

2024 届云南省楚雄州大姚县大姚一中高三数学试题周考试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 关于函数 $f(x) = \sin|x| + |\cos x|$ 有下述四个结论：（ ）

- ① $f(x)$ 是偶函数； ② $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上是单调递增函数；
- ③ $f(x)$ 在 R 上的最大值为 2； ④ $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 4 个零点.

其中所有正确结论的编号是（ ）

- A. ①②④ B. ①③ C. ①④ D. ②④

2. 在三角形 ABC 中， $a=1$ ， $\frac{b+c}{\sin A} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B - \sin C}$ ，求 $b \sin A =$ （ ）

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

3. 已知点 $M(2,0)$ ，点 P 在曲线 $y^2 = 4x$ 上运动，点 F 为抛物线的焦点，则 $\frac{|PM|^2}{|PF|-1}$ 的最小值为（ ）

- A. $\sqrt{3}$ B. $2(\sqrt{5}-1)$ C. $4\sqrt{5}$ D. 4

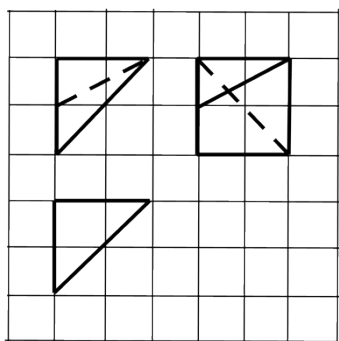
4. 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， $a_1=1$ ，公差 $d \in [1, 2]$ ，且 $a_4 + \lambda a_{10} + a_{16} = 15$ ，则实数 λ 的最大值为（ ）

- A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{53}{19}$ C. $-\frac{23}{19}$ D. $-\frac{1}{2}$

5. 设全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | x < 2\}$ ， $B = \{x | x^2 - 3x < 0\}$ ，则 $(\complement_U A) \cap B =$ （ ）

- A. $(0, 3)$ B. $[2, 3)$ C. $(0, 2)$ D. $(0, +\infty)$

6. 如图所示，网络纸上小正方形的边长为 1，粗线画出的是某四棱锥的三视图，则该几何体的体积为（ ）



- A. 2 B. $\frac{8}{3}$ C. 6 D. 8

7. 高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号，用其名字命名的“高斯函数”为：设 $x \in \mathbf{R}$ ，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $y = [x]$ 称为高斯函数，例如： $[-0.5] = -1$ ， $[1.5] = 1$ ，已知函数

$f(x) = 4^{x-\frac{1}{2}} - 3 \cdot 2^x + 4$ ($0 < x < 2$)，则函数 $y = [f(x)]$ 的值域为 ()

- A. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

8. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，上顶点为点 A ，延长 AF_2 交椭圆 Γ 于点 B ，若 $\triangle ABF_1$ 为等腰三角形，则椭圆 Γ 的离心率 $e =$

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

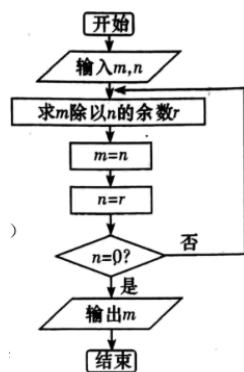
9. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 相切，则双曲线的离心率为 ()

- A. 2 B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

10. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， $A = \{1, 3, 5\}$ ， $B = \{2, 3, 4\}$ ，则集合 $\complement_U(A \cup B) =$ ()

- A. $\{1, 2, 6\}$ B. $\{1, 3, 6\}$ C. $\{1, 6\}$ D. $\{6\}$

11. 执行下面的程序框图，如果输入 $m = 1995$ ， $n = 228$ ，则计算机输出的数是 ()



- A. 58 B. 57 C. 56 D. 55

12. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ ，直线 $y = k\left(x - \frac{p}{2}\right) (k > 0)$ 与 C 分别相交于点 A ， M 与 C 的准线相交于点

N ，若 $|AM| = |MN|$ ，则 $k =$ ()

- A. 3 B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{3}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 3x - 2y + 4 \geq 0, \\ x + 4y + 6 \geq 0, \\ x - 2 \leq 0, \end{cases}$ ，则 $z = x^2 + y^2$ 的最大值为_____.

