青海省 2024 届高三二诊模拟考试数学试卷

考生须知：

1．全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。

2．请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。

3．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．$\left(x^3-1\right)\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\right)^6$的展开式中的常数项为(　　)

A．－60　　B．240　　C．－80　　D．180

2．已知抛物线$x^2=4y$上一点A的纵坐标为 4，则点A到抛物线焦点的距离为（ ）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

3．已知抛物线$y^2=2px(p>0)$上一点$(5,t)$到焦点的距离为6，P、Q分别为抛物线与圆$(x-6)^2+y^2=1$上的动点，则$|PQ|$的最小值为（　）

A．$\sqrt{21}-1$　　B．$2-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$2\sqrt{5}$　　D．$2\sqrt{5}-1$

4．已知等差数列$\{a_n\}$的前 13 项和为 52，则$(-2)^{a_6+a_8}=$（　　）

A．256　　B．-256　　C．32　　D．-32

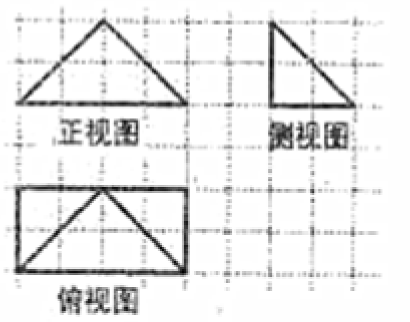
5．第七届世界军人运动会于 2019 年 10 月 18 日至 27 日在中国武汉举行，中国队以 133 金 64 银 42 铜位居金牌榜和奖牌榜的首位.运动会期间有甲、乙等五名志愿者被分配到射击、田径、篮球、游泳四个运动场地提供服务，要求每个人都要被派出去提供服务，且每个场地都要有志愿者服务，则甲和乙恰好在同一组的概率是（　　）

A．$\dfrac{1}{10}$　　B．$\dfrac{1}{5}$　　C．$\dfrac{1}{40}$　　D．$\dfrac{9}{40}$

6．在我国传统文化“五行”中，有“金、木、水、火、土”五个物质类别，在五者之间，有一种“相生”的关系，具体是：金生水、水生木、木生火、火生土、土生金.从五行中任取两个，这二者具有相生关系的概率是（　　）

A．0.2　　B．0.5　　C．0.4　　D．0.8

7．如图，正方形网格纸中的实线图形是一个多面体的三视图，则该多面体各表面所在平面互相垂直的有（　　）



A．2 对　　B．3 对

C．4 对　　D．5 对

8．已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 和偶函数 $g(x)$ 满足 $f(x)+g(x)=a^x-a^{-x}+2$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），若 $g(2)=a$，则函数 $f\left(x^2+2x\right)$ 的单调递增区间为（　　）

A．$(-1,1)$　　B．$(-\infty,1)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$(-1,+\infty)$

9．已知焦点为 F 的抛物线 $C:y^2=4x$ 的准线与 x 轴交于点 A，点 M 在抛物线 C 上，则当 $\frac{|MA|}{|MF|}$ 取得最大值时，直线 MA 的方程为（　　）

A．$y=x+1$ 或 $y=-x-1$　　B．$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 或 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$　　C．$y=2x+2$ 或 $y=-2x-2$

D．$y=-2x+2$

10．若 $z=\frac{i^{2020}+3i}{1+i}$，则 z 的虚部是（　　）

A．i　　B．$2i$　　C．-1　　D．1

11．已知 ***α***，***β*** 是两平面，***l***，***m***，***n*** 是三条不同的直线，则不正确命题是（　　）

A．若 ***m***⊥***α***，***n***//***α***，则 ***m***⊥***n***　　B．若 ***m***//***α***，***n***//***α***，则 ***m***//***n***

C．若 ***l***⊥***α***，***l***//***β***，则 ***α***⊥***β***　　D．若 ***α***//***β***，***l***⊄***β***，且 ***l***//***α***，则 ***l***//***β***

12．已知命题 $p:\forall x>0,\ln(x+1)>0$；命题 q：若 $a>b$，则 $a^2>b^2$，下列命题为真命题的是（　　）

A．$p\wedge q$　　B．$p\wedge\neg q$　　C．$\neg p\wedge q$　　D．$\neg p\wedge\neg q$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．设 $(\sqrt{2}+x)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots a_{10}x^{10}$，则 $a_2=$_____，

$(a_0+a_2+a_4+\ldots+a_{10})^2-(a_1+a_3+a_5+\ldots+a_9)^2$ 的值为______.

