

教材习题答案

第六章 平面向量
及其应用

6.1 平面向量的概念

6.1.1 向量的实际背景与概念

6.1.2 向量的几何表示

6.1.3 相等向量与共线向量

练习

1. 解析 悬挂物受到的拉力, 摩擦力, 加速度.

2. 解析 图①中的有向线段表示一个竖直向下、大小为 18 N 的力, 图②中的有向线段表示一个水平向左、大小为 28 N 的力.

3. 解析 $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{CD}| = 2.5$, $|\overrightarrow{EF}| = 3$, $|\overrightarrow{GH}| = 2\sqrt{2}$.4. 解析 (1) 终点 M, N 的位置相同.(2) 由题意可知, 当 $\overrightarrow{OM}$ 与 $\overrightarrow{ON}$ 同向时, 如图 1.

图 1

$$\therefore |\overrightarrow{OM}| = 2|\overrightarrow{ON}| = 1, \therefore |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2},$$

向量 $\overrightarrow{MN}$ 与 $\overrightarrow{ON}$ 的方向相反.当 $\overrightarrow{OM}$ 与 $\overrightarrow{ON}$ 反向时, 如图 2.

图 2

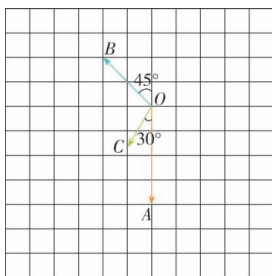
$$\therefore |\overrightarrow{OM}| = 2|\overrightarrow{ON}| = 1, \therefore |\overrightarrow{MN}| = \frac{3}{2},$$

向量 $\overrightarrow{MN}$ 与 $\overrightarrow{ON}$ 的方向相同.

◆ 习题 6.1

复习巩固

1. 解析 如图.

2. 解析 与 a 相等的向量有 $\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{SR}$;与 b 相等的向量有 $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{DO}$;与 c 相等的向量有 $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{ST}$.

综合运用

3. 答案 (1) $\times$ (2) $\checkmark$ (3) $\times$ (4) $\times$
(5) $\checkmark$ (6) $\checkmark$ 理由略.

拓展探索

4. 解析 相等的向量共有 24 对.

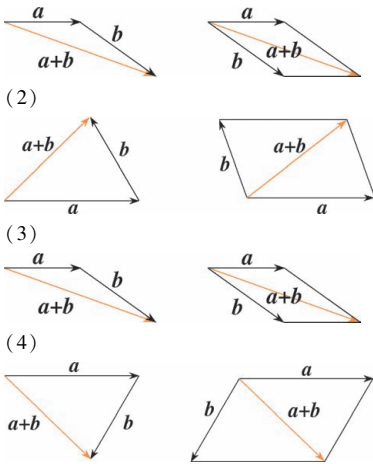
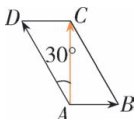
模为 1 的相等向量有 18 对 (其中与 $\overrightarrow{AM}$ 同向的共有 6 对, 与 $\overrightarrow{AM}$ 反向的也有 6 对, 与 $\overrightarrow{AD}$ 同向的共有 3 对, 与 $\overrightarrow{AD}$ 反向的也有 3 对); 模为 $\sqrt{2}$ 的相等向量有 4 对; 模为 2 的相等向量有 2 对.

6.2 平面向量的运算

6.2.1 向量的加法运算

练习

1. 解析 (1)

2. 解析 当 a 与 b 共线且方向相反时.3. 答案 (1) c (2) f (3) f (4) g 4. 答案 (1) $\times$ (2) $\checkmark$ (3) $\times$ 5. 解析 如图, 设 $\overrightarrow{AD}$ 表示小船的速度, $\overrightarrow{AB}$ 表示河水的速度, 以 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$, 则 $\overrightarrow{AC}$ 就是小船实际航行的速度.

由已知条件可得

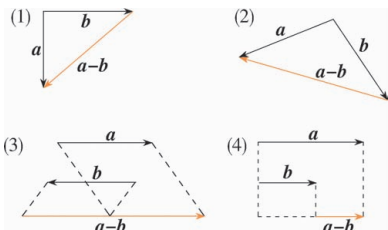
$$|\overrightarrow{AC}| = 15 \cos 30^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{2},$$

 $\therefore$ 小船实际航行速度的大小为 $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ km/h,
方向与河水的速度间的夹角为 90° .