14. $(x^2 + 2)\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中所有项的系数和为_____，常数项为_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，且 $c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab$ ， $a = 8$ ， $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{3}$ ，则 $c =$ _____.

16. 已知函数 $f(x) = \ln x + x^2$ ，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为_____.

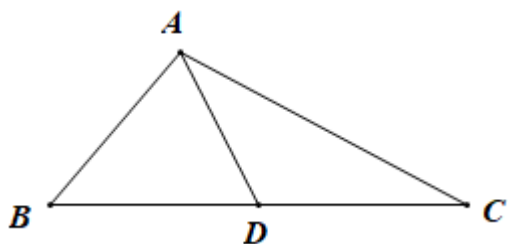
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知曲线 $C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ，直线 $l: \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 2 - 2t, \end{cases}$ (t 为参数)。

(I) 写出曲线 C 的参数方程，直线 l 的普通方程；

(II) 过曲线 C 上任意一点 P 作与 l 夹角为 30° 的直线，交 l 于点 A ， $|PA|$ 的最大值与最小值。

18. (12 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且满足 $a \sin B + b \cos A = c$ ，线段 BC 的中点为 D 。



(I) 求角 B 的大小；

(II) 已知 $\sin C = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，求 $\angle ADB$ 的大小。

19. (12 分) 棉花的纤维长度是评价棉花质量的重要指标，某农科所的专家在土壤环境不同的甲、乙两块实验地分别种植某品种的棉花，为了评价该品种的棉花质量，在棉花成熟后，分别从甲、乙两地的棉花中各随机抽取 21 根棉花纤维进行统计，结果如下表：(记纤维长度不低于 311 mm 的为“长纤维”，其余为“短纤维”)

纤维长度	$(0, 100)$	$[100, 200)$	$[200, 300)$	$[300, 400)$	$[400, 500]$
------	------------	--------------	--------------	--------------	--------------

甲地（根数）	3	4	4	5	4
乙地（根数）	1	1	2	11	6

（1）由以上统计数据，填写下面 2×2 列联表，并判断能否在犯错误概率不超过 1.125 的前提下认为“纤维长度与土壤环境有关系”。

	甲地	乙地	总计
长纤维			
短纤维			
总计			

附：（1） $k^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$ ；

（2）临界值表；

$P(K^2 \geq k_0)$	1. 11	1.15	1.125	1.111	1.115	1.111
k_0	2.716	3.841	5.124	6.635	7.879	11.828

（2）现从上述 41 根纤维中，按纤维长度是否为“长纤维”还是“短纤维”采用分层抽样的方法抽取 8 根进行检测，在这 8 根纤维中，记乙地“短纤维”的根数为 X ，求 X 的分布列及数学期望.

20.（12 分） $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c ,已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2}{3\sin A}$

(1)求 $\sin B \sin C$ ；

(2)若 $6 \cos B \cos C = 1, a = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

21.（12 分）2019 年春节期间，某超市准备举办一次有奖促销活动，若顾客一次消费达到 400 元则可参加一次抽奖活动，超市设计了两种抽奖方案.

方案一：一个不透明的盒子中装有 30 个质地均匀且大小相同的小球，其中 10 个红球，20 个白球，搅拌均匀后，顾客从中随机抽取一个球，若抽到红球则顾客获得 60 元的返金券，若抽到白球则获得 20 元的返金券，且顾客有放回地抽取 3 次.

方案二：一个不透明的盒子中装有 30 个质地均匀且大小相同的小球，其中 10 个红球，20 个白球，搅拌均匀后，顾客从中随机抽取一个球，若抽到红球则顾客获得 80 元的返金券，若抽到白球则未中奖，且顾客有放回地抽取 3 次.

