河南省信阳市新县高级中学2024届高三考前第五次适应性考试

数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．某单位有职工500人，其中男性职工有320人，为了解所有职工的身体健康情况，按性别采用分层抽样的方法抽取100人进行调查，则抽取到的男性职工的人数比女性职工的人数多（　　）

A．28　　B．30　　C．32　　D．36

2．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上顶点为$P$，左焦点为$F$，直线$PF$与$C$的另一个交点为$Q$，若$|PF|=3|QF|$，则$C$的离心率$e=$（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

3．已知$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}\cos 2\alpha$，则$\sin 2\alpha=$（　　）

A．$-\frac{5}{6}$　　B．$-\frac{1}{6}$　　C．$\frac{1}{6}$　　D．$\frac{5}{6}$

4．在菱形$ABCD$中，$AB=2,\angle BAD=60°,E$是BC的中点，F是CD上一点（不与C，D重合），DE与AF交于G，则$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{DG}$的取值范围是（　　）

A．$\left(0,\frac{2}{3}\right)$　　B．$\left(0,\frac{4}{3}\right)$　　C．$(0,2)$　　D．$(0,3)$

5．已知实数a,b分别满足$e^a=1.02$，$\ln(b+1)=0.02$，且$c=\frac{1}{51}$，则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$

C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

6．定义在正整数上的函数满足$f(k+2)=\sqrt{3}f(k+1)-f(k)(k\in\mathrm{N}^*)$，则$f(65)=$（　　）

A．$f(1)$　　B．$f(3)$　　C．$f(5)$　　D．$f(7)$

7．在平面坐标系xOy中，抛物线$y^2=2px$的焦点F与椭圆$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$的左焦点重合，点$A$在抛物线上，且$|AF|=4$，若$P$是抛物线准线上一动点，则$|PO|+|PA|$的最小值为(　)

A．6　　B．$2+4\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{13}$　　D．$4+2\sqrt{5}$

8．以正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的8个顶点中的某4个为顶点可组成一个三棱锥，在所有这些三棱锥中任取一个，则该三棱锥各个面都不为直角三角形的概率为（　）

A．$\dfrac{1}{58}$　　B．$\dfrac{1}{29}$　　C．$\dfrac{2}{29}$　　D．$\dfrac{3}{29}$

二、多选题

9．已知直线$x=\dfrac{\pi}{8}$是函数$f(x)=\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$图象的一条对称轴，则（　）

A．$f\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$是偶函数

B．$x=\dfrac{3\pi}{8}$是$f(x)$图象的一条对称轴

C．$f(x)$在$\left[\dfrac{\pi}{8},\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递减

D．当$x=\dfrac{\pi}{2}$时，函数$f(x)$取得最小值

10．已知$A(2,0)$、$B(4,1)$，点$M(x,y)$为曲线C上动点，则下列结论正确的是（　）

A．若C为抛物线$y^2=8x$，则$\left(|MA|+|MB|\right)_{\min}=2+\sqrt{17}$

B．若C为椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{21}=1$，则$\left(|MA|+|MB|\right)_{\min}=10-\sqrt{37}$

C．若C为双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，则$\left(|MA|+|MB|\right)_{\min}=\sqrt{37}-2$

D．若C为圆$x^2+y^2=1$，则$\left(\dfrac{1}{2}|MA|+|MB|\right)_{\min}=\dfrac{\sqrt{53}}{2}$

11．已知函数$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}\ln x}{x}+\dfrac{x}{\mathrm{e}\ln x+x}$的图象与直线$y=k(k\in\mathbf{R})$有三个交点，记三个交点的横坐标分别为$x_1,x_2,x_3$，且$x_1<x_2<x_3$，则下列说法正确的是（　）

A．存在实数k，使得$x_1=1$

B．$x_3>\mathrm{e}$

C．$k\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$

D．$\left(\dfrac{\ln x_1}{x_1}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2\left(\dfrac{\ln x_2}{x_2}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\left(\dfrac{\ln x_3}{x_3}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$为定值

三、填空题

12．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},0<x<1\\2(x-1),x\geq 1\end{cases}$，若 $f(a)=f(a+1)$，则 $f\left(\frac{1}{a}\right)=$________.

