最优化方法
Optimization

第四章　对偶理论

窗含西岭千秋雪，
门泊东吴万里船。

对偶是一种普遍现象

主要内容

- **LP对偶问题的形式**
- **LP的对偶定理**
- **对偶问题的经济解释**
- **对偶单纯形法**
- 原-对偶算法

对偶问题的来源

产品＼材料	甲	乙	丙	丁	每台收益	
A	3	2	1	1	2000	x_1
B	4	1	3	2	4000	x_2
C	2	2	3	4	3000	x_3
限额	600	400	300	200		
	y_1	y_2	y_3	y_4		

$$MaxZ = 2000x_1 + 4000x_2 + 3000x_3$$

$$ST:\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 600 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 400 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 300 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 200 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

假设工厂考虑不进行生产而把全部可利用的资源都让给其他企业，工厂希望给这些资源定出一个合理的价格，即使别的企业愿意购买，又使本工厂能得到生产这些产品所能获得的最大收益。

$$Minw = 600y_1 + 400y_2 + 300y_3 + 200y_4$$

$$ST:\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \ge 2000 \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 + 2y_4 \ge 4000 \\ 2y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 \ge 3000 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题的表达

（1）对称LP问题的定义

第一类对称形式

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

第二类对称形式

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T w \\ s.t. \quad & A^T w \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

（2）对称LP问题的对偶问题

(P)

$$\boxed{\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}}$$

$\Longrightarrow$

(D)

$$\boxed{\begin{aligned} \max \quad & b^T w \\ s.t. \quad & A^T w \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}}$$

例：写出下列LP问题的对偶问题

$$
\min \quad 8x_1 + 16x_2 + 12x_3
$$

$$
s.t. \begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 4x_3 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}
$$

对偶

$$
\max \quad 2w_1 + 3w_2
$$

$$
s.t. \begin{cases} w_1 + 2w_2 \leq 8 \\ 4w_1 \leq 16 \\ 4w_2 \leq 12 \\ w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}
$$

例：写出对偶问题(D)的对偶

(D)
$$\begin{aligned} \max \quad & b^T w \\ s.t. \quad & A^T w \le c \\ & w \ge 0 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{\text{变形}}$

$$\begin{aligned} \min \quad & -b^T w \\ s.t. \quad & -A^T w \ge -c \\ & w \ge 0 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{\text{对偶}}$

$$\begin{aligned} \max \quad & -c^T x \\ s.t. \quad & (-A^T)^T x \le -b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{\text{变形}}$ (DD)

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax \ge b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

结论：对偶问题(D)的对偶为原问题(P)。

写出对称形式的对偶规划的要点

① min变成max

② 价值系数与右端向量互换

③ 系数矩阵转置

④ ≥ 变 ≤

- 原问题中约束条件的个数=对偶问题中变量的个数
- 原问题中变量的个数=对偶问题中约束条件的个数

非对称形式的对偶

$$(\text{P})\quad \begin{aligned} \min\ & c^T x \\ s.t.\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \xrightarrow{\text{对称形式}} \begin{aligned} \min\ & c^T x \\ s.t.\ & Ax \geq b \\ & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{对偶}} \begin{aligned} \max\ & b^T u - b^T v \\ s.t.\ & A^T u - A^T v \leq c \\ & u, v \geq 0 \end{aligned} \xrightarrow{\text{令} w = u - v} (\text{D})\quad \boxed{\begin{aligned} \max\ & b^T w \\ s.t.\ & A^T w \leq c \\ & w\text{无限制} \end{aligned}}$$

例 $\min \ 5x_1+4x_2+3x_3$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_1+x_2+x_3=4 \\ & 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

对偶问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & 4w_1+5w_2 \\ \text{s.t.} \quad & w_1+3w_2 \leq 5 \\ & w_1+2w_2 \leq 4 \\ & w_1+w_2 \leq 3 \end{aligned}$$

一般情形LP问题的对偶问题

$$\min c^T x$$
$$\text{s.t.}\quad A_1 x \ge b_1$$
$$A_2 x = b_2$$
$$A_3 x \le b_3$$
$$x \ge 0$$

