

2025高中数学八大核心知识概率统计马尔科夫链（与数列结合的概率递推问题）（解析版）

马尔科夫链（与数列结合的概率递推问题）

如果要评选出 2023 年各地模拟题中最“成功”的题目，我想非“马尔科夫链”莫属了，尽管 2023 年新高考 I 卷出乎了很多“命题专家”的意料，但第 21 题考察了马尔科夫链，可谓为广大“专家”“名卷”“押题卷”挽回了一些颜面。

2023 年新高考 I 卷第 21 题的投篮问题是马尔可夫链；再往前的热点模考卷中，2023 年杭州二模第 21 题的赌徒输光问题是马尔可夫链，2023 年茂名二模的摸球问题是马尔可夫链；再往更前的 2019 年全国 I 卷药物试验也是马尔可夫链，在新人教 A 版选择性必修三 P91 页 拓展探索中的第 10 题是传球问题，是马尔科夫链的典型模型，可以看出自从新教材引入全概率公式（新人教 A 版选择性必修三 P49 页），可想而知，未来会有越来越多的递推型概率难题出现模考试卷中！因此，在复习备考中全概率等系列内容需要格外关注马尔科夫链作为一种命题模型出现了，马尔科夫链在题中的体现可以简单的概括为全概率公式+数列递推，对于高中生而言，马尔科夫链其实也不难理解。本文主要介绍了马尔科夫链和一维随机游走模型在高考中的几种具体的应用情形，希望对各位接下来的复习和备考有一些帮助。

知识点·梳理

基本原理

虽然贝叶斯公式不做要求，但是全概率公式已经是新高考考查内容了，利用全概率公式，我们既可以构造某些递推关系求解概率，还可以推导经典的一维随机游走模型，即：设数轴上一个点，它的位置只能位于整点处，在时刻 $t=0$ 时，位于点 $x=i(i \in \mathbb{N}^+)$ ，下一个时刻，它将以概率 α 或者 β

($\alpha \in (0,1), \alpha + \beta = 1$) 向左或者向右平移一个单位。若记状态 $X_{t=i}$ 表示：在时刻 t 该点位于位置 $x=i(i \in \mathbb{N}^+)$ ，那么由全概率公式可得：

$$P(X_{t+1=i}) = P(X_{t=i-1}) \cdot P(X_{t+1=i} | X_{t=i-1}) + P(X_{t=i+1}) \cdot P(X_{t+1=i} | X_{t=i+1})$$

另一方面，由于 $P(X_{t+1=i} | X_{t=i-1}) = \beta, P(X_{t+1=i} | X_{t=i+1}) = \alpha$ ，代入上式可得：

$$P_i = \alpha \cdot P_{i+1} + \beta \cdot P_{i-1}.$$

进一步，我们假设在 $x=0$ 与 $x=m(m>0, m \in \mathbb{N}^+)$ 处各有一个吸收壁，当点到达吸收壁时被吸收，不再游走。于是， $P_0=0, P_m=1$ 。随机游走模型是一个典型的马尔科夫过程。

进一步，若点在某个位置后有三种情况：向左平移一个单位，其概率为 a ，原地不动，其概率为 b ，向右平移一个单位，其概率为 c ，那么根据全概率公式可得：

$$P_i = aP_{i-1} + bP_i + cP_{i+1}$$

高考真题·回顾

2023·新高考 I 卷 T21

1. 乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 0.6，乙每次投篮的命中率均为 0.8. 由抽签确定第 1 次投篮的人选，第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5.

(1) 求第 2 次投篮的人是乙的概率；

(2) 求第 i 次投篮的人是甲的概率；

(3) 已知：若随机变量 X_i 服从两点分布，且 $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = q_i, i = 1, 2, \dots, n$ ，则

$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n q_i$. 记前 n 次（即从第 1 次到第 n 次投篮）中甲投篮的次数为 Y ，求 $E(Y)$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/096025035005010215>