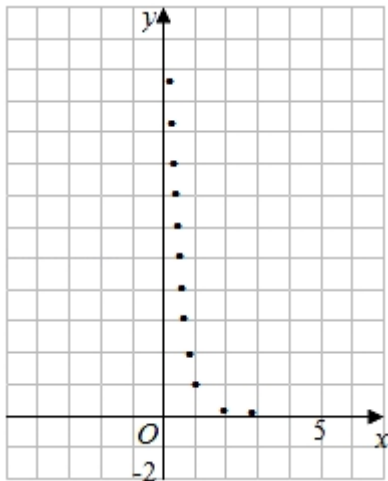
（1）现有两位顾客均获得抽奖机会，且都按方案一抽奖，试求这两位顾客均获得 180 元返金券的概率；

(2) 若某顾客获得抽奖机会.

①试分别计算他选择两种抽奖方案最终获得返金券的数学期望;

②为了吸引顾客消费, 让顾客获得更多金额的返金券, 该超市应选择哪一种抽奖方案进行促销活动?

22. (10 分) 某学生为了测试煤气灶烧水如何节省煤气的问题设计了一个实验, 并获得了煤气开关旋钮旋转的弧度数 x 与烧开一壶水所用时间 y 的一组数据, 且作了一定的数据处理 (如表), 得到了散点图 (如图).



$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{w}$	$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{10} (w_i - \bar{w})^2$	$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^{10} (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$
1.47	20.6	0.78	2.35	0.81	-19.3	16.2

表中 $w_i = \frac{1}{x_i^2}$, $\bar{w} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} w_i$.

(1) 根据散点图判断, $y = a + bx$ 与 $y = c + \frac{d}{x^2}$ 哪一个更适宜作烧水时间 y 关于开关旋钮旋转的弧度数 x 的回归方程类型? (不必说明理由)

(2) 根据判断结果和表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;

(3) 若旋转的弧度数 x 与单位时间内煤气输出量 t 成正比, 那么 x 为多少时, 烧开一壶水最省煤气?

附: 对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归直线 $v = \alpha + \beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计

$$\text{分别为 } \beta = \frac{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})(u_i - \bar{u})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \quad \alpha = \bar{v} - \beta \bar{u}.$$

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

根据函数 $f(x)$ 的奇偶性、单调性、最值和零点对四个结论逐一分析，由此得出正确结论的编号。

【详解】

$f(x)$ 的定义域为 R 。

由于 $f(-x) = f(x)$ ，所以 $f(x)$ 为偶函数，故①正确。

由于 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ， $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ ， $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) < f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ，所以 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上不是单调递增函数，所以②错误。

当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = \sin x + |\cos x| = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$ ，

且存在 $x = \frac{\pi}{4}$ ，使 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \left|\cos \frac{\pi}{4}\right| = \sqrt{2}$ 。

所以当 $x \geq 0$ 时， $f(x) \leq \sqrt{2}$ ；

由于 $f(x)$ 为偶函数，所以 $x \in \mathbf{R}$ 时 $f(x) \leq \sqrt{2}$ ，

所以 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$ ，所以③错误。

依题意， $f(0) = \sin|0| + |\cos 0| = 1$ ，当 $0 < x \leq 2\pi$ 时，

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 或 } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \\ \sin x - \cos x, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases},$$

所以令 $\sin x + \cos x = 0$ ，解得 $x = \frac{7\pi}{4}$ ，令 $\sin x - \cos x = 0$ ，解得 $x = \frac{5\pi}{4}$ 。所以在区间 $(0, 2\pi]$ ， $f(x)$ 有两个零点。

由于 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 0)$ 有两个零点.故 $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 4 个零点.所以④正确.

综上所述，正确的结论序号为①④.

故选：C

【点睛】

本小题主要考查三角函数的奇偶性、单调性、最值和零点，考查化归与转化的数学思想方法，属于中档题.

2、A

【解析】

利用正弦定理边角互化思想结合余弦定理可求得角 B 的值，再利用正弦定理可求得 $b \sin A$ 的值.