13．已知正三棱锥的各顶点都在表面积为 64π 球面上，正三棱锥体积最大时该正三棱锥的高为_____.

14．已知不等式 $x\ln x-m\ln x\geq x+n$ 对 $\forall x>0$ 恒成立，则当 $\frac{n}{m}$ 取最大值时，$m=$________.

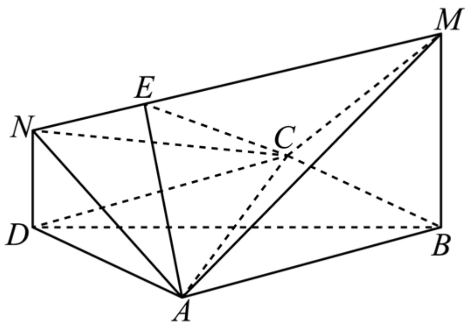
四、解答题

15．已知向量 $\vec{m}=(\cos x,-\sin x)$，$\vec{n}=\left(\cos x,\sin x-2\sqrt{3}\cos x\right)$，$x\in R$．设 $f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2)在 $\triangle ABC$ 中，若 $f(\angle BAC)=1$，$AB=2$，$BC=\sqrt{6}$，$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D，求 AD 长.

16．如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，且 $\angle ABC=60^{\circ}$，$BM\perp$ 平面 $ABCD$，$BM\parallel DN$，$BM=2DN$，点 E 是线段 MN 上任意一点.



(1)证明：平面 $EAC\perp$ 平面 BMND；

(2)若 $\angle AEC$ 的最大值是 $\frac{2\pi}{3}$，求三棱锥 $M-NAC$ 的体积.

17．甲、乙两人组团参加答题挑战赛，规定: 每一轮甲、乙各答一道题，若两人都答对，该团队得 1 分；只有一人答对，该团队得 0 分；两人都答错，该团队得－1 分．假设甲、乙两人答对任何一道题的概率分别为 $\frac{3}{4}$，$\frac{2}{3}$.

(1)记 X 表示该团队一轮答题的得分，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$；

(2)假设该团队连续答题 n 轮，各轮答题相互独立．记 P_n

表示“没有出现连续三轮每轮得 1 分”的概率，$P_n = aP_{n-1} + bP_{n-2} + cP_{n-3}(n \ge 4)$，求 a，b，c；

并证明：答题轮数越多（轮数不少于 3），出现“连续三轮每轮得 1 分”的概率越大.

18．已知 $a > b > 0$，我们称双曲线 $C: \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ 与椭圆 $\tau: \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ 互为“伴随曲线”，点 A 为双曲线 C 和椭圆 τ 的下顶点.

(1)若 B 为椭圆 τ 的上顶点，直线 $y = t(0 < t < a)$ 与 τ 交于 P，Q 两点，证明：直线 AP，BQ 的交点在双曲线 C 上；

(2)过椭圆 τ 的一个焦点且与长轴垂直的弦长为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，双曲线 C 的一条渐近线方程为 $y = \sqrt{3}x$，若 F 为双曲线 C 的上焦点，直线 l 经过 F 且与双曲线 C 上支交于 M，N 两点，记 $\triangle MON$ 的面积为 S，$\angle MON = \theta$（O 为坐标原点），$\triangle AMN$ 的面积为 $3\sqrt{3} + 6$.

（i）求双曲线 C 的方程；

（ii）证明：$2S\cos\theta = 17\sin\theta$.

19．已知 $Q: a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为有穷正整数数列，且 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_k$，集合 $X = \{-1, 0, 1\}$．若存在 $x_i \in X, i = 1, 2, \cdots, k$，使得 $x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ka_k = t$，则称 t 为 $k-$可表数，称集合

$T = \{t \mid t = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ka_k, x_i \in X, i = 1, 2, \cdots, k\}$ 为 $k-$可表集.

(1)若 $k = 10, a_i = 2^{i-1}, i = 1, 2, \cdots, k$，判定 31，1024 是否为 $k-$可表数，并说明理由；

(2)若 $\{1, 2, \cdots, n\} \subseteq T$，证明：$n \le \dfrac{3^k - 1}{2}$；

(3)设 $a_i = 3^{i-1}, i = 1, 2, \cdots, k$，若 $\{1, 2, \cdots, 2024\} \subseteq T$，求 k 的最小值.