14．已知 a、b 为正实数，直线 $x+y+1=0$ 截圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$ 所得的弦长为 $2\sqrt{2}$，则 $\frac{a+1}{ab}$

的最小值为__________.

15．设x,y满足约束条件$\begin{cases}x\ge y\\3x+y\ge 0\\3x-y\le 6\end{cases}$，则目标函数$z=2x+y$的最小值为_.

16．已知$\triangle ABC$的三个内角为A，B，C，且$\sin A$，$\sin B$，$\sin C$成等差数列，　　则$\sin 2B+2\cos B$的最小值为__________，最大值为___________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足：$a_1=2,b_1=-1$，$a_n=2a_{n-1}-b_{n-1}$，$b_n=2b_{n-1}-a_{n-1}$，$n\in N^*,n\ge 2$.

（1）求证:数列$\{a_n-b_n\}$为等比数列；

（2）求数列$\left\{\dfrac{3^n}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$S_n$.

18．（12 分）已知函数$f(x)=e^{-\frac{x}{1-x}}$，

（1）证明：$f(x)$在区间$(0,1)$单调递减；

（2）证明：对任意的$x\in(0,1)$有$e^{-\frac{x}{1-x}}<1-x<e^{-x}$.

19．（12 分）已知函数$f(x)=e^x-ax^2(a>0)$（其中$e=2.718\cdots$是自然对数的底数）

（1）若$f(x)$在R上单调递增，求正数a的取值范围；

（2）若$f(x)$**f**（**x**）在$x=x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$处导数相等，证明：$x_1+x_2<2\ln 2a$；

（3）当$a=\dfrac{1}{2}$时，证明：对于任意$k\le\dfrac{1}{e}+1$，若$b<\dfrac{1}{2}$，则直线$y=kx+b$与曲线$y=f(x)$有唯一公共点（注：当$k>1$时，直线$y=x+k$与曲线$y=e^x$的交点在y轴两侧）.

20．（12 分）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F_1$，过点$F_1$且与$x$轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为$\sqrt{2}$，且$F_1$与短轴两端点的连线相互垂直.

（1）求椭圆C的方程；

（2）若圆$O:x^2+y^2=a^2$上存在两点M，N，椭圆C上存在两个点P,Q满足：M,N,F_1三点共线，P,Q,F_1三点共线，且$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MN}=0$，求四边形$PMQN$面积的取值范围.

21．（12 分）已知$f\left(x\right)=x^3+ax^2-a^2x+2$.

（1）若 $a \neq 0$，求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）若不等式 $2x\ln x \leq f'\left(x\right)+a^2+1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

22.（10 分）已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=\dfrac{1}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$.

（1）求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程；

（2）设点 $P(\dfrac{1}{2},0)$，直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点，求 $\left|PA\right|+\left|PB\right|$ 的值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**D**

【解析】

求 $\left(x^3-1\right)\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项，可转化为求 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\right)^6$ 展开式中的常数项和 $\dfrac{1}{x^3}$ 项，再求和即可得出答案.

【详解】

由题意，$\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\right)^6$ 中常数项为 $C_6^2\left(\sqrt{x}\right)^4\left(\dfrac{2}{x}\right)^2=60$，

$\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\right)^6$ 中 $\dfrac{1}{x^3}$ 项为 $C_6^4\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\dfrac{2}{x}\right)^4=240\dfrac{1}{x^3}$，

所以 $\left(x^3-1\right)\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为：

$x^3\times 240\dfrac{1}{x^3}-1\times 60=180$.

故选：**D**

【点睛】

本题主要考查二项式定理的应用和二项式展开式的通项公式，考查学生计算能力，属于基础题.

