

第六节 函数的幂级数展开式的应用

一、近似计算

二、计算定积分

三、微分方程的幂级数解法

四、小结

一、近似计算

$$\because A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

$$\therefore A \approx a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$\text{误差 } r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots.$$

两类问题:

1. 给定项数,求近似值并估计精度;
2. 给出精度,确定项数.

关键: 通过估计余项,确定精度或项数.

常用方法:

1. 若余项是交错级数,则可用余和的首项来解决;
2. 若不是交错级数,则放大余和中的各项,使之成为等比级数或其它易求和的级数,从而求出其和.

例1 计算 e 的近似值,使

解 $\because e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots,$

令 $x = 1,$ 得 $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$

余和:

$$\begin{aligned} r_n &\approx \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \cdots\right) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{n \cdot n!} \end{aligned}$$

欲使 r 只要 $\frac{1}{n \cdot n!} \leq 10^{-5}$,

即 $n \cdot n! \geq 10^5$, 而 $8 \cdot 8! = 322560 > 10^5$,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!} \approx 2.71828$$

例2 利用 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ 计算 $\sin 9^\circ$ 的近似值,
并估计误差.

解 $\sin 9^\circ = \sin \frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{20} \right)^3,$

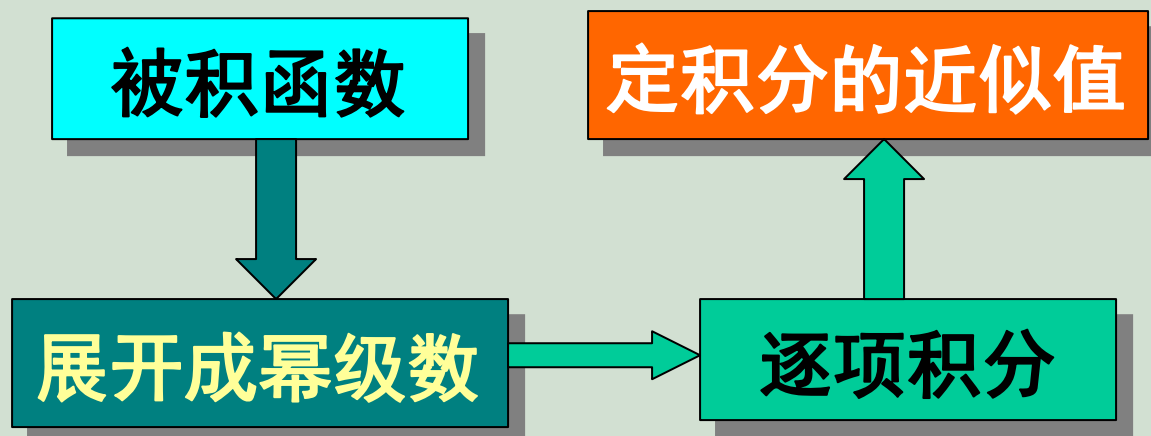
$$|r_2| \leq \frac{1}{6} \pi^3 < \frac{1}{1} = \frac{1}{37} < 10^{-5},$$

$$\therefore \sin 9^\circ \approx 0.157079 - 0.000646 \approx 0.156433$$

其误差不超过 10^{-5} .

二、计算定积分

解法



例3 计算 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 的近

解

$$x \in (-$$

收敛的交错级数

第四项 $\frac{1}{7 \cdot 7!} < \frac{1}{3000} < 10^{-4},$

取前三项作为积分的近似值,得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \approx 0.9461$$

三、微分方程的幂级数解法

例如 $\frac{dy}{dx} =$

解不能用初等函数或其积分式表达.

寻求近似解法: 幂级数解法;

1、 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 特解求法

问题 求 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 满足

$$\text{其中 } f(x,y) = a_{00} + a_{10}(x - x_0) + a_{01}(y - y_0) + \dots$$

$$y = y_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)_2 + \dots$$

其中 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 为待定的系数.

例4 求 $\frac{dy}{dx} = x + y^2$ 满足 $y|_{x=0} = 0$ 的特解.

解 $\because x_0 = 0 \quad y_0 = 0,$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots,$$

将 y, y' 的幂级数展开式代入原方程

$$\begin{aligned} & a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots \\ &= x + (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots)^2 \end{aligned}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/098012125060006023>