

## 江西省景德镇市 2023-2024 学年高三下学期质量调查（一）数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知  $\alpha, \beta$  表示两个不同的平面， $l$  为  $\alpha$  内的一条直线，则“ $\alpha \parallel \beta$ ”是“ $l \parallel \beta$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

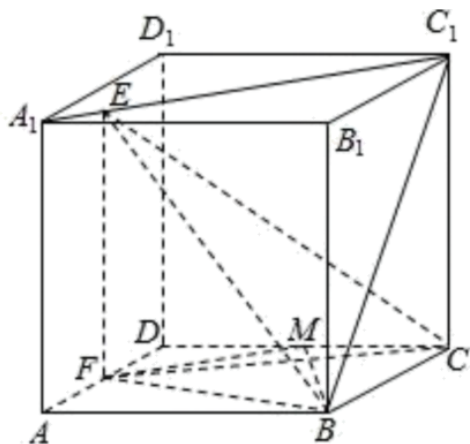
2. 已知复数  $z$  满足  $(1+2i)z = 4+3i$ ，则  $z$  的共轭复数是（ ）

- A.  $2-i$
- B.  $2+i$
- C.  $1+2i$
- D.  $1-2i$

3. 若集合  $A = \left\{x \mid \frac{x+2}{x-1} \leq 0\right\}$ ,  $B = \{x \mid -1 < x < 2\}$ ，则  $A \cap B =$ （ ）

- A.  $[-2, 2)$
- B.  $(-1, 1]$
- C.  $(-1, 1)$
- D.  $(-1, 2)$

4. 如图，正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 1，动点  $E$  在线段  $A_1C_1$  上， $F$ 、 $M$  分别是  $AD$ 、 $CD$  的中点，则下列结论中错误的是（ ）



- A.  $FM \parallel A_1C_1$ ,
- B. 存在点  $E$ ，使得平面  $BEF \parallel$  平面  $CC_1D_1D$
- C.  $BM \perp$  平面  $CC_1F$
- D. 三棱锥  $B-CEF$  的体积为定值

5.  $(x+y)(2x-y)^5$  的展开式中  $x^3y^3$  的系数为( )

- A. -30                      B. -40                      C. 40                      D. 50

6. 若函数  $y = 2\sin(2x + \varphi)$  ( $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象经过点  $(\frac{\pi}{12}, 0)$ , 则函数  $f(x) = \sin(2x - \varphi) + \cos(2x - \varphi)$  图象的一条

对称轴的方程可以为( )

- A.**  $x = -\frac{\pi}{24}$       **B.**  $x = \frac{37\pi}{24}$       **C.**  $x = \frac{17\pi}{24}$       **D.**  $x = -\frac{13\pi}{24}$

7. 已知实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y + 3 \geq 0 \\ x + 2y \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$ ，则  $z = 3x + y$  的最小值为 ( )

- A. -5                      B. 2                      C. 7                      D. 11

8. 将函数  $y = \sin 2x$  的图像向左平移  $\varphi (\varphi > 0)$  个单位得到函数  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  的图像, 则  $\varphi$  的最小值为 ( )

- A.  $\frac{\pi}{6}$                       B.  $\frac{\pi}{12}$                       C.  $\frac{11\pi}{12}$                       D.  $\frac{5\pi}{6}$

9. 设  $a = \log_8 0.2, b = \log_{0.3} 4, c = 4^{0.3}$ , 则 ( )

- A.**  $c < b < a$       **B.**  $a < b < c$       **C.**  $a < c < b$       **D.**  $b < a < c$

10.  $\triangle ABC$  是边长为  $2\sqrt{3}$  的等边三角形,  $E$ 、 $F$  分别为  $AB$ 、 $AC$  的中点, 沿  $EF$  把  $\triangle AEF$  折起, 使点  $A$  翻折到点  $P$  的位置, 连接  $PB$ 、 $PC$ , 当四棱锥  $P-BCFE$  的外接球的表面积最小时, 四棱锥  $P-BCFE$  的体积为 ( )

- A.  $\frac{5\sqrt{3}}{4}$       B.  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$       C.  $\frac{\sqrt{6}}{4}$       D.  $\frac{3\sqrt{6}}{4}$

11. 一个由两个圆柱组合而成的密闭容器内装有部分液体，小圆柱底面半径为 $r_1$ ，大圆柱底面半径为 $r_2$ ，如图 1 放置

容器时，液面以上空余部分的高为  $h_1$ ，如图 2 放置容器时，液面以上空余部分的高为  $h_2$ ，则  $\frac{h_1}{h_2} =$  ( )

**Fig. 1**

**图 2**

- A.  $\frac{r_2}{r_1}$       B.  $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$       C.  $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$       D.  $\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$