【详解】

$$\text{Q } \frac{b+c}{\sin A} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B - \sin C}, \text{ 由正弦定理得 } \frac{b+c}{a} = \frac{a+b}{a+b-c}, \text{ 整理得 } a^2 + c^2 - b^2 = ac,$$

$$\text{由余弦定理得 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}, \text{ Q } 0 < B < \pi, \therefore B = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ 得 } b \sin A = a \sin B = 1 \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查利用正弦定理求值，涉及正弦定理边角互化思想以及余弦定理的应用，考查计算能力，属于中等题.

3、D

【解析】

如图所示：过点 P 作 PN 垂直准线于 N ，交 y 轴于 Q ，则 $|PF| - 1 = |PN| - 1 = |PQ|$ ，设 $P(x, y)$ ， $x > 0$ ，则

$$\frac{|PM|^2}{|PF| - 1} = x + \frac{4}{x}, \text{ 利用均值不等式得到答案.}$$

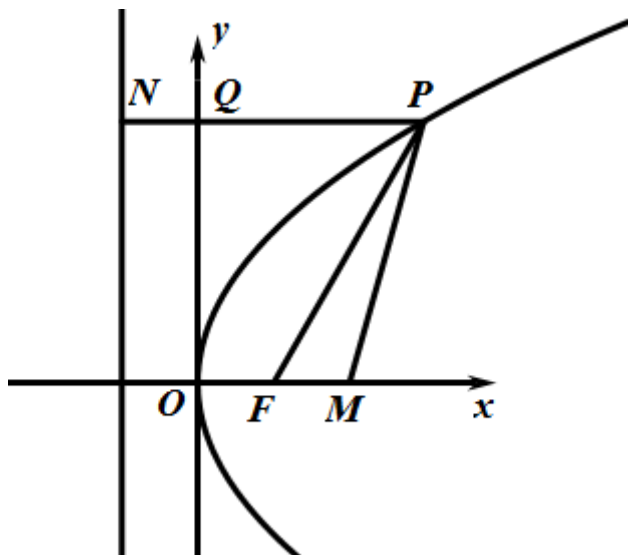
【详解】

如图所示：过点 P 作 PN 垂直准线于 N ，交 y 轴于 Q ，则 $|PF| - 1 = |PN| - 1 = |PQ|$ ，

$$\text{设 } P(x, y), x > 0, \text{ 则 } \frac{|PM|^2}{|PF| - 1} = \frac{|PM|^2}{|PQ|} = \frac{(x-2)^2 + y^2}{x} = \frac{(x-2)^2 + 4x}{x} = x + \frac{4}{x} \geq 4,$$

当 $x = \frac{4}{x}$ ，即 $x = 2$ 时等号成立.

故选：D.



【点睛】

本题考查了抛物线中距离的最值问题，意在考查学生的计算能力和转化能力.

4、D

【解析】

利用等差数列通项公式推导出 $\lambda = \frac{13-18d}{1+9d}$ ，由 $d \in [1, 2]$ ，能求出实数 λ 取最大值.

【详解】

$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， $a_1=1$ ，公差 $d \in [1, 2]$ ，且 $a_4 + \lambda a_{10} + a_{16} = 15$ ，

$\therefore 1 + 3d + \lambda(1 + 9d) + 1 + 15d = 15$ ，解得 $\lambda = \frac{13-18d}{1+9d}$ ，

$\because d \in [1, 2]$ ， $\lambda = \frac{13-18d}{1+9d} = -2 + \frac{15}{1+9d}$ 是减函数，

$\therefore d=1$ 时，实数 λ 取最大值为 $\lambda = \frac{13-18}{1+9} = -\frac{1}{2}$.

故选 D.

【点睛】

本题考查实数值的最大值的求法，考查等差数列的性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

5、B

【解析】

可解出集合 B ，然后进行补集、交集的运算即可.