6.2.2 向量的减法运算

练习

1. 解析

2. 答案 $\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{CA}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{BA}$

3. 解析 当 a, b 其中有一个为 0 时, $-(a+b) = -a-b$ 显然成立;
当 a, b 不共线时, 作图如图 1 所示, 显然 $-a-b = \overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OB} = -(a+b)$;

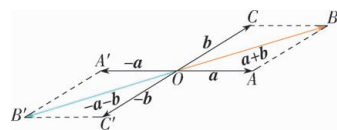


图 1

当 a, b 共线时, 作图如图 2 所示, 显然 $-(a+b) = -a-b$.

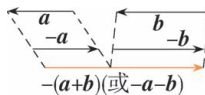
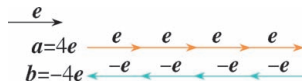


图 2

6.2.3 向量的数乘运算

练习

1. 解析 如图.

2. 答案 $\frac{5}{7}; -\frac{2}{7}$ 3. 解析 (1) $b = 2a$. (2) $b = -\frac{7}{4}a$.

$$(3) b = -\frac{1}{2}a. (4) b = \frac{8}{9}a.$$

练习

1. 解析 (1) 因为 $a = -b$, 所以 a, b 共线.(2) 因为 $b = -2a$, 所以 a, b 共线.2. 解析 (1) 原式 $= 3a - 2b$.

$$(2) \text{原式} = -\frac{11}{12}a + \frac{1}{3}a.$$

(3) 原式 $= 2ya$.3. 解析 $\therefore a$ 与 b 是共线向量, $\therefore$ 存在实数 λ , 使 $b = \lambda a$,即 $2e_1 + ke_2 = \lambda(e_1 - 2e_2)$.

$$\therefore \begin{cases} 2 = \lambda, \\ k = -2\lambda, \end{cases} \therefore k = -4.$$

6.2.4 向量的数量积

练习

1. 解析 $p \cdot q = |p||q| \cos 60^\circ = 8 \times 6 \times \frac{1}{2} = 24$.

2. 解析 $a \cdot b = |a||b| \cos \theta = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| \cos A$.
当 $a \cdot b < 0$ 时, $\cos A < 0$, A 为钝角, $\triangle ABC$ 为钝角三角形;
当 $a \cdot b = 0$ 时, $\cos A = 0$, A 为直角, $\triangle ABC$ 为直角三角形.

3. 解析 当 $\theta = 45^\circ$ 时, 向量 a 在向量 e 上的投影向量为 $|a| \cos 45^\circ e = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} e = 3\sqrt{2}e$;

当 $\theta = 90^\circ$ 时, 向量 a 在向量 e 上的投影向量为 $|a| \cos 90^\circ e = 0$;

当 $\theta = 135^\circ$ 时, 向量 a 在向量 e 上的投影向量为 $|a| \cos 135^\circ e = 6 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e = -3\sqrt{2}e$.

练习

1. 解析 设向量 a 与 b 的夹角为 θ , 向量 b 与 c 的夹角为 α .

$$(1) \therefore a \cdot b = |a||b| \cos \theta = 1 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{6} =$$

$$\sqrt{3}, \therefore (a \cdot b)c = \sqrt{3}c.$$

$$(2) \because \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \alpha = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = 3\sqrt{2}\mathbf{a}.$$

2. 证明 $\because \mathbf{a}-\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ 垂直,

$$\therefore (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}+2\mathbf{b}) = 0,$$

$$\text{即 } |\mathbf{a}|^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2|\mathbf{b}|^2 = 0.$$

$$\text{又 } |\mathbf{a}| = \sqrt{2}, |\mathbf{b}| = 1,$$

$$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \therefore \mathbf{a} \perp \mathbf{b}.$$

3. 证明 证法一: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 - (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$

$$= (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{a}-\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{a}+\mathbf{b})$$

$$= 2\mathbf{a} \cdot 2\mathbf{b} = 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

$$\text{证法二: } (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 - (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2) -$$

$$(\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2) = 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

◆习题 6.2

复习巩固

1. 解析 (1) 向东走 10 km, 再向东走 10 km, 即向东走 20 km.