12.  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $a + 2c = 2b \cos A$ , 则角  $B$  的大小为 ( )

- A.  $\frac{2\pi}{3}$       B.  $\frac{\pi}{3}$       C.  $\frac{\pi}{6}$       D.  $\frac{5\pi}{6}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数  $f(x) = e^x(x+1)^2$ , 令  $f_1(x) = f'(x)$ ,  $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 若  $f_n(x) = e^x(a_n x^2 + b_n x + c_n)$ ,  $[m]$

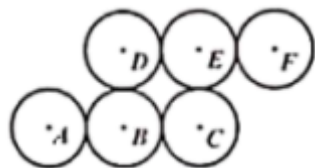
表示不超过实数  $m$  的最大整数, 记数列  $\left\{ \frac{2a_n}{2c_n - b_n} \right\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $[3S_{2000}] =$  \_\_\_\_\_

14. 函数  $f(x)$  满足  $f(x) = f(x-4)$ , 当  $x \in [-2, 2)$  时,  $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 + a, & -2 \leq x \leq a \\ 1-x, & a < x < 2 \end{cases}$ , 若函数  $f(x)$  在  $[0, 2020)$

上有 1515 个零点, 则实数  $a$  的范围为 \_\_\_\_\_.

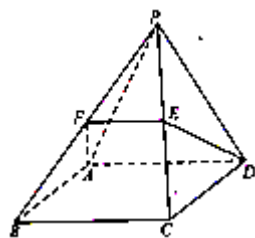
15. 一次考试后, 某班全班 50 个人数学成绩的平均分为正数  $M$ , 若把  $M$  当成一个同学的分数, 与原来的 50 个分数一起, 算出这 51 个分数的平均值为  $N$ , 则  $\frac{M}{N} =$  \_\_\_\_\_.

16. 三对父子去参加亲子活动, 坐在如图所示的 6 个位置上, 有且仅有一对父子是相邻而坐的坐法有 \_\_\_\_\_ 种 (比如:  $B$  与  $D$ 、 $B$  与  $C$  是相邻的,  $A$  与  $D$ 、 $C$  与  $D$  是不相邻的)。



三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中, 四边形  $ABCD$  是矩形,  $AB = \sqrt{3}$ ,  $AD = 2$ ,  $\triangle PAD$  为正三角形, 且平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $E$ 、 $F$  分别为  $PC$ 、 $PB$  的中点。



(1) 证明:  $EF \parallel$  平面  $PAD$ ;

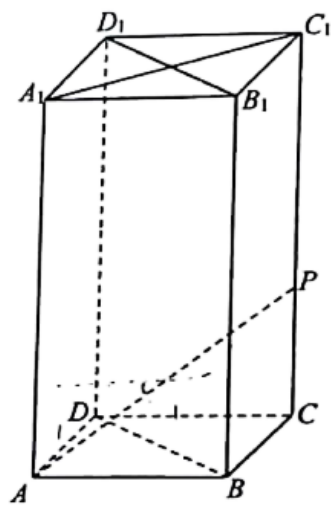
(2) 求几何体  $ABCDEF$  的体积.

18. (12 分) 已知在  $\square\square\square\square$  中, 角  $\square, \square, \square$  的对边分别为  $\square, \square, \square$ , 且  $\frac{\cos \square}{\square} + \frac{\cos \square}{\square} = \frac{2\sqrt{3}\sin \square}{3\sin \square}$ .

(1) 求  $\square$  的值;

(2) 若  $\cos \square + \sqrt{3}\sin \square = 2$ , 求  $\square + \square$  的取值范围.

19. (12 分) 如图, 在底面边长为 1, 侧棱长为 2 的正四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $P$  是侧棱  $CC_1$  上的一点,  $CP = m$ .



- (1) 若  $m = \frac{\sqrt{6}}{3}$ , 求直线  $AP$  与平面  $BDD_1B_1$  所成角;
- (2) 在线段  $A_1C_1$  上是否存在一个定点  $Q$ , 使得对任意的实数  $m$ , 都有  $D_1Q \perp AP$ , 并证明你的结论.

20. (12 分) 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (2) 设  $b_n = \frac{a_n}{(1+a_n) \cdot (1+a_{n+1})}$ ,  $T_n$  为  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和, 求证:  $T_n < \frac{2}{3}$ .

21. (12 分) 在世界读书日期间, 某地区调查组对居民阅读情况进行了调查, 获得了一个容量为 200 的样本, 其中城镇居民 140 人, 农村居民 60 人. 在这些居民中, 经常阅读的城镇居民有 100 人, 农村居民有 30 人.

