



初中、高中衔接课

知识点一 常用的乘法公式

(1)平方差公式: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

(2)立方差公式: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

(3)立方和公式: $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

(4)完全平方公式: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

(5)三数和平方公式: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

(6)完全立方公式: $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.

例1 计算： $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

解 方法一 原式 $= (x^2-1)[(x^2+1)^2-x^2]$

$$= (x^2-1)(x^4+x^2+1) = x^6-1.$$

方法二 原式 $= (x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

$$= (x^3+1)(x^3-1) = x^6-1.$$

练习1 分解因式： $2x^3 - x - 1$.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad 2x^3 - x - 1 &= 2x^3 - 2 + 1 - x \\ &= 2(x-1)(x^2 + x + 1) - (x-1) \\ &= (x-1)[2(x^2 + x + 1) - 1] \\ &= (x-1)(2x^2 + 2x + 1).\end{aligned}$$

(1)定义:

一般地,形如 \sqrt{a} ($a \geq 0$)的代数式叫做二次根式.根号下含有字母、且不能够开得尽方的式子称为无理式.

(2)二次根式 $\sqrt{a^2}$ 的意义: $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

(3)分母(子)有理化:

①定义: 把分母(子)中的根号化去, 叫做分母(子)有理化. 为了进行分母(子)有理化, 需要引入有理化因式的概念. 两个含有二次根式的代数式相乘, 如果它们的积不含有二次根式, 我们就说这两个代数式互为有理化因式.

②方法: (i)分母有理化的方法是分母和分子都乘以分母的有理化因式, 化去分母中的根号的过程;

(ii)分子有理化则是分母和分子都乘以分子的有理化因式, 化去分子中的根号的过程.

例 2 化简： $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

解 $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2-2\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}+1^2} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1|,$

$\because \sqrt{2}-1 > 0,$

$\therefore \text{原式} = \sqrt{2}-1.$

练习 2 化简： $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

解 $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} + (\sqrt{2})^2}$

$$= \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

例 3 计算: $(16+6\sqrt{5})\div(3+\sqrt{5})$.

解 原式 = $\frac{(16+6\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$

$$= \frac{48 - 16\sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 30}{4}$$

$$= \frac{9 + \sqrt{5}}{2}.$$

练习 3 计算： $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}$.

解 $\because \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$

类似地， $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} = \sqrt{4}-\sqrt{3}, \dots,$

$$\therefore \text{原式} = (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + (\sqrt{5}-\sqrt{4}) + \cdots + (\sqrt{8}-\sqrt{7})$$

$$= \sqrt{8}-\sqrt{2} = 2\sqrt{2}-\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

知识点三 因式分解的常用方法

- (1)十字相乘法：十字左边相乘等于二次项系数，右边相乘等于常数项，交叉相乘再相加等于一次项系数，即运用乘法公式 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ 的逆运算进行因式分解.
- (2)提取公因式法：当多项式的各项有公因式时，可以把这个公因式提到括号外面，将多项式写成因式乘积形式的方法.
- (3)公式法：把乘法公式反过来用，把某些多项式因式分解的方法.

(4)求根法：若关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个实数根是 x_1, x_2 ，则二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 就可分解为 $a(x-x_1)(x-x_2)$ 。

(5)试根法：对于简单的高次因式，可以通过先试根再分解的方法分解因式。

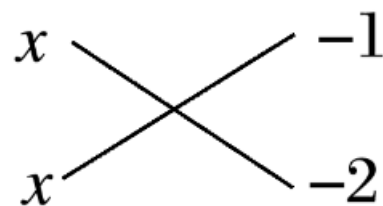
如 $2x^3-x-1$ ，试根知 $x=1$ 为 $2x^3-x-1=0$ 的根，通过拆项， $2x^3-x-1=2x^3-2x^2+2x^2-2x+x-1$ 提取公因式后分解因式。

例4 分解因式:

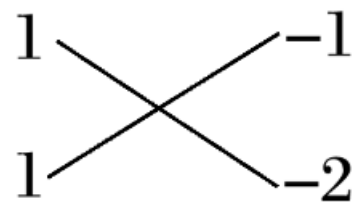
(1) $x^2 - 3x + 2$;

解 如图①, 将二次项 x^2 分解成图中的两个 x 的积, 再将常数项2分解成 -1 与 -2 的乘积, 而图中的对角线上的两个式子乘积的和为 $-3x$, 就是 $x^2 - 3x + 2$ 中的一次项, 所以, $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

说明: 今后在分解与本例类似的二次三项式时, 可以直接将图①中的两个 x 用1来表示(如图②所示).



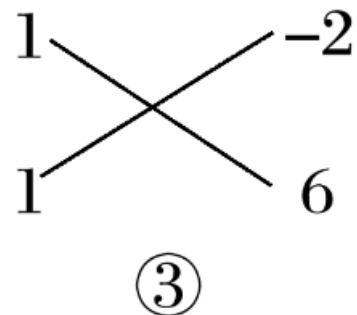
①



②

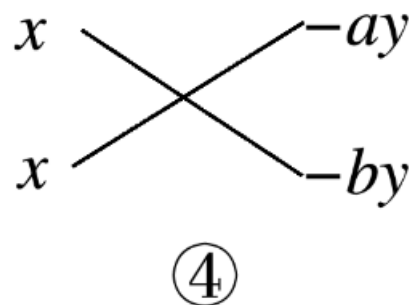
$$(2)x^2+4x-12;$$

解 由图③, 得 $x^2+4x-12=(x-2)(x+6)$.



$$(3)x^2-(a+b)xy+aby^2;$$

解 由图④, 得 $x^2-(a+b)xy+aby^2=(x-ay)(x-by)$.

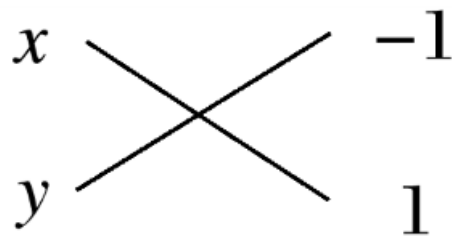


$$(4)xy-1+x-y.$$

解 $xy-1+x-y=xy+(x-y)-1$

$$=(x-1)(y+1)$$

(如图⑤所示).



⑤

练习4 选用恰当的方法解下列一元二次方程：

(1) $x^2 + x = 0$;

解 方程变为 $x(x+1) = 0$,

解得 $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

(2) $x^2 + 6x + 9 = 0$;

解 方程变为 $(x+3)^2 = 0$, 解得 $x = -3$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/0960341001010142>