(2) 向东走 10 km, 再向西走 5 km, 即向东走 5 km.

(3) 向东走 10 km, 再向北走 10 km, 即向东北走 $10\sqrt{2}$ km.

(4) 向西走 5 km, 再向南走 5 km, 即向西南走 $5\sqrt{2}$ km.

(5) 向西走 5 km, 再向北走 10 km, 再向西走 5 km, 即向西北走 $10\sqrt{2}$ km.

(6) 向南走 5 km, 再向东走 10 km, 再向南走 5 km, 即向东南走 $10\sqrt{2}$ km.

2. 解析 飞机飞行的路程为 700 km; 两次位移的合成是向北偏西约 53° 方向飞行 500 km.

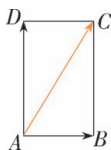
3. 解析 如图, 设 $\overrightarrow{AD}$ 表示船垂直于对岸的速度, $\overrightarrow{AB}$ 表示水流的速度, 以 AD 、 AB 为邻边作 $\square ABCD$, 则 $\overrightarrow{AC}$ 就是船实际航行的速度, 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $|\overrightarrow{AB}| = 4$, $|\overrightarrow{BC}| = 16$,

$$\therefore |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + 16^2} = 4\sqrt{17},$$

$$\tan \angle CAB = 4,$$

$$\therefore \angle CAB \approx 76^\circ.$$

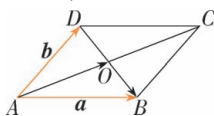
故船实际航行的速度大小为 $4\sqrt{17}$ km/h, 方向与水流速度间的夹角约为 76° .



4. 解析 (1) $\mathbf{0}$. (2) $\overrightarrow{AB}$. (3) $\overrightarrow{BA}$. (4) $\mathbf{0}$.

(5) $\mathbf{0}$. (6) $\overrightarrow{CB}$. (7) $\mathbf{0}$.

5. 证明 如图所示, 在平行四边形 $ABCD$ 中,



$$\text{设 } \overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{b},$$

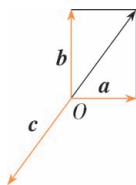
$$(1) \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}), \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}, \text{ 所以 } \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}.$$

$$(2) \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}), \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}),$$

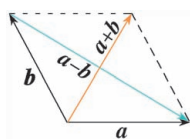
$$\text{因为 } \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}, \text{ 所以 } \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{b}.$$

6. 解析 (1) 如图.



(2) 不一定能构成三角形. 结合向量加法的三角形法则知, 当三个非零向量的和为零向量, 且这三个向量不共线时, 表示这三个向量的有向线段一定能构成三角形. 本题不一定能构成三角形.

7. 解析 (1) 如图.



(2) 当 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 成垂直的位置关系时, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

8. 解析 (1) $-2\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$. (2) $10\mathbf{a} - 22\mathbf{b} + 10\mathbf{c}$.

$$(3) 3\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}. (4) 2(x - y)\mathbf{b}.$$

9. 证明 因为 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$,

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

10. 答案 (1) 5; 1 (2) $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$

11. 解析 (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -6\sqrt{3}$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = 25 - 12\sqrt{3}$, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$.

$$(2) |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2} = \sqrt{23},$$

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2} = \sqrt{35}.$$

12. 证明 设 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 θ .

(1) 当 $\lambda = 0$ 时, 等式显然成立.

(2) 当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ 与 $\lambda\mathbf{b}$ 的夹角都为 θ , 则

$$(\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = |\lambda\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = \lambda |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta,$$

$$\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \lambda |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta,$$

$$\mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\lambda\mathbf{b}| \cos \theta = \lambda |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta,$$

$$\text{所以 } (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b}).$$

(3) 当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ 与 $\lambda\mathbf{b}$ 的夹角都为 $180^\circ - \theta$, 则

$$(\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = |\lambda\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(180^\circ - \theta) = -|\lambda| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta,$$

$$\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \lambda |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = -|\lambda| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta,$$

$$\mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\lambda\mathbf{b}| \cos(180^\circ - \theta) = -|\lambda| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta,$$

$$\text{所以 } (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b}).$$

综合运用

13. 解析 (1) 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 证明略.