(1) 填写下面列联表, 并判断能否有 99% 的把握认为经常阅读与居民居住地有关?

|       | 城镇居民 | 农村居民 | 合计  |
|-------|------|------|-----|
| 经常阅读  | 100  | 30   |     |
| 不经常阅读 |      |      |     |
| 合计    |      |      | 200 |

(2) 调查组从该样本的城镇居民中按分层抽样抽取 7 人, 参加一次阅读交流活动, 若活动主办方从这 7 位居民中随机选取 2 人作交流发言, 求被选中的 2 位居民都是经常阅读居民的概率.

附：  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ， 其中  $n = a + b + c + d$  .



|                   |       |       |       |       |       |        |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $P(K^2 \geq k_0)$ | 0.10  | 0.05  | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001  |
| $k_0$             | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

22. (10 分) 已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}$  的逆矩阵  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ b & 0 \end{bmatrix}$ . 若曲线  $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  在矩阵  $A$  对应的变换作用下得到另一曲线  $C_2$ , 求曲线  $C_2$  的方程.

### 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

试题分析：利用面面平行和线面平行的定义和性质，结合充分条件和必要条件的定义进行判断.

解：根据题意，由于  $\alpha, \beta$  表示两个不同的平面， $l$  为  $\alpha$  内的一条直线，由于“ $\alpha \parallel \beta$ ”，则根据面面平行的性质定理可知，则必然  $\alpha$  中任何一条直线平行于另一个平面，条件可以推出结论，反之不成立， $\therefore \alpha \parallel \beta$  是“ $l \parallel \beta$ ”的充分不必要条件.

故选 A.

考点：必要条件、充分条件与充要条件的判断；平面与平面平行的判定.

2、B

【解析】

根据复数的除法运算法则和共轭复数的定义直接求解即可.

【详解】

由  $(1+2i)z = 4+3i$ ，得  $z = \frac{4+3i}{1+2i} = 2-i$ ，所以  $\bar{z} = 2+i$ .

故选：B

【点睛】

本题考查了复数的除法的运算法则，考查了复数的共轭复数的定义，属于基础题.

3、C

【解析】

求出集合  $A$ ，然后与集合  $B$  取交集即可。

【详解】

由题意， $A = \left\{ x \mid \frac{x+2}{x-1} \leq 0 \right\} = \{x \mid -2 \leq x < 1\}$ ， $B = \{x \mid -1 < x < 2\}$ ，则  $A \cap B = \{x \mid -1 < x < 1\}$ ，故答案为 C。

【点睛】

本题考查了分式不等式的解法，考查了集合的交集，考查了计算能力，属于基础题。

4、B

【解析】

根据平行的传递性判断 A；根据面面平行的定义判断 B；根据线面垂直的判定定理判断 C；由三棱锥  $B-CEF$  以三角形  $BCF$  为底，则高和底面积都为定值，判断 D。

【详解】

在 A 中，因为  $F, M$  分别是  $AD, CD$  中点，所以  $FM \parallel AC \parallel A_1C_1$ ，故 A 正确；

在 B 中，由于直线  $BF$  与平面  $CC_1D_1D$  有交点，所以不存在点  $E$ ，使得平面  $BEF \parallel$  平面  $CC_1D_1D$ ，故 B 错误；

在 C 中，由平面几何得  $BM \perp CF$ ，根据线面垂直的性质得出  $BM \perp C_1C$ ，结合线面垂直的判定定理得出  $BM \perp$  平面  $CC_1F$ ，故 C 正确；

在 D 中，三棱锥  $B-CEF$  以三角形  $BCF$  为底，则高和底面积都为定值，即三棱锥  $B-CEF$  的体积为定值，故 D 正确；

故选：B

【点睛】

本题主要考查了判断面面平行，线面垂直等，属于中档题。

5、C

【解析】

先写出  $(2x-y)^5$  的通项公式，再根据  $x^3y^3$  的产生过程，即可求得。

【详解】

对二项式  $(2x-y)^5$ ，

其通项公式为  $T_{r+1} = C_5^r (2x)^{5-r} (-y)^r = C_5^r 2^{5-r} (-1)^r x^{5-r} y^r$

$(x+y)(2x-y)^5$  的展开式中  $x^3y^3$  的系数

是  $(2x-y)^5$  展开式中  $x^2y^3$  的系数与  $x^3y^2$  的系数之和.

令  $r=3$ , 可得  $x^2y^3$  的系数为  $C_5^3 2^2 (-1)^3 = -40$ ;

令  $r=2$ , 可得  $x^3y^2$  的系数为  $C_5^2 2^3 (-1)^2 = 80$ ;

故  $(x+y)(2x-y)^5$  的展开式中  $x^3y^3$  的系数为  $80-40=40$ .

故选: C.