【详解】

$Q B = \{x | x^2 - 3x < 0\} = (0, 3)$ ， $A = \{x | x < 2\}$ ，则 $\complement_U A = [2, +\infty)$ ，因此， $(\complement_U A) \cap B = [2, 3)$.

故选：B.

【点睛】

本题考查补集和交集的运算，涉及一元二次不等式的求解，考查运算求解能力，属于基础题.

6、A

【解析】

先由三视图确定该四棱锥的底面形状，以及四棱锥的高，再由体积公式即可求出结果.

【详解】

由三视图可知，该四棱锥为斜着放置的四棱锥，四棱锥的底面为直角梯形，上底为1，下底为2，高为2，四棱锥的高为2，

所以该四棱锥的体积为 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (1+2) \times 2 \times 2 = 2$.

故选 A

【点睛】

本题主要考查几何的三视图，由几何体的三视图先还原几何体，再由体积公式即可求解，属于常考题型.

7、B

【解析】

利用换元法化简 $f(x)$ 解析式为二次函数的形式，根据二次函数的性质求得 $f(x)$ 的取值范围，由此求得 $y = [f(x)]$ 的值域.

【详解】

因为 $f(x) = 4^{x-\frac{1}{2}} - 3 \cdot 2^x + 4$ ($0 < x < 2$)，所以 $y = \frac{4^x}{4^{\frac{1}{2}}} - 3 \cdot 2^x + 4 = \frac{1}{2}(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 4$ ，令 $2^x = t$ ($1 < t < 4$)，则

$f(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + 4$ ($1 < t < 4$)，函数的对称轴方程为 $t = 3$ ，所以 $f(t)_{\min} = f(3) = -\frac{1}{2}$ ， $f(t)_{\max} = f(1) = \frac{3}{2}$ ，所以

$f(x) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ，所以 $y = [f(x)]$ 的值域为 $\{-1, 0, 1\}$.

故选：B

【点睛】

本小题考查函数的定义域与值域等基础知识，考查学生分析问题，解决问题的能力，运算求解能力，转化与化归思想，换元思想，分类讨论和应用意识.

8、B

【解析】

设 $|BF_2| = t$ ，则 $|BF_1| = 2a - t$ ， $|AB| = a + t$ ，

因为 $|AF_1| = a$ ，所以 $|AB| > |AF_1|$ ．若 $|AF_1| = |BF_1|$ ，则 $a = 2a - t$ ，所以 $a = t$ ，

所以 $|AF_1| + |BF_1| = |AB| = 2a$ ，不符合题意，所以 $|BF_1| = |AB|$ ，则 $2a - t = a + t$ ，

所以 $a = 2t$ ，所以 $|BF_1| = |AB| = 3t$ ， $|AF_1| = 2t$ ，设 $\angle BAF_1 = 2\theta$ ，则 $e = \sin \theta$ ，

在 $\triangle ABF_1$ 中，易得 $\cos 2\theta = \frac{1}{3}$ ，所以 $1 - 2\sin^2 \theta = \frac{1}{3}$ ，解得 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ （负值舍去），

所以椭圆 Γ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。故选 B。

9、C

【解析】

利用圆心 $(2, 0)$ 到渐近线的距离等于半径即可建立 a, b, c 间的关系。

【详解】

由已知，双曲线的渐近线方程为 $bx \pm ay = 0$ ，故圆心 $(2, 0)$ 到渐近线的距离等于 1，即 $\frac{|2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$ ，

所以 $a^2 = 3b^2$ ， $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查双曲线离心率的求法，求双曲线离心率问题，关键是建立 a, b, c 三者间的方程或不等关系，本题是一道基础题。

10、D

【解析】

根据集合的混合运算，即可容易求得结果。

【详解】

因为 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，故可得 $\complement_U(A \cup B) = \{6\}$ 。

故选：D。

【点睛】

本题考查集合的混合运算，属基础题。

11、B

【解析】

先明确该程序框图的功能是计算两个数的最大公约数，再利用辗转相除法计算即可。

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/098037000040006117>