$\xrightarrow{\text{标准形}}$

$$\min c^T x$$
$$\text{s.t.}\quad A_1 x - x_s = b_1$$
$$A_2 x = b_2$$
$$A_3 x + x_t = b_3$$
$$x, x_s, x_t \ge 0$$

where $x_s \in R^{m_1}, x_t \in R^{m_3}$ are slack variables.

where $c \in R^n, b_i \in R^{m_i}, A_i \in R^{m_i \times n}, i = 1,2,3.$

$\xrightarrow{\text{对偶}}$

$$\max \quad b_1^T w_1 + b_2^T w_2 + b_3^T w_3$$
$$\text{s.t.}\quad A_1^T w_1 + A_2^T w_2 + A_3^T w_3 \le c,$$
$$w_1 \ge 0,\ w_2 \text{ free},\ w_3 \le 0.$$

Rules to construct the dual

	obj. coef. vector	right-hand-side	
	right-hand-side	obj. coef. vector	
	A	A^T	
	Max model	Min model	
变量	$x_j \geq 0$	jth constraint $\geq$	约束
	$x_j \leq 0$	jth constraint $\leq$	
	x_j free	jth constraint $=$	
约束	ith constraint $\leq$	$y_i \geq 0$	变量
	ith constraint $\geq$	$y_i \leq 0$	
	ith constraint $=$	y_i free	

$$\min \ 2x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & \geq & 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 \geq 0, x_2\text{无约束}, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\max \ w_1 + 2w_2 + w_3$$

$$s.t. \begin{cases} w_1 + w_2 - w_3 & \leq & 2 \\ w_1 - w_2 + w_3 & = & 1 \\ 2w_1 + w_2 + w_3 & \geq & 2 \\ w_1 \geq 0 \quad w_2 \leq 0 \quad w_3\text{无约束} \end{cases}$$

$$\max \quad x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$ST: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

$$\min \quad 2w_1 + w_2 + 2w_3$$

$$s.t. \begin{cases} w_1 + w_2 + 2w_3 \geq 1 \\ w_1 - w_2 + w_3 \leq 2 \\ -w_1 + w_2 + w_3 = 1 \\ w_1 \geq 0 \; w_2\text{无约束} \; w_3 \leq 0 \end{cases}$$

练习题

$$\min \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_3 \leq 0, x_2\text{无约束} \end{cases}$$

对偶问题的基本性质

原问题(P)

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

对偶问题(D)

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T w \\ s.t. \quad & A^T w \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

定理1（弱对偶定理） 若$x^{(0)}, w^{(0)}$分别为$(P),(D)$的可行解，则$c^T x^{(0)} \geq b^T w^{(0)}$.

证明：因$\mathrm{x}^{(0)}$是(P)的可行解，故$A\mathrm{x}^{(0)} \geq b, \mathrm{x}^{(0)} \geq 0.$

因$\mathrm{w}^{(0)}$是(D)的可行解，故$\mathrm{A}^T \mathrm{w}^{(0)} \leq c, \mathrm{w}^{(0)} \geq 0,$

从而$\mathrm{c}^T \mathrm{x}^{(0)} \geq (A\mathrm{x}^{(0)})^T \mathrm{w}^{(0)} \geq b^T \mathrm{w}^{(0)}.$

例：

(P1)

$$\min 20x_1+20x_2$$
$$s.t\quad x_1+2x_2\ge 1$$
$$2x_1+x_2\ge 2$$
$$2x_1+3x_2\ge 3$$
$$3x_1+2x_2\ge 4$$
$$x_1,x_2\ge 0$$

(D1)

$$\max\ w_1+2w_2+3w_3+4w_4$$
$$s.t\quad w_1+2w_2+2w_3+3w_4\le 20$$
$$2w_1+w_2+3w_3+2w_4\le 20$$
$$w_j\ge 0,\ j=1,2,3,4$$

1）原问题(P1)一可行解 x=(1, 1)^T

目标值 =40

40是(D1)最优目标值的上界.