参考答案：

1．A

【分析】根据抽样比即可求解.

【详解】由题意可知抽取到的男性职工人数为$320\times\frac{100}{500}=64$，女性职工人数为$100-64=36$，则抽取到的男性职工的人数比女性职工的人数多$64-36=28$.

故选：A

2．D

【分析】根据给定条件求出Q的坐标，代入椭圆方程即可求解.

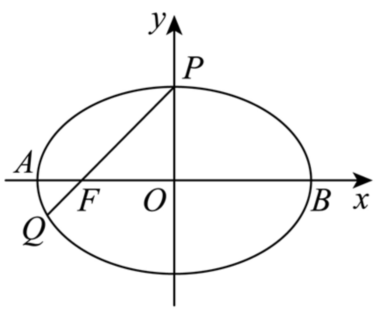
【详解】由题意可得$P(0,b),F(-c,0)$，

由于$|PF|=3|QF|$，所以$y_Q=-\frac{1}{3}b,x_Q=-\frac{4}{3}c$，

由于Q在椭圆上，所以$\frac{\left(-\frac{4}{3}c\right)^2}{a^2}+\frac{\left(-\frac{1}{3}b\right)^2}{b^2}=1$，化简可得$\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow e^2=\frac{1}{2}$，

由于$0<e<1$，故$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故选：D



3．D

【分析】由两角差的余弦公式结合二倍角的余弦公式化简可得出$\cos\alpha-\sin\alpha$的值，再利用$(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-\sin2\alpha$可求得$\sin2\alpha$的值.

【详解】因为$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$，所以，$\sin\alpha+\cos\alpha>0$，

由$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}\cos2\alpha$可得

$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)=\sqrt{3}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\sqrt{3}(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)$，

所以，$\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

所以，$\left(\cos\alpha-\sin\alpha\right)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\sin2\alpha=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)^2=\dfrac{1}{6}$，故$\sin2\alpha=\dfrac{5}{6}$.

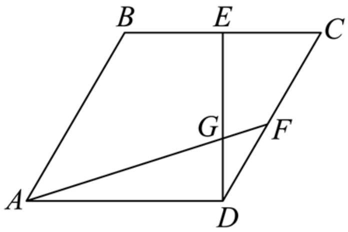
故选：D.

4．B

【分析】由图可求得$DG\in(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$，根据向量积即可知$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{DG}=\left|\overrightarrow{DG}\right|^2\in(0,\dfrac{4}{3})$.

【详解】如图所示：当点F与点C重合时，此时DG最长，

易知$\triangle ADG\backsim\triangle CEG$，且相似比为$2:1$，



$\angle BAD=\angle DCB=60°$，在$\triangle DCE$中，由余弦定理得：

$DE^2=DC^2+CE^2-2DC\times CE\times\cos60°=3$，

所以$DE=\sqrt{3}$，此时满足$DE^2+CE^2=DC^2$，所以$DE\perp CE$，

所以$\angle ADE=90°$，此时$DG=\dfrac{2}{3}DE=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

由图可知，$DG\in(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$，

则$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{DG}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG})\cdot\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{DG}^2=\left|\overrightarrow{DG}\right|^2\in(0,\dfrac{4}{3})$.

故选：B.

5．D

【分析】由题意可得$a=\ln1.02$，$b=\mathrm{e}^{0.02}-1$，构造函数$f\left(x\right)=\ln x-\dfrac{2\left(x-1\right)}{x+1}$，结合导数研究函数单调性后可得$a>c$，构造函数$g\left(x\right)=\mathrm{e}^x-\ln\left(1+x\right)-1$，结合导数研究函数单调性后可得$b>a$，即可得出$c<a<b$.