(2) 四边形 $ABCD$ 为梯形.

证明如下: 因为 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$,

所以 $AD \parallel BC$, 且 $AD \neq BC$,

所以四边形 $ABCD$ 为梯形.

(3) 四边形 $ABCD$ 为菱形.

证明如下: 因为 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,

所以 $AB \parallel DC$, 且 $AB = DC$,

所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

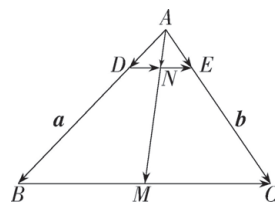
$$\text{又 } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|,$$

所以四边形 $ABCD$ 为菱形.

14. 解析 如图, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{DE} =$

$$\frac{1}{4}(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \overrightarrow{DB} = \frac{3}{4}\mathbf{a}, \overrightarrow{EC} = \frac{3}{4}\mathbf{b}, \overrightarrow{DN} = \frac{1}{8}(\mathbf{b}$$

$$- \mathbf{a}), \overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{8}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$



15. 证明 $\because \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$,

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF},$$

$$\therefore 2\overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF}).$$

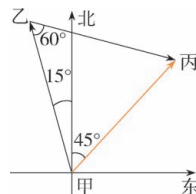
$$\text{又 } \because E, F \text{ 分别为 } AD, BC \text{ 的中点,}$$

$$\therefore \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED} = \mathbf{0}, \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{0},$$

$$\therefore 2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC},$$

$$\text{即 } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{EF}.$$

16. 解析 如图, 丙地在甲地的北偏东 45° 方向, 距甲地 1 400 km.



17. 解析 (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$.

$$(2) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \mathbf{0}.$$

$$(3) \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = \mathbf{0}.$$

$$\text{证明: 原式} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1}$$

$$= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1}$$

$$= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1}$$

$$= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = \mathbf{0}.$$

18. 解析 $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 4\mathbf{a}^2 - 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 3\mathbf{b}^2 = 61$, 于是可得 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -6$,

$$\text{所以 } \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = -\frac{1}{2}, \text{ 所以 } \theta = 120^\circ.$$

19. 解析 $\because |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 64 + 100 + 160\cos \theta = 256$, $\therefore \cos \theta = \frac{23}{40}$, $\therefore \theta \approx 55^\circ$.

20. 证明 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp (\mathbf{b} - \mathbf{c})$.

拓广探索

21. A 由 $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, 得点 O 为 BC 的中点, $\therefore BC$ 为外接圆的直径,

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ, OA = OB = OC.$$

$$\text{又 } \because |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}|, \therefore \triangle ABO \text{ 为等边三角形.}$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ, |\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|,$$

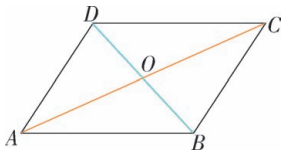
$$\therefore \text{向量 } \overrightarrow{BA} \text{ 在向量 } \overrightarrow{BC} \text{ 上的投影向量为 } |\overrightarrow{AB}|$$

$$\cdot \cos 60^\circ \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.$$

22. 解析 $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$.

23. 解析

(1)



(2) 四边形 ABCD 为平行四边形.

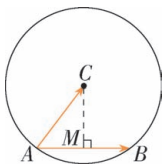
证明: $\because \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$,

$$\therefore \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC},$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD},$$

 $\therefore$ 四边形 ABCD 为平行四边形.24. 解析 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值只与弦 AB 的长度有关, 与圆的半径无关.