【点睛】

本题考查二项展开式中某一项系数的求解, 关键是对通项公式的熟练使用, 属基础题.

6、B

【解析】

由点  $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$  求得  $\varphi$  的值, 化简  $f(x)$  解析式, 根据三角函数对称轴的求法, 求得  $f(x)$  的对称轴, 由此确定正确选项.

【详解】

由题可知  $2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi\right) = 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2} \cdot \varphi = -\frac{\pi}{6}$

所以  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{5\pi}{12}\right)$

令  $2x + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ,

得  $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

令  $k=3$ , 得  $x = \frac{37\pi}{24}$

故选: B

【点睛】

本小题主要考查根据三角函数图象上点的坐标求参数, 考查三角恒等变换, 考查三角函数对称轴的求法, 属于中档题.

7、A

【解析】

根据约束条件画出可行域, 再将目标函数化成斜截式, 找到截距的最小值.

【详解】

由约束条件  $\begin{cases} x - y + 3 \geq 0 \\ x + 2y \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$ ，画出可行域  $VABC$  如图

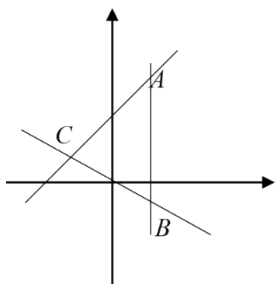
$z = 3x + y$  变为  $y = -3x + z$  为斜率为-3 的一簇平行线， $z$  为在  $y$  轴的截距，

$\therefore z$  最小的时候为过  $C$  点的时候，

$$\text{解} \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \text{所以 } C(-2, 1),$$

$$\text{此时 } z = 3x + y = 3 \times (-2) + 1 = -5$$

故选 A 项



【点睛】

本题考查线性规划求一次相加的目标函数，属于常规题型，是简单题.

8、B

【解析】

根据三角函数的平移求出函数的解析式，结合三角函数的性质进行求解即可.

【详解】

将函数  $y = \sin 2x$  的图象向左平移  $\varphi (\varphi > 0)$  个单位，

得到  $y = \sin 2(x + \varphi) = \sin(2x + 2\varphi)$ ，

此时与函数  $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$  的图象重合，

则  $2\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ，即  $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{12}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

$\therefore$  当  $k = 0$  时， $\varphi$  取得最小值为  $\varphi = \frac{\pi}{12}$ ，

故选：B.

【点睛】

本题主要考查三角函数的图象和性质，利用三角函数的平移关系求出解析式是解决本题的关键.

9、D

【解析】

结合指数函数及对数函数的单调性,可判断出  $-1 < a < 0, b < -1, c > 1$ ,即可选出答案.

【详解】

由  $\log_{0.3} 4 < \log_{0.3} \frac{10}{3} = -1$ ,即  $b < -1$ ,

又  $-1 = \log_8 0.125 < \log_8 0.2 < \log_8 1 = 0$ ,即  $-1 < a < 0$ ,

$4^{0.3} > 1$ ,即  $c > 1$ ,

所以  $b < a < c$ .

故选:D.

【点睛】

本题考查了几个数的大小比较,考查了指数函数与对数函数的单调性的应用,属于基础题.

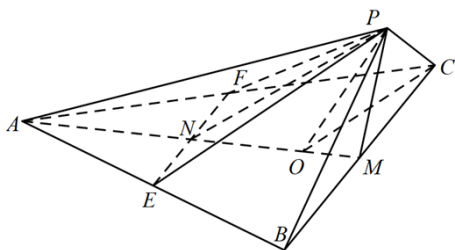
10、D

【解析】

首先由题意得,当梯形  $BCFE$  的外接圆圆心为四棱锥  $P-BCFE$  的外接球球心时,外接球的半径最小,通过图形发现, $BC$  的中点即为梯形  $BCFE$  的外接圆圆心,也即四棱锥  $P-BCFE$  的外接球球心,则可得到  $PO = OC = \sqrt{3}$ ,进而可根据四棱锥的体积公式求出体积.

【详解】

如图,四边形  $BCFE$  为等腰梯形,则其必有外接圆,设  $O$  为梯形  $BCFE$  的外接圆圆心,当  $O$  也为四棱锥  $P-BCFE$  的外接球球心时,外接球的半径最小,也就使得外接球的表面积最小,过  $A$  作  $BC$  的垂线交  $BC$  于点  $M$ ,交  $EF$  于点  $N$ ,连接  $PM,PN$ ,点  $O$  必在  $AM$  上,



$E, F$  分别为  $AB, AC$  的中点,则必有  $AN = PN = MN$ ,

$\therefore \angle APM = 90^\circ$ ,即  $\triangle APM$  为直角三角形.

对于等腰梯形  $BCFE$ ,如图:

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/097034033152010000>