

特训 02 比较大小的六大技巧（五大题型）

方法归纳



技巧一：构造函数法

根据题目所给数的特点，寻求某个函数作为模型，然后将各数统一到一个模型中，利用函数的单调性比较大小。

技巧二：中间量法

技法归纳

当两个数或式直接比较大小比较困难时，我们可以尝试引用中间量辅助判断. 中间量是一种辅助手段，选取的中间量也是因题而异，要多观察题目本身的特点，经过适当的转化，找到恰当的中间量，完成判断.

技巧三：图像法

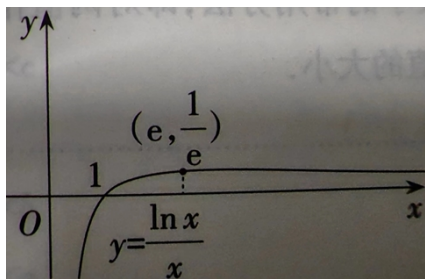
在同一个坐标系中画出两函数的图像，确定图像的交点，在相邻两个交点之间观察图像的高低，进而确定函数值的大小。

技巧四：特值法

根据题意巧赋特值可快速比较大小；特殊值法是解决一些客观题的重要法宝。

技巧五：函数模型法

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的图像如图所所示



(1) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在区间 $(0, e)$ 上单调递增，在区间 $(e, +\infty)$ 上单调递减；当 $x=e$ 时，取得最大值 $\frac{1}{e}$ 。

(2) $f(2)=f(4)$

(3) a^b 与 b^a ($a>b>0$) 的大小关系：当 $e>a>b>0$ 时， $a^b > b^a$ ；当 $a>b>e$ 时， $a^b < b^a$ 。

记忆口诀：大指小底（大于 e 看指数，小于 e 看底数）

技巧六：作差（商）法

题型归纳



目录：

● 题型01 混合式的大小比较、利用函数的单调性比较大小

● 题型02 对数式的大小比较、利用函数的单调性比较大小

● 题型03 构造函数、利用导数比较大小

● 题型04 利用导数，函数的单调性、奇偶性、对称性比较大小

● 题型05 不等式与利用函数性质比较大小比较综合

● 题型01 混合式的大小比较、利用函数的单调性比较大小

1. (2024·天津·一模) 已知 $a = 3^{0.3}$, $b = \log_4 3$, $c = \left(\frac{1}{2}\right)^{-0.3}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

A. $b < a < c$

B. $b < c < a$

C. $c < a < b$

D. $a < c < b$

【答案】B

【分析】由幂函数和对数函数的单调性即可得出答案.

【解析】因为 $0 = \log_4 1 < b = \log_4 3 < \log_4 4 = 1$,

$$c = \left(\frac{1}{2}\right)^{-0.3} = 2^{0.3} > 1, \quad a = 3^{0.3} > 1,$$

因为 $y = x^{0.3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $2^{0.3} < 3^{0.3}$, 所以 $b < c < a$.

故选: B.

2. (2024·安徽·三模) 若 $a = \log_3 7$, $b = \log_9 40$, $c = \sqrt{4.05}$, 则 ()

A. $c < a < b$

B. $b < c < a$

C. $a < b < c$

D. $b < a < c$

【答案】D

【分析】根据对数函数的性质 $a = \log_3 7 = \log_9 49$, 可比较 a, b , 然后 a, c 再与 2 比较大小, 可得结果.

【解析】依题意， $a = \log_3 7 = \log_9 49$ ，故 $a > b$ ；而 $a < \log_3 9 = 2 < c$ ，

故 $b < a < c$ ，

故选：D.

3. (2024·山东潍坊·二模) 已知 $a = e^{-1}$ ， $b = \lg a$ ， $c = e^0$ ，则 ()

A. $b < a < c$

B. $b < c < a$

C. $a < b < c$

D. $c < b < a$

【答案】A

【分析】根据对数函数和指数函数单调性并结合中间量 0 和 1 即可比较大小.

【解析】 $a = e^{-1} \in (0, 1)$ ， $b = \lg a = \lg e^{-1} = -\lg e < 0$ ， $c = e^0 = 1$ ，

所以 $b < a < c$ ，

故选：A.

4. (2024·宁夏银川·三模) 已知 $a = 0.2^{0.5}$ ， $b = \cos 2$ ， $c = \lg 15$ ，则 ()

A. $a < b < c$

B. $c < a < b$

C. $b < c < a$

D. $b < a < c$

【答案】D

【分析】根据 $f(x) = \lg x$ ， $g(x) = 0.2^x$ ， $h(x) = \cos x$ 的单调性，分别判断 a, b, c 的大概范围，即可得出大小.

【解析】由题知 $a = 0.2^{0.5}$ ， $b = \cos 2$ ， $c = \lg 15$ ，因为 $f(x) = \lg x$ 在定义域内单调递增，

所以 $f(15) > f(10)$ ，即 $c = \lg 15 > \lg 10 = 1$ ，

因为 $g(x) = 0.2^x$ 在定义域内单调递减，所以 $g\left(\frac{1}{2}\right) < g(0)$ ，即 $0 < a = 0.2^{0.5} < 0.2^0 = 1$ ，

因为 $h(x) = \cos x$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减，所以 $h(2) < h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ，即 $b = \cos 2 < \cos \frac{\pi}{2} = 0$ ，

综上： $b < 0 < a < 1 < c$ 。

故选：D

5. (2024·山东聊城·三模) 设 $a = \log_4 9$ ， $b = \log_2 5$ ， $c = 3^{1-\log_3 4}$ ，则 a, b, c 的大小关系为 ()

A. $b > a > c$

B. $b > c > a$

C. $a > b > c$

D. $c > b > a$

【答案】A

【分析】根据对数运算性质及对数函数单调性比较大小即可.