如图, 取 AB 的中点 M, 连接 CM,

则 $CM \perp AB$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$$\text{又 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \angle BAC,$$

$$\cos \angle BAC = \frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AC}|},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2.$$

6.3 平面向量基本定理及坐标表示

6.3.1 平面向量基本定理

练习

1. 解析 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$;

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\mathbf{b} - \mathbf{a};$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b};$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$= \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}.$$

2. 解析 (1) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} +$

$$\mathbf{b}) - \mathbf{b} = \frac{1}{4}\mathbf{a} - \frac{3}{4}\mathbf{b}.$$

$$\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} - \frac{3}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{1}{4}\mathbf{a}$$

$$- \frac{3}{4}\mathbf{b}.$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{DG} - \overrightarrow{DO} = \frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = -\frac{1}{6}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}.$$

(2) 由(1)得 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FB}$, $\therefore DE = FB, DE \parallel FB$.3. 解析 (1) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\mathbf{a} - \mathbf{b}$. $\therefore$ 点 E, F 分别是 AC, BC 的中点,

$$\therefore EF \parallel AB \text{ 且 } EF = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\mathbf{a}.$$

(2) CD 与 EF 垂直.

证明: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos 60^\circ = 2|\mathbf{b}| |\mathbf{b}| \times \frac{1}{2} = |\mathbf{b}|^2$,

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF} = \left(\frac{1}{4}\mathbf{a} - \mathbf{b}\right) \cdot \frac{1}{2}\mathbf{a} = \frac{1}{8}|\mathbf{a}|^2 - \frac{1}{2}\mathbf{a}$$

$$\cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2 = 0,$$

 $\therefore \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{EF}$, 即 CD 与 EF 垂直.

6.3.2 平面向量的正交

分解及坐标表示

6.3.3 平面向量加、减运算的坐标表示

练习

1. 解析 (1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (-2, 4) + (5, 2) = (3, 6)$,

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (-2, 4) - (5, 2) = (-7, 2).$$

$$(2) \mathbf{a} + \mathbf{b} = (4, 3) + (-3, 8) = (1, 11),$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (4, 3) - (-3, 8) = (7, -5).$$

$$(3) \mathbf{a} + \mathbf{b} = (2, 3) + (-2, -3) = (0, 0),$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (2, 3) - (-2, -3) = (4, 6).$$

$$(4) \mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, 0) + (0, 4) = (3, 4),$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (3, 0) - (0, 4) = (3, -4).$$

2. 解析 (1) $\overrightarrow{AB} = (3, 4)$, $\overrightarrow{BA} = (-3, -4)$.

$$(2) \overrightarrow{AB} = (9, -1)$$
, $\overrightarrow{BA} = (-9, 1)$.

$$(3) \overrightarrow{AB} = (0, 2)$$
, $\overrightarrow{BA} = (0, -2)$.

$$(4) \overrightarrow{AB} = (5, 0)$$
, $\overrightarrow{BA} = (-5, 0)$.

3. 解析 $AB \parallel CD$.证明: 由点 $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(1, 2)$, $D(2, 1)$, 得 $\overrightarrow{AB} = (1, -1)$, $\overrightarrow{CD} = (1, -1)$, 所以 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, 所以 $AB \parallel CD$.

6.3.4 平面向量数乘运算

的坐标表示

练习

1. 解析 $-2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} = -2(3, 2) + 4(0, -1) =$

$$(-6, -4) + (0, -4) = (-6, -8).$$

$$4\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = 4(3, 2) + 3(0, -1) = (12, 8) + (0, -3) = (12, 5).$$

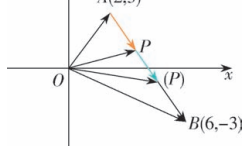
2. 解析 由已知得 $3x = -12$, $\therefore x = -4$.3. 解析 $\overrightarrow{AB} = (2, 2) - (-2, -3) = (4, 5)$,

$$\overrightarrow{CD} = (-7, -4.5) - (-1, 3) = (-6, -7.5).$$

$$\therefore 4 \times (-7.5) = 5 \times (-6) = -30,$$

 $\therefore \overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线.4. 解析 (1) 由 $A(2, 1)$, $B(4, 3)$, 得线段 AB 的中点坐标为 $(3, 2)$.(2) 由 $A(-1, 2)$, $B(3, 6)$, 得线段 AB 的中点坐标为 $(1, 4)$.(3) 由 $A(5, -4)$, $B(3, -6)$, 得线段 AB 的中点坐标为 $(4, -5)$.