2、**D**

【解析】

试题分析：抛物线 $x^2=4y$ 焦点在 y 轴上，开口向上，所以焦点坐标为 $(0,1)$，准线方程为 $y=-1$，因为点 **A** 的纵坐标为 **4**，所以点 **A** 到抛物线准线的距离为 $4+1=5$，因为抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离，所以点 **A** 与抛物线焦点的距离为 **5.**

考点：本小题主要考查应用抛物线定义和抛物线上点的性质抛物线上的点到焦点的距离，考查学生的运算求解能力.

点评：抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离，这条性质在解题时经常用到，可以简化运算.

3、**D**

【解析】

利用抛物线的定义，求得 **p** 的值，由利用两点间距离公式求得 $|PM|$，根据二次函数的性质，求得 $|PM|_{\min}$，由 $|PQ|$ 取得最小值为 $|PM|_{\min}-1$，求得结果.

【详解】

由抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 焦点在 x 轴上，准线方程 $x=-\dfrac{p}{2}$，

则点 $(5,t)$ 到焦点的距离为 $d=5+\dfrac{p}{2}=6$，则 $p=2$，

所以抛物线方程：$y^2=4x$，

设 $P(x,y)$，圆 $M:(x-6)^2+y^2=1$，圆心为 $(6,1)$，半径为 **1**，

则 $|PM|=\sqrt{(x-6)^2+y^2}=\sqrt{(x-6)^2+4x}=\sqrt{(x-4)^2+20}$，

当 $x=4$ 时，$|PQ|$ 取得最小值，最小值为 $\sqrt{20}-1=2\sqrt{5}-1$，

故选 **D.**

【点睛】

该题考查的是有关距离的最小值问题，涉及到的知识点有抛物线的定义，点到圆上的点的距离的最小值为其到圆心的距离减半径，二次函数的最小值，属于中档题目.

4、**A**

【解析】

利用等差数列的求和公式及等差数列的性质可以求得结果.

【详解】

由 $S_{13}=13a_7=52$，$a_7=4$，得 $\left(-2\right)^{a_6+a_8}=\left(-2\right)^8=256$.选 **A.**

【点睛】

本题主要考查等差数列的求和公式及等差数列的性质，等差数列的等和性应用能快速求得结果.

5、A

【解析】

根据题意，五人分成四组，先求出两人组成一组的所有可能的分组种数，再将甲乙组成一组的情况，即可求出概率.

【详解】

五人分成四组，先选出两人组成一组，剩下的人各自成一组，

所有可能的分组共有 $C_5^2=10$ 种，

甲和乙分在同一组，则其余三人各自成一组，只有一种分法，与场地无关，

故甲和乙恰好在同一组的概率是 $\frac{1}{10}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查组合的应用和概率的计算，属于基础题.

6、B

【解析】

利用列举法，结合古典概型概率计算公式，计算出所求概率.

【详解】

从五行中任取两个，所有可能的方法为：金木、金水、金火、金土、木水、木火、木土、水火、水土、火土，共 10 种，

其中由相生关系的有金水、木水、木火、火土、金土，共 5 种，所以所求的概率为 $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=0.5$.

故选：B

【点睛】

本小题主要考查古典概型的计算，属于基础题.

7、C

【解析】

画出该几何体的直观图 $P-ABCD$，易证平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PCD\perp$ 平面 PAD，平面 $PAB\perp$ 平面 PAD，平面 $PAB\perp$ 平面 PCD，从而可选出答案.

【详解】

该几何体是一个四棱锥，直观图如下图所示，易知平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，

作 $PO\perp AD$ 于 O，则有 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，$PO\perp CD$，

又 $AD\perp CD$，所以，$CD\perp$ 平面 PAD，

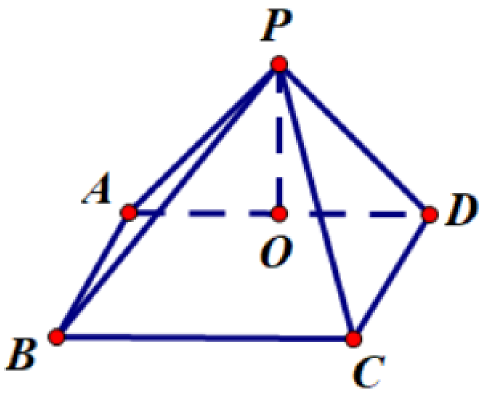
所以平面 $PCD \perp$ 平面 PAD，

同理可证：平面 $PAB \perp$ 平面 PAD，

由三视图可知：**$PO=AO=OD$**，所以，**$AP\perp PD$**，又 **$AP\perp CD$**，

所以，**$AP\perp$**平面 **PCD**，所以，平面 $PAB \perp$ 平面 PCD，

所以该多面体各表面所在平面互相垂直的有 **4** 对.