2）对偶问题(D1)一可行解 w=（1 1 1 1）

目标值 =10

10是(P1)最优目标值的下界.

$$x^*=\left(\tfrac{1}{5}\quad \tfrac{6}{5}\right)\qquad 最优值=28$$

$$w^*=\left(0\quad 0\quad 4\quad 4\right)^T\qquad 最优值=28$$

推论1 若问题(P)或(D)有无界解，则其对偶问题(D)或(P)无可行解

推论2 极大化问题的任何一个可行解所对应的目标函数值都是其对偶问题的目标函数值的下界。

推论3 极小化问题的任何一个可行解所对应的目标函数值都是其对偶问题的目标函数值的上界。

定理2(最优性准则)

若$x^{(0)}, w^{(0)}$分别为$(P),(D)$的可行解且$cx^{(0)} = w^{(0)}b$,

则$x^{(0)}$， $w^{(0)}$分别为(P),(D)问题的最优解.

证明：

对原问题(P)的任意可行解x,由定理1可知,

$c^T x \geq b^T w^{(0)}$,而$c^T x^{(0)} = b^T w^{(0)}$,则$x^{(0)}$为$(P)$的最优解.

同理,$w^{(0)}$为(D)的最优解

例 (P)

$$\max\ Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$s.t.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$\min\ W = 20y_1 + 20y_2$$

$$(D)\ s.t.\ \begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 1 \\ 2y_1 + y_2 \ge 2 \\ 2y_1 + 3y_2 \ge 3 \\ 3y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

由于$x^{(0)} = (0,0,4,4)^T$,

$y^{(0)} = \left(\frac{6}{5}, \frac{1}{5}\right)^T$是$(P)$,$(D)$的可行解

且$c^T x^{(0)} = b^T y^{(0)} = 28$

所以，$x^{(0)}$,$y^{(0)}$分别是(P),(D)的最优解

定理3(强对偶定理)

若(P),(D)均有可行解,则(P),(D)均有最优解,且(P),(D)的最优目标函数值相等.

证明：因为(P),(D)均有可行解,由推论2,推论3知,(P)的目标函数值在其可行域内有下界，(D)的目标函数值在其可行域内有上界，故则(P),(D)均有最优解.

引入剩余变量，把(P)化为标准形:

$$\begin{cases} \min\ (c^T, 0)\begin{pmatrix} x \\ x_s \end{pmatrix} \\ s.t.\quad (A, -I)\begin{pmatrix} x \\ x_s \end{pmatrix} = b \\ \qquad\quad x \geq 0,\ x_s \geq 0 \end{cases}$$

设(P)的最优解为$x^{(0)}$，所对应的最优基为B.

$$x^{(0)}\text{可以表示为}x^{(0)}=\begin{pmatrix} x_B^{(0)} \\ x_N^{(0)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

则 $(A^T,-I)(B^{-1})^T c_B-(c,0)\leq 0$

令 $w^{(0)}=(B^{-1})^T c_B$,由上式得

$A^T w^{(0)}\leq c,\ w^{(0)}\geq 0$, 故$w^{(0)}$是$(D)$的可行解.

又因为$b^T w^{(0)}=b^T(B^{-1})^T c_B=c_B^T x_B^{(0)}=c^T x^{(0)}$

故$w^{(0)}$是(D)的最优解，且

$$\min c^T x=c^T x^{(0)}=b^T w^{(0)}=\max b^T w.$$

推论：若问题(P)或(D)无可行解，则其对偶问题(D)或(P)或者无可行解, 或者目标函数值趋于无穷。

推论 在用单纯形法求解LP问题（P）的最优单纯形表中松弛变量的检验数的相反数(单纯形乘子$w=(B^{-1})^T c_B$)就是其对偶问题（D）的最优解.

由于(P)化成标准形式时, 松弛变量x_{n+j}对应的列为$-e_j$, 它在目标函数中的价格系数＝0，所以,

判别数＝$(B^{-1})^T c_B(-e_j)-0=-w_j$

则松弛变量对应的判别数均乘以(-1)，便得到单纯形乘子$w=(w_1, \ldots, w_m)$.

当原问题达最优时, 单纯形乘子即为对偶问题的最优解.

