircled{1}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/096005054035010122>