【点睛】

本题考查了空间几何体的三视图，考查了四棱锥的结构特征，考查了面面垂直的证明，属于中档题.

8、**D**

【解析】

根据函数的奇偶性用方程法求出 $f(x),g(x)$ 的解析式，进而求出 a，再根据复合函数的单调性，即可求出结论.

【详解】

依题意有 $f(x)+g(x)=a^x-a^{-x}+2$，　①

$f(-x)+g(-x)=a^{-x}-a^x+2=-f(x)+g(x)$，　②

①−②得 $f(x)=a^x-a^{-x},g(x)=2$，又因为 $g(2)=a$，

所以 $a=2,f(x)=2^x-2^{-x}$，$f(x)$ 在 R 上单调递增，

所以函数 $f\left(x^2+2x\right)$ 的单调递增区间为 $(-1,+\infty)$.

故选:**D.**

【点睛】

本题考查求函数的解析式、函数的性质，要熟记复合函数单调性判断方法，属于中档题.

9、**A**

【解析】

过M作MP与准线垂直，垂足为P，利用抛物线的定义可得$\left|\frac{MA}{MF}\right|=\left|\frac{MA}{MP}\right|=\frac{1}{\cos\angle AMP}=\frac{1}{\cos\angle MAF}$，要使$\frac{|MA|}{|MF|}$最大，则$\angle MAF$应最大，此时$AM$与抛物线$C$相切，再用判别式或导数计算即可.

【详解】

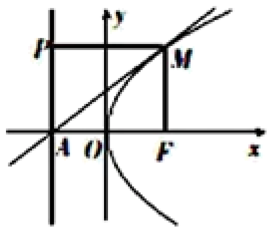
过M作MP与准线垂直，垂足为P，$\left|\frac{MA}{MF}\right|=\left|\frac{MA}{MP}\right|=\frac{1}{\cos\angle AMP}=\frac{1}{\cos\angle MAF}$，

则当$\frac{|MA|}{|MF|}$取得最大值时，$\angle MAF$最大，此时AM与抛物线C相切，

易知此时直线AM的斜率存在，设切线方程为$y=k(x+1)$，

则$\begin{cases} y=k(x+1) \\ y^2=4x \end{cases}$.则$\Delta=16-16k^2=0$，$k^2=1$，$k=\pm1$，

则直线AM的方程为$y=\pm(x+1)$.



故选：A.

【点睛】

本题考查直线与抛物线的位置关系，涉及到抛物线的定义，考查学生转化与化归的思想，是一道中档题.

10、D

【解析】

通过复数的乘除运算法则化简求解复数为：$a+bi$的形式，即可得到复数的虚部.

【详解】

由题可知$z=\frac{i^{2020}+3i}{1+i}=\frac{1+3i}{1+i}=\frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1+2i-3i^2}{1-i^2}=2+i$，

所以z的虚部是1.

故选：D.

【点睛】

本题考查复数的代数形式的混合运算，复数的基本概念，属于基础题.

11、B

【解析】

根据线面平行、线面垂直和空间角的知识，判断 **A** 选项的正确性.由线面平行有关知识判断 **B** 选项的正确性.根据面面垂直的判定定理，判断 **C** 选项的正确性.根据面面平行的性质判断 **D** 选项的正确性.