例：求下列问题对偶问题的最优解

$$\max \quad 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：化为标准形

$$\max \ 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	2	1	0	0	8
x_4	4	0	0	1	0	16
x_5	0	$\boxed{4}$	0	0	1	12
	-2	-3	0	0	0	0
x_3	$\boxed{1}$	0	1	0	-1/2	2
x_4	4	0	0	1	0	16
x_2	0	1	0	0	1/4	3
	-2	0	0	0	3/4	9

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	1	0	-1/2	2
x_4	0	0	-4	1	$\boxed{2}$	8
x_2	0	1	0	0	1/4	3
	0	0	2	0	-1/4	13
x_1	1	0	0	1/4	0	4
x_5	0	0	-2	1/2	1	4
x_2	0	1	1/2	-1/8	0	2
	0	0	3/2	1/8	0	14

此时达到最优解。$x^*=(4,2)$， MaxZ=14。

(P)

$$\max \quad 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(D)

$$\min \quad 8w_1 + 16w_2 + 12w_3$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & w_1 + 4w_2 \ge 2 \\ & 2w_1 + 4w_3 \ge 3 \\ & w_1, w_2, w_3 \ge 0 \end{aligned}$$

(D)最优解为：$w = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{8}, 0\right)$,最优值$=14.$

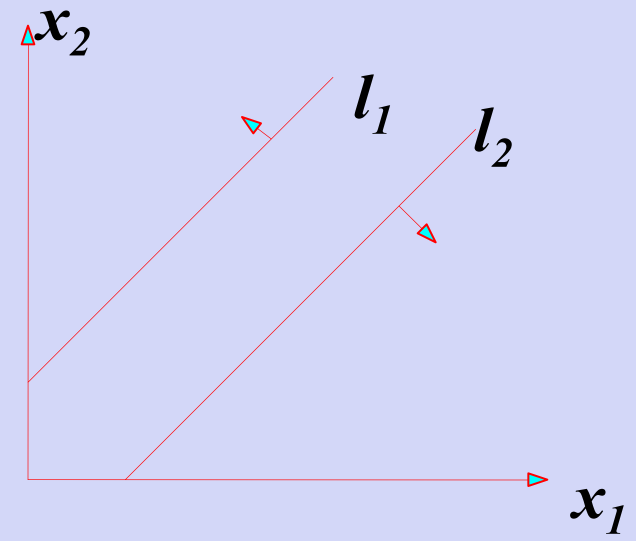
小结

原问题(min)	对应关系	对偶问题(max)
有最优解	↔	有最优解
无界解	↔	不可行
不可行	↔	无界解

例1： $\min z = -x_1 - x_2$

$$
\begin{aligned}
(P) \quad & s.t. \quad x_1 - x_2 \geq 1 \quad l_1 \\
& -x_1 + x_2 \geq 1 \quad l_2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

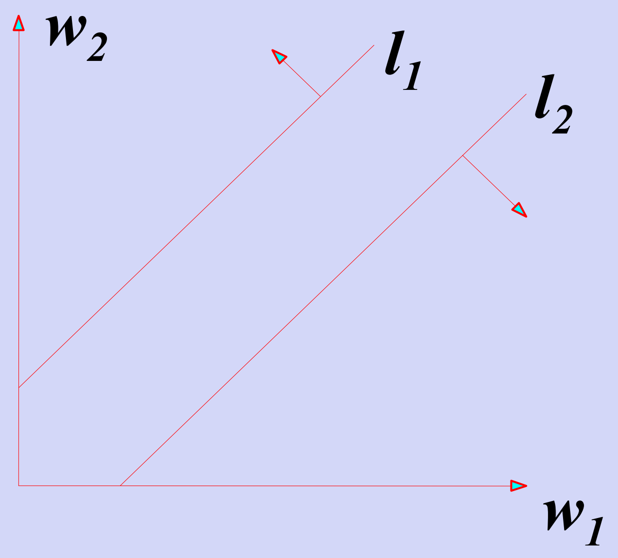
（无可行解）



$\max y = w_1 + w_2$

$$
\begin{aligned}
(D) \quad & s.t. \quad w_1 - w_2 \leq -1 \quad l_1 \\
& -w_1 + w_2 \leq -1 \quad l_2 \\
& w_1, w_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