5. 解析 如图, 点 P 是线段 AB 的三等分点, 有

两种情况, 即 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$ 或 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$.

$$\text{当 } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} \text{ 时, } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

$$= \left(\frac{2 \times 2 + 6}{3}, \frac{2 \times 3 - 3}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, 1\right),$$

即点 P 的坐标为 $\left(\frac{10}{3}, 1\right)$.

$$\text{当 } \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB} \text{ 时, } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$

$$= \left(\frac{2 + 2 \times 6}{3}, \frac{3 + 2 \times (-3)}{3}\right) = \left(\frac{14}{3}, -1\right),$$

即点 P 的坐标为 $\left(\frac{14}{3}, -1\right)$.

综上, 点 P 是线段 AB 的三等分点时, 坐标为

$$\left(\frac{10}{3}, 1\right) \text{ 或 } \left(\frac{14}{3}, -1\right).$$

6.3.5 平面向量数量积

的坐标表示

练习

1. 解析 $|\mathbf{a}| = \sqrt{a^2} = \sqrt{9+16} = 5$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{b^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-3, 4) \cdot (5, 2) =$

$$-15 + 8 = -7.$$

2. 解析 $\mathbf{a} = (2, 3)$, $\mathbf{b} = (-2, 4)$, $\mathbf{c} = (-1, -2)$,

$$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \times (-2) + 3 \times 4 = 8.$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (0, 7), \mathbf{a} - \mathbf{b} = (4, -1),$$

$$\therefore (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0 \times 4 + 7 \times (-1) = -7.$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = (-3, 2),$$

$$\therefore \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = 2 \times (-3) + 3 \times 2 = 0.$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (0, 7), \therefore (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = 0^2 + 7^2 = 49.$$

3. 解析 $\because \mathbf{a} = (3, 2)$, $\mathbf{b} = (5, -7)$,

$$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \times 5 + 2 \times (-7) = 1, |\mathbf{a}| = \sqrt{9+4} =$$

$$\sqrt{13}, |\mathbf{b}| = \sqrt{25+49} = \sqrt{74},$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{74}}, \therefore \theta \approx 88^\circ.$$

◆ 习题 6.3

复习巩固

1. 解析 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\mathbf{a} - \mathbf{b}$,

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\mathbf{a} - \mathbf{b}\right) =$$

$$\frac{1}{6}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}.$$

2. 解析 由 $\mathbf{F}_1 = (3, 4)$, $\mathbf{F}_2 = (2, -5)$, $\mathbf{F}_3 = (3,$ 1), 得 $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = (3, 4) + (2, -5) + (3, 1) =$ $(8, 0)$, 所以作用在原点的合力 $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$ 的坐标为 $(8, 0)$.3. 解析 设向量 $\mathbf{a}$ 的终点 B 的坐标为 (x, y) .(1) 由 $(-2, 1) = (x, y)$, 得点 B 的坐标为 $(-2, 1)$.(2) 由 $(1, 3) = (x+1, y-5)$, 得点 B 的坐标为 $(0, 8)$.(3) 由 $(-2, -5) = (x-3, y-7)$, 得点 B 的坐标为 $(1, 2)$.4. 解析 由题意知 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, 设 $D(x, y)$,

$$\text{则 } \begin{cases} x+1=2, \\ y+2=7, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=1, \\ y=5. \end{cases}$$

所以点 D 的坐标为 $(1, 5)$.5. 解析 设 A', B' 的坐标分别为 (x_1, y_1) , $(x_2,$ $y_2)$, 则 $\overrightarrow{OA'} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OB'} = (x_2, y_2)$.由 $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$, 得 $(x_1, y_1) = 2(1, 2) = (2, 4)$,所以点 A' 的坐标为 $(2, 4)$.由 $\overrightarrow{OB'} = 3\overrightarrow{OB}$, 得 $(x_2, y_2) = 3(-1, 3) = (-3, 9)$,

所以点 B' 的坐标为 $(-3, 9)$.

所以 $\overrightarrow{A'B'} = (-3, 9) - (2, 4) = (-5, 5)$.