【详解】由$\mathrm{e}^a=1.02$，则$a=\ln1.02$，令$f\left(x\right)=\ln x-\dfrac{2\left(x-1\right)}{x+1}$，$x>1$，

则$f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2\left(x+1\right)-2\left(x-1\right)}{\left(x+1\right)^2}=\dfrac{\left(x-1\right)^2}{x\left(x+1\right)^2}$，

则当$x>1$时，$f'\left(x\right)>0$，故$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，

故$f\left(1.02\right)=\ln1.02-\dfrac{2\left(1.02-1\right)}{1.02+1}=\ln1.02-\dfrac{2}{101}>f\left(1\right)=0$，

即$a=\ln 1.02>\frac{2}{101}>\frac{2}{102}=\frac{1}{51}=c$，即$a>c$，

由$\ln\left(b+1\right)=0.02$，则$b=\mathrm{e}^{0.02}-1$，

令$g\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\ln\left(1+x\right)-1$，$x>0$，则$g'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{x+1}$，

令$h\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{x+1}$，则当$x>0$时，$h'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{\left(x+1\right)^{2}}>0$恒成立，

故$g'\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，又$g'\left(0\right)=\mathrm{e}^{0}-\frac{1}{1}=0$，故$g'\left(x\right)>0$恒成立，

故$g\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，故$g\left(0.02\right)=\mathrm{e}^{0.02}-\ln\left(1+0.02\right)-1>g\left(0\right)=0$，

即$\mathrm{e}^{0.02}-1>\ln 1.02$，即$b>a$，故$c<a<b$.

故选：D.

【点睛】关键点点睛：本题关键在于构造函数$f\left(x\right)=\ln x-\frac{2\left(x-1\right)}{x+1}$、$g\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\ln\left(1+x\right)-1$，从而借助导数求出函数单调性以比较$a$、$b$、$c$的大小.

6．C

【分析】由已知结合换元法求出函数的周期$T=12$，进而得解.

【详解】$\because f\left(k+2\right)=\sqrt{3}f\left(k+1\right)-f\left(k\right)\left(k\in\mathrm{N}^{*}\right)$①

$\therefore f\left(k+3\right)=\sqrt{3}f\left(k+2\right)-f\left(k+1\right)=\sqrt{3}\left[\sqrt{3}f\left(k+1\right)-f\left(k\right)\right]-f\left(k+1\right)=2f\left(k+1\right)-\sqrt{3}f\left(k\right)$

$\therefore f\left(k+4\right)=2f\left(k+2\right)-\sqrt{3}f\left(k+1\right)=2\left[\sqrt{3}f\left(k+1\right)-f\left(k\right)\right]-\sqrt{3}f\left(k+1\right)$

$=\sqrt{3}f\left(k+1\right)-2f\left(k\right)$②

由①②可得$f\left(k+4\right)=f\left(k+2\right)-f\left(k\right)$

$\therefore f\left(k+6\right)=f\left(k+4\right)-f\left(k+2\right)=-f\left(k\right)$，$\therefore f\left(k+12\right)=-f\left(k+6\right)=f\left(k\right)$

所以函数的周期$T=12$，$f\left(65\right)=f\left(12\times5+5\right)=f\left(5\right)$

故选：C

7．C

【分析】确定抛物线方程，利用抛物线的定义由$\left|AF\right|=4$得到A到准线的距离为4，即可求出点A的坐标，根据$\left|PO\right|+\left|PA\right|$

相当于在准线上找一点，使得它到两个定点的距离之和最小，最后利用平面几何的方法即可求出距离之和的最小值.

【详解】因为椭圆$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$的左焦点为$(-2,0)$，

所以抛物线的方程为$y^2=-8x$，其准线为$l:x=2$，

设点A的横坐标为a，则根据抛物线的定义知$|AF|=2-a=4$，

所以$a=-2$，进而点$A(-2,4)$，坐标原点O关于准线对称的点为$B(4,0)$，

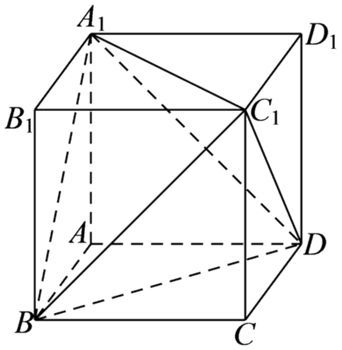
所以$|PA|+|PO|$的最小值为$|AB|=\sqrt{(-2-4)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{13}$.

故选：C

8．B

【分析】找出各面都不是直角三角形的三棱锥，并求出全部三棱锥的个数，结合古典概型的概率公式可求得所求事件的概率.