【详解】

A．若$n//\alpha$，则在α中存在一条直线l，使得$l//n$，$m\perp\alpha$，$l\subset\alpha$，则$m\perp l$，又$l//n$，那么$m\perp n$，故正确；

B．若$m//\alpha$，$n//\alpha$，则$m//n$或相交或异面，故不正确；

C．若$l//\beta$，则存在$a\subset\beta$，使$l//\alpha$，又$l\perp\alpha$，$\therefore a\perp\alpha$，则$\alpha\perp\beta$，故正确.

D．若$\alpha//\beta$，且$l//\alpha$，则$l\subset\beta$或$l//\beta$，又由$l\not\subset\beta$，$\therefore l//\beta$，故正确.

故选：**B**

【点睛】

本小题主要考查空间线线、线面和面面有关命题真假性的判断，属于基础题.

12、**B**

【解析】

解：命题 p：∀x＞0，ln（x+1）＞0，则命题 p 为真命题，则¬p 为假命题；

取 a=－1，b=－2，a＞b，但 a^2＜b^2，则命题 q 是假命题，则¬q 是真命题.

∴p∧q 是假命题，p∧¬q 是真命题，¬p∧q 是假命题，¬p∧¬q 是假命题.

故选 B.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、**720　　1**

【解析】

利用二项展开式$(a+b)^n$的通式$T_{r+1}=C_n^r a^{n-r}b^r$可求出a_2；令$(\sqrt{2}+x)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots a_{10}x^{10}$中的$x=1$，

$x=-1$得两个式子，代入$a_0+a_2+a_4+\ldots+a_{10})^2-\left(a_1+a_3+a_5+\ldots+a_9\right)^2$可得结果.

【详解】

利用二项式系数公式，$T_2=C_{10}^2(\sqrt{2})^8x^2=720x^2$，故$a_2=720$，

$a_0+a_1+\ldots+a_{10}=(\sqrt{2}+1)^{10},a_0-a_1+a_2-\ldots+a_{10}=(\sqrt{2}-1)^{10}$，

故（$a_0+a_2+a_4+\ldots+a_{10})^2-\left(a_1+a_3+a_5+\ldots+a_9\right)^2$

$=\left(a_0+a_1+\ldots+a_{10}\right)\left(a_0-a_1+a_2-\ldots+a_{10}\right)=(\sqrt{2}+1)^{10}(\sqrt{2}-1)^{10}=1$，

故答案为：**720**；**1**.

【点睛】

本题考查二项展开式的通项公式的应用，考查赋值法，是基础题.

14、$3+2\sqrt{2}$

【解析】

先根据弦长，半径，弦心距之间的关系列式求得$a+b-1=0$，代入$\frac{a+1}{ab}$整理得$\frac{a+1}{ab}=\frac{1}{-(a+1)-\frac{2}{a+1}+3}$，利用基本不等式求得最值.

【详解】

解：圆$(x-a)^2+(y-b)^2=4$的圆心为(a,b)，

则(a,b)到直线$x+y+1=0$的距离为$\frac{|a+b+1|}{\sqrt{2}}$，

由直线$x+y+1=0$截圆$(x-a)^2+(y-b)^2=4$所得的弦长为$2\sqrt{2}$可得

$\left(\frac{|a+b+1|}{\sqrt{2}}\right)^2+\sqrt{2}^2=2^2$，整理得$(a+b+1)^2=4$，

解得$a+b-1=0$或$a+b+3=0$(舍去)，令$m=\frac{a+1}{ab}(a>0,b>0)$

$\therefore m=\frac{a+1}{ab}=\frac{a+1}{a(1-a)}=\frac{a+1}{-(a+1)^2+3(a+1)-2}=\frac{1}{-(a+1)-\frac{2}{a+1}+3}$，

又$(a+1)+\frac{2}{a+1}\geq 2\sqrt{2}$，当且仅当$a+1=\sqrt{2}$时,等号成立,

则$-(a+1)-\frac{2}{a+1}+3\leq -2\sqrt{2}+3$

$\therefore m=\frac{1}{-(a+1)-\frac{2}{a+1}+3}\geq\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$.

故答案为：$3+2\sqrt{2}$.

【点睛】

本题考查直线和圆的位置关系，考核基本不等式求最值，关键是对目标式进行变形，变成能用基本不等式求最值的形式，也可用换元法进行变形，是中档题.

15、-1