6. 解析 由题意得 $\overrightarrow{AB} = (-2, 4)$,

所以 $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (-1, 2)$, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$

$= (-4, 8)$, $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1, -2)$, 又 $\overrightarrow{OA} =$

$(1, 1)$ (O 为坐标原点), 则 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = (0, 3)$, 所以点 C 的坐标为 $(0, 3)$;

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = (-3, 9)$, 所以点 D 的坐标为 $(-3, 9)$;

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = (2, -1)$, 所以点 E 的坐标为 $(2, -1)$.

7. 解析 (1) A, B, C 三点共线.

证明: 因为 $\overrightarrow{AB} = (-4, -6)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 1.5)$, 所以 $\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{AC}$. 因为直线 AB 与直线 AC 有公共点 A , 所以 A, B, C 三点共线.

(2) P, Q, R 三点共线.

证明: 因为 $\overrightarrow{PQ} = (1.5, -2)$, $\overrightarrow{PR} = (6, -8)$, 所以 $\overrightarrow{PR} = 4\overrightarrow{PQ}$. 因为直线 PR 与直线 PQ 有公共点 P , 所以 P, Q, R 三点共线.

(3) E, F, G 三点共线.

证明: 因为 $\overrightarrow{EF} = (-8, -4)$, $\overrightarrow{EG} = (-1, -0.5)$, 所以 $\overrightarrow{EF} = 8\overrightarrow{EG}$. 因为直线 EF 与直线 EG 有公共点 E , 所以 E, F, G 三点共线.

8. 解析 (1) $\triangle ABC$ 是直角三角形, B 为直角, 图略.

证明: $\overrightarrow{BA} = (-6, -6)$, $\overrightarrow{BC} = (-2, 2)$,

由 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$, 得 $BC \perp BA$,

$\therefore B$ 为直角, $\triangle ABC$ 为直角三角形.

(2) $\triangle ABC$ 是直角三角形, A 为直角, 图略.

证明: $\overrightarrow{AB} = (21, 7)$, $\overrightarrow{AC} = (1, -3)$, 由 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, 得 $AB \perp AC$, $\therefore A$ 为直角, $\triangle ABC$ 为直角三角形.

(3) $\triangle ABC$ 是直角三角形, B 为直角, 图略.

证明: $\overrightarrow{BA} = (-3, 3)$, $\overrightarrow{BC} = (5, 5)$, 由 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, 得 $BA \perp BC$, $\therefore B$ 为直角, $\triangle ABC$ 为直角三角形.

9. 解析 设 $a = (x, y)$, 则由题意得

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x = \frac{y}{2}. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{5}}{5}, \\ y = \frac{6\sqrt{5}}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{3\sqrt{5}}{5}, \\ y = -\frac{6\sqrt{5}}{5}. \end{cases}$$

于是 $a = \left(\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $a = \left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}, -\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$.

10. 解析 设与 a 垂直的单位向量 $e = (x, y)$,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 4x + 2y = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{5}, \\ y = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \\ y = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \end{cases}$$

$$\therefore e = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \text{ 或 } e = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

综合运用

11. 解析 (1) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} =$

$$\frac{1}{3}b - \frac{1}{2}a,$$

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b.$$

$$(2) EF \perp EG. \text{ 证明: } \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = \left(\frac{1}{3}b - \frac{1}{2}a\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b\right) = \frac{1}{9}|b|^2 - \frac{1}{4}|a|^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{4}|a|^2 - \frac{1}{4}|a|^2 = 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{EG}, \text{ 即 } EF \perp EG.$$

12. 解析 由题意得 $\overrightarrow{OA} = (1, 2)$, $\overrightarrow{AB} = (3, 3)$.

当 $t = 1$ 时, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = (4, 5)$, 所以点 P 的坐标为 $(4, 5)$;

$$\text{当 } t = \frac{1}{2} \text{ 时, } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1, 2) + \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right),$$

所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$;

当 $t = -2$ 时, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{AB} = (1, 2) - (6, 6) = (-5, -4)$, 所以点 P 的坐标为 $(-5, -4)$;

当 $t = 2$ 时, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AB} = (1, 2) + (6, 6) = (7, 8)$, 所以点 P 的坐标为 $(7, 8)$.

