考点 8.4　直线、平面垂直的判定与性质

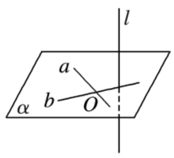
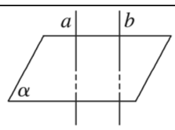
考点梳理

1．直线与平面垂直

(1)定义

假如直线 l 与平面 α 内的随意一条直线都垂直，则直线 l 与平面 α 相互垂直，记作 $l\perp\alpha$，直线 l 叫做平面 α 的垂线，平面 α 叫做直线 l 的垂面．

(2)判定定理与性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直		$\left.\begin{matrix}a,\ b\subset\alpha\\ a\cap b=O\\ l\perp a\\ l\perp b\end{matrix}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha$
性质定理	垂直于同一个平面的两条直线平行		$\left.\begin{matrix}a\perp\alpha\\ b\perp\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel b$

2.直线和平面所成的角

(1)定义

平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角．若一条直线垂直于平面，它们所成的角是直角，若一条直线和平面平行，或在平面内，它们所成的角是 $0°$ 的角．

(2)范围：$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$．

3．平面与平面垂直

(1)二面角的有关概念

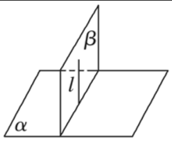
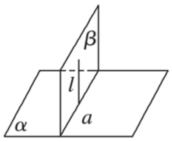
①二面角：从一条直线动身的两个半平面所组成的图形叫做二面角；

②二面角的平面角：在二面角的棱上任取一点，以该点为垂足，在两个半平面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所构成的角叫做二面角的平面角．

(2)平面和平面垂直的定义

两个平面相交，假如它们所成的二面角是直二面角，就说这两个平面相互垂直．

(3)平面与平面垂直的判定定理与性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	一个平面过另一个平面的<u>垂线</u>，则这两个平面垂直		$\left.\begin{array}{l} l\perp\alpha \\ l\subset\beta \end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\perp\beta$
性质定理	两个平面垂直，则一个平面内垂直于<u>交线</u>的直线与另一个平面垂直		$\left.\begin{array}{l} \alpha\perp\beta \\ l\subset\beta \\ \alpha\cap\beta=a \\ l\perp a \end{array}\right\}\Rightarrow$ $l\perp\alpha$

【概念方法微思索】

1．若两平行线中的一条垂直于一个平面，则另一条也垂直于这个平面吗？

提示　垂直．若两平行线中的一条垂直于一个平面，那么在平面内可以找到两条相交直线与该直线垂直，依据异面直线所成的角，可以得出两平行直线中的另一条也与平面内的那两条直线成 90° 的角，即垂直于平面内的这两条相交直线，所以垂直于这个平面．

2．两个相交平面同时垂直于第三个平面，它们的交线也垂直于第三个平面吗？

提示　垂直．在两个相交平面内分别作与第三个平面交线垂直的直线，则这两条直线都垂直于第三个平面，那么这两条直线相互平行．由线面平行的性质定理可知，这两个相交平面的交线与这两条垂线平行，所以该交线垂直于第三个平面．

真题演练

1．（2024•新课标III）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 CD 的中点，则(　　)

A．$A_1E\perp DC_1$　　B．$A_1E\perp BD$　　C．$A_1E\perp BC_1$　　D．$A_1E\perp AC$

【答案】C

【解析】法一：连 B_1C，由题意得 $BC_1\perp B_1C$，

$\because A_1B_1\perp$ 平面 B_1BCC_1，且 $BC_1\subset$ 平面 B_1BCC_1，

$\therefore A_1B_1\perp BC_1$，

$\because A_1B_1\cap B_1C=B_1$，

$\therefore BC_1\perp$ 平面 A_1ECB_1，

$\because A_1E\subset$ 平面 A_1ECB_1，

$\therefore A_1E \perp BC_1$.

故选 C.

法二：以 D 为原点，DA 为 x 轴，DC 为 y 轴，DD_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中棱长为 2，

则 $A_1(2,0,2)$，$E(0,1,0)$，$B(2,2,0)$，$D(0,0,0)$，$C_1(0,2,2)$，$A(2,0,0)$，

$C(0,2,0)$，

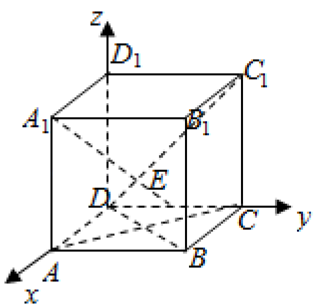
$\overrightarrow{A_1E}=(-2,1,-2)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,-2,0)$，

$\overrightarrow{BC_1}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，

$\because \overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{DC_1}=-2$，$\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{BD}=2$，$\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$，$\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{AC}=6$，

$\therefore A_1E \perp BC_1$.

故选 C.



2．（2024•浙江）已知相互垂直的平面 α，β 交于直线 l，若直线 m，n 满意 $m//\alpha$，$n\perp\beta$，则( )

A．$m//l$　　B．$m//n$　　C．$n\perp l$　　D．$m\perp n$

【答案】C

【解析】$\because$ 相互垂直的平面 α，β 交于直线 l，直线 m，n 满意 $m//\alpha$，

$\therefore m//\beta$ 或 $m\subset\beta$ 或 m 与 β 相交，$l\subset\beta$，

$\because n\perp\beta$，

$\therefore n\perp l$.

故选 C.

3．（2024•北京）已知l，m是平面α外的两条不同直线．给出下列三个论断：

①$l\perp m$；②$m//\alpha$；③$l\perp\alpha$．

以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：__________．

【答案】若$l\perp\alpha$，$l\perp m$，则$m//\alpha$．（或若$l\perp\alpha$，$m//\alpha$，则$l\perp m$)

【解析】由l，m是平面α外的两条不同直线，知：

由线面平行的判定定理得：

若$l\perp\alpha$，$l\perp m$，则$m//\alpha$．

若$l\perp\alpha$，$m//\alpha$，则由线面垂直的性质和线面平行的性质得$l\perp m$，

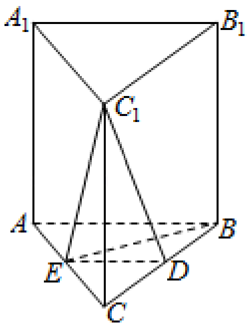
$\therefore$若$l\perp\alpha$，$m//\alpha$，则$l\perp m$

故答案为：若$l\perp\alpha$，$l\perp m$，则$m//\alpha$．（或若$l\perp\alpha$，$m//\alpha$，则$l\perp m$)．

4．（2024•江苏）如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D，E分别为BC，AC的中点，$AB=BC$．求证：

（1）$A_1B_1//$平面DEC_1；

（2）$BE\perp C_1E$．



【解析】（1）$\because$在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D，E分别为BC，AC的中点，

$\therefore DE//AB$，$AB//A_1B_1$，$\therefore DE//A_1B_1$，

$\because DE\subset$平面DEC_1，$A_1B_1\not\subset$平面DEC_1，

$\therefore A_1B_1//$平面DEC_1．

解：（2）$\because$在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，E是AC的中点，$AB=BC$．

$\therefore BE\perp AC$，

$\because$直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp$平面ABC，$BE\subset$平面ABC，