【详解】如下图所示：



三棱锥C_1-A_1BD各面都是等边三角形，这样的三棱锥还有三棱锥$A-CB_1D_1$，共2个，

从正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的8个顶点中的某4个为顶点可组成一个三棱锥，

从8个顶点中任取三点不共线，若取4个点，若这四点共面，则四点所在的面是正方体的侧面或底面，

或者是正方体的对角面，如面AA_1C_1C，对角面的个数为6个，

所以，从正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的8个顶点中的某4个为顶点可组成一个三棱锥，

不同的三棱锥的个数为$\mathrm{C}_8^4-12=70-12=58$，

因此，在所有这些三棱锥中任取一个，则该三棱锥各个面都不为直角三角形的概率为

$\frac{2}{58}=\frac{1}{29}$.

故选：B.

9．AC

【分析】根据$x=\frac{\pi}{8}$为图象的对称轴，求出$\varphi=\frac{\pi}{4}$，从而得到$f\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\cos 2x$，得到A正确;整体法求解函数的对称轴方程，判断B选项；代入检验函数是否在$\left[\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减；代入$x=\frac{\pi}{2}$求出$\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，D错误.

【详解】因为直线$x=\frac{\pi}{8}$是函数$f(x)=\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$图象的一条对称轴，

所以$2\times\frac{\pi}{8}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

又$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\frac{\pi}{4}$，所以$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

$f\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$，是偶函数，故A正确；

令$2x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得:$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$，

所以$f(x)$图象的对称轴方程为$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$，而$x=\frac{3\pi}{8}$不能满足上式，故B错误；

当$x\in\left[\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}\right]$，此时函数$f(x)$单调递减，故C正确；

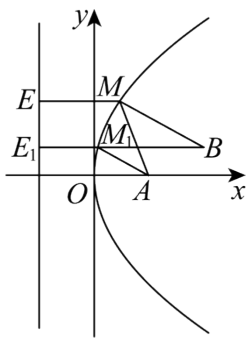
显然函数$f(x)$的最小值为-1，当$x=\frac{\pi}{2}$时，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，故D错误.

故选：AC.

10．BCD

【分析】利用抛物线的定义以及数形结合可判断A选项；利用椭圆的定义以及数形结合可判断B选项；利用双曲线的定义以及数形结合可判断C选项；利用圆的方程以及数形结合可判断D选项.

【详解】对于A选项，如下图所示：



抛物线$y^2=8x$的焦点为$A(2,0)$，准线方程为$x=-2$，

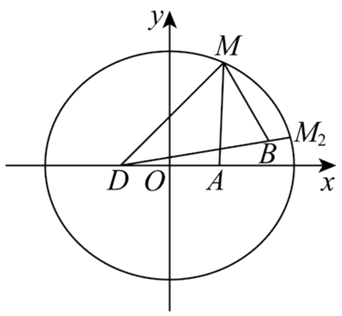
设点M在直线$x=-2$上的射影点为E，由抛物线的定义可得$|ME|=|MA|$，

所以，$|MA|+|MB|=|ME|+|MB|$，

由图可知，当E、M、B三点共线时，$|MA|+|MB|=|ME|+|MB|$取最小值，

且其最小值为点B到直线$x=-2$的距离，即$(|MA|+|MB|)_{\min}=6$，A 错；

对于 B 选项，如下图所示：



对于椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$，$a=5$，$b=\sqrt{21}$，则$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-21}=2$，

则点 A 为椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$的右焦点，取$D(-2,0)$为该椭圆的左焦点，

由椭圆的定义可得$|MA|=2a-|MD|=10-|MD|$，

所以，$|MA|+|MB|=10+|MB|-|MD|\geq 10-|BD|=10-\sqrt{(4+2)^2+1}=10-\sqrt{37}$，

当且仅当M为射线DB与椭圆的交点时，$|MA|+|MB|$取最小值$10-\sqrt{37}$，B 对；

对于 C 选项，对于双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$，$a=1$，$b=\sqrt{3}$，则$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+3}=2$，

所以，点$A(2,0)$为双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$的右焦点，

取$D(-2,0)$为双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$的右焦点，如下图所示：