13. 解析 设点 P 的坐标为 (x, y) . 由点 P 在线段 AB 的延长线上, 且 $|\overrightarrow{AP}| = \frac{3}{2}|\overrightarrow{PB}|$, 得

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BP},$$

$$\text{即 } (x-2, y-3) = \frac{3}{2}(x-4, y+3),$$

$$\text{所以 } \begin{cases} x-2 = \frac{3}{2}(x-4), \\ y-3 = \frac{3}{2}(y+3), \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 8, \\ y = -15. \end{cases}$$

所以点 P 的坐标为 $(8, -15)$.

14. 证明 因为 $\overrightarrow{AB} = (4, -2)$, $\overrightarrow{BC} = (3, 6)$,

$$\overrightarrow{DC} = (4, -2),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

所以以 $A(1, 0)$, $B(5, -2)$, $C(8, 4)$, $D(4, 6)$ 为顶点的四边形是一个矩形.

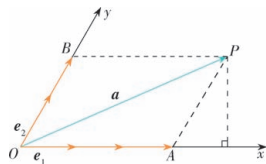
拓展探索

15. 解析 (1) 如图.

$$\overrightarrow{OA} = 3e_1, \overrightarrow{OB} = 2e_2, \angle AOB = 60^\circ,$$

$$\text{所以 } \angle OAP = 120^\circ, |\overrightarrow{OA}| = 3, |\overrightarrow{OB}| = 2.$$

利用三角函数及勾股定理易得 $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{19}$.



(2) 对于任意向量 $\overrightarrow{OP}$ 都存在唯一一对实数 x, y , 使 $\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2$, 所以本题中对向量坐标的规定合理.

16. 证明 构造向量 $u = (a, b)$, $v = (c, d)$.

因为 $u \cdot v = |u||v|\cos\theta$ (其中 θ 为向量 u, v 的夹角),

$$\text{所以 } ac + bd = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \cdot \cos\theta,$$

$$(ac + bd)^2 = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) \cos^2\theta \leq (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2),$$

不等式中中等号成立的条件是 u, v 同向或反向.

6.4 平面向量的应用

6.4.1 平面几何中的向量方法

练习

1. 证明 已知 $AB = AC$.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AB}|^2,$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2,$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}.$$

$$\text{又 } \cos B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|},$$

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|},$$

$$\therefore \cos B = \cos C, \therefore B = C.$$

2. 解析 解法一: $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$,

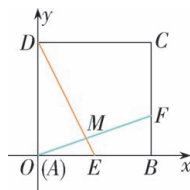
$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right) =$$

$$\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{1}{6}a^2.$$

$$\therefore \cos \angle EMF = \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{AF}|} = \frac{\frac{1}{6}a^2}{\frac{\sqrt{5}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{10}}{3}a} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

解法二: 建立如图所示的直角坐标系.



则 $A(0, 0)$, $D(0, a)$, $E\left(\frac{1}{2}a, 0\right)$,

$$F\left(a, \frac{1}{3}a\right),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{DE} = \left(\frac{1}{2}a, -a\right), \overrightarrow{AF} = \left(a, \frac{1}{3}a\right),$$

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{1}{6}a^2,$$

$$|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + (-a)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

$$|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}a,$$

$$\therefore \cos \angle EMF = \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{AF}|} = \frac{\frac{1}{6}a^2}{\frac{\sqrt{5}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{10}}{3}a} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

3. 解析 $\because$ 点 O 是 BC 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}m\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}n\overrightarrow{AN}.$$

又 $\because M, O, N$ 三点共线,

$$\therefore \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n = 1, \therefore m + n = 2.$$

6.4.2 向量在物理中的应用举例

练习

1. 解析 $\overrightarrow{AB} = (7, 0) - (20, 15) = (-13, -15)$,

$$W = F \cdot \overrightarrow{AB} = (4, -5) \cdot (-13, -15)$$

$$= 4 \times (-13) + (-5) \times (-15) = 23.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/097116155062006144>