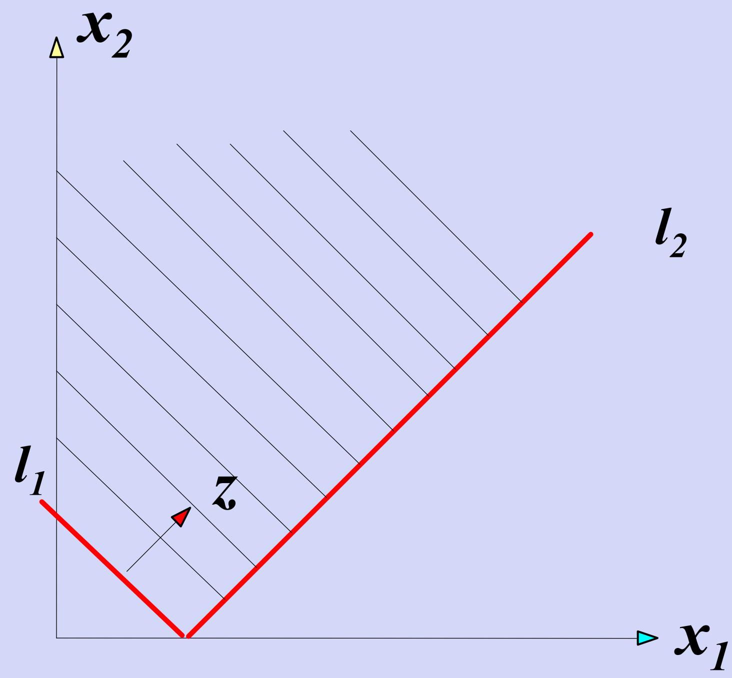
（无可行解）



例2:
$$\max z = x_1 + x_2$$

(P)
$$\begin{aligned} s.t. \quad & x_1 + x_2 \ge 1 \quad l_1 \\ & x_1 - x_2 \le 1 \quad l_2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

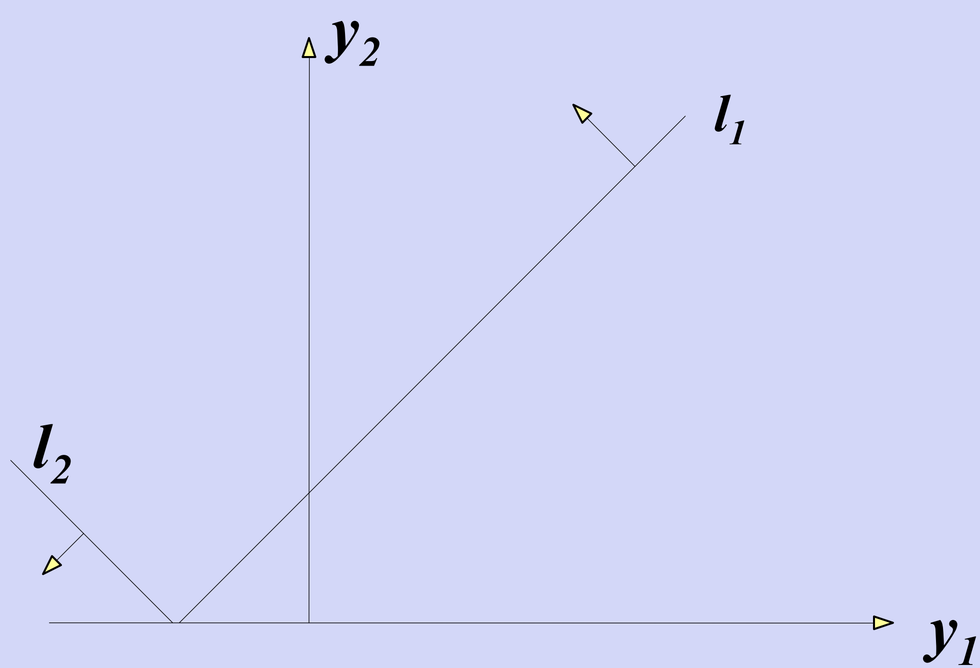
（无界解）



$$\min w = -y_1 + y_2$$

(D)
$$\begin{aligned} s.t. \quad & -y_1 + y_2 \ge 1 \quad l_1 \\ & -y_1 - y_2 \ge 1 \quad l_2 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

（无可行解）



定理4（互补松驰定理）

设$x^{(0)}$，$w^{(0)}$分别为（P），（D）问题的可行解

则$x^{(0)}$，$w^{(0)}$分别为（P），（D）的最优解的充要条件是 $\forall i, j(1\le i\le m, 1\le j\le n)$,有

（1）若$x_j^{(0)} > 0$,则$w^{(0)}P_j = c_j$

（2）若$w^{(0)}P_j < c_j$,则$x_j^{(0)} = 0$

$$(c - w^{(0)}A)x^{(0)} = 0$$

（3）若$w_i^{(0)} > 0$,则$A_i x^{(0)} = b_i$

（4）若$A_i x^{(0)} > b_i$,则$w_i^{(0)} = 0$

$$w^{(0)}(Ax^{(0)} - b) = 0$$

其中P_j是A的第j列，A_i是A的第i行.

证明：（必要性）

设$x^{(0)}$和$w^{(0)}$分别是(P)和(D)的最优解，则

$Ax^{(0)} \geq b \quad x^{(0)} \geq 0$且$w^{(0)}A \leq c, \quad w^{(0)} \geq 0$

故有 $w^{(0)}Ax^{(0)} \geq w^{(0)}b, \quad w^{(0)}Ax^{(0)} \leq cx^{(0)}$

即 $cx^{(0)} \geq w^{(0)}Ax^{(0)} \geq w^{(0)}b$

因为$x^{(0)}, w^{(0)}$是最优解,所以有$cx^{(0)} = w^{(0)}b$

所以，$cx^{(0)} = w^{(0)}Ax^{(0)} = w^{(0)}b$

即,$(c - w^{(0)}A)x^{(0)} = 0$,且$w^{(0)}(Ax^{(0)} - b) = 0.$

证明：（充分性）

由$(c-w^{(0)}A)x^{(0)}=0$，得$cx^{(0)}=w^{(0)}Ax^{(0)}$

由$w^{(0)}(Ax^{(0)}-b)=0$， 得$w^{(0)}Ax^{(0)}=w^{(0)}b$

因此有 $cx^{(0)}=w^{(0)}b$

由定理2知，$x^{(0)},w^{(0)}$为(P)和(D)的最优解.

定理4'：互补松弛定理(非对称形式)

设$x^{(0)}$和$w^{(0)}$分别是

$$\begin{cases} \min c^{\mathrm{T}} x \\ s.t. \quad Ax = b \\ \qquad\quad x \geq 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \max b^{\mathrm{T}} w \\ s.t. \quad A^{T} w \leq c \end{cases}$$

的可行解，则$x^{(0)}$和$w^{(0)}$是最优解的充要条件时，对任意的j，下列关系成立：

(1)若$x_j^{(0)} > 0$, 则$w^{(0)} P_j = c_j$;

(2)若$w^{(0)} P_j < c_j$，则$x_j^{(0)} = 0$.

例：考虑下面问题

$$(P)\quad MaxZ = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$(D)\quad MinW = 20y_1 + 20y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 1 \\ 2y_1 + y_2 \ge 2 \\ 2y_1 + 3y_2 \ge 3 \\ 3y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

已知(D)的最优解为$y^* = \left(\frac{6}{5}, \frac{1}{5}\right)$

用互补松弛定理求出(P)的最优解

解:

$$MinW = 20y_1 + 20y_2$$

$$ST:\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 1 \\ 2y_1 + y_2 \ge 2 \\ 2y_1 + 3y_2 \ge 3 \\ 3y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

由于$y_1^* > 0, y_2^* > 0$

由定理4知

$$x_1^* + 2x_2^* + 2x_3^* + 3x_4^* = 20 \qquad (1)$$

$$2x_1^* + x_2^* + 3x_3^* + 2x_4^* = 20 \qquad (2)$$

$$y_1^* + 2y_2^* = 1.2 + 0.4 = 1.6 > 1$$

$$2y_1^* + y_2^* = 2.4 + 0.2 = 2.6 > 2$$

$\Rightarrow$ $x_1^* = x_2^* = 0$, 代入（1），（2）

$$2x_3^* + 3x_4^* = 20$$

$$3x_3^* + 2x_4^* = 20$$

则$x_3^* = x_4^* = 4$

所以(P)问题的最优解为 $x^* = (0, 0, 4, 4)$