【解析】因为函数 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

故 $b = \log_2 5 > \log_2 3 = \log_4 9 = a > \log_2 2 = 1$,

又 $c = 3^{1-\log_3 4} = 3^{\log_3 3 - \log_3 4} = 3^{\log_3 \frac{3}{4}} = \frac{3}{4} < 1$,

所以 $b > a > 1 > c$.

故选: A

● 题型02 对数式的大小比较、利用函数的单调性比较大小

6. (2024·内蒙古呼和浩特·二模) 设 $a = \log_6 15$, $b = \log_8 20$, $c = \log_{2012} 2024$, 则 a 、 b 、 c 的大小关系为

()

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $b < a < c$

D. $c < b < a$

【答案】D

【分析】利用对数的性质, 结合对数函数的单调性求解.

【解析】 $a = \log_6 15 = \log_6 \left(\frac{15}{6} \times 6 \right) = \log_6 \frac{5}{2} + 1$,

$b = \log_8 20 = \log_8 \left(\frac{20}{8} \times 8 \right) = \log_8 \frac{5}{2} + 1$,

$c = \log_{2012} 2024 = \log_{2012} \left(\frac{2024}{2012} \times 2012 \right) = \log_{2012} \frac{506}{503} + 1$,

因为 $\log_6 \frac{5}{2} > \log_8 \frac{5}{2}$, 所以 $a > b$,

因为 $\log_8 \frac{5}{2} > \log_8 2 = \frac{1}{3}$,

$\log_{2012} \frac{506}{503} < \log_{2012} 10 = \log_{2012} 1000^{\frac{1}{3}} < \log_{2012} 2012^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$,

所以 $b > c$,

所以 $c < b < a$.

故选: D.

7. (23-24 高三下·陕西西安·阶段练习) 已知 $a = \log_4 2$, $b = \log_5 3$, $c = (\log_4 2)(\log_5 3)$, 则 a , b , c 的大

小关系为 ()

A. $c > a > b$

B. $c > b > a$

C. $a > b > c$

D. $b > a > c$

【答案】D

【分析】根据对数运算得 $a = \frac{1}{2}$, 利用对数函数的单调性得 $a < b$, 根据不等式的性质可得 $a > c$, 从而可得结果.

【解析】因为 $a = \log_4 2 = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, $b = \log_5 3 > \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$, $\therefore a < b$,

因为 $0 < \log_5 3 < 1$, $\therefore c = (\log_4 2)(\log_5 3) < \log_4 2 = a$,

$\therefore b > a > c$.

故选: D.

8. (20-21 高三上·广西·阶段练习) 已知实数 a, b 满足 $\log_{\frac{1}{2}} a = \log_{\frac{1}{3}} b$, 下列五个关系式: ① $a > b > 1$, ② $0 < b < a < 1$, ③ $b > a > 1$, ④ $0 < a < b < 1$, ⑤ $a = b$. 其中不可能成立的关系式有_____个.

【答案】2

【解析】设 $\log_{\frac{1}{2}} a = \log_{\frac{1}{3}} b = t$, 可得出 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^t$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^t$, 分 $t < 0$ 、 $t = 0$ 、 $t > 0$ 三种情况讨论, 利用幂函数 $y = x^t$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性可得出结论.

【解析】设 $\log_{\frac{1}{2}} a = \log_{\frac{1}{3}} b = t$, 可得 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^t$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^t$.

(1) 当 $t < 0$ 时, 由于幂函数 $y = x^t$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 则 $\left(\frac{1}{3}\right)^t > \left(\frac{1}{2}\right)^t > 1^{t'} = 1$, 即 $b > a > 1$, ③成立;

(2) 当 $t = 0$ 时, 则 $a = b = 1$, ⑤成立;

(3) 当 $t > 0$ 时, 由于幂函数 $y = x^t$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 则 $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^t < \left(\frac{1}{2}\right)^t < 1^{t'} = 1$,

即 $0 < b < a < 1$, ②成立.

因此, 不可能成立的为①④.

故答案为: 2.

【点睛】本题考查利用幂函数的单调性比较大小, 同时也考查了对数式与指数式相互转化, 属于中等题.

9. (2024·四川成都·二模) 若 $a = \ln^2 6$, $b = 4 \ln 2 \cdot \ln 3$, $c = (1 + \ln 3)^2$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

A. $c < a < b$

B. $a < b < c$

C. $c < b < a$

D. $b < a < c$

【答案】D

【分析】做差法比较 a, b 的大小, 利用对数的性质比较 a, c 的大小.

【解析】 $a = \ln^2 6 = (\ln 2 + \ln 3)^2$, $c = (\ln e + \ln 3)^2$

因为 $\ln 2 + \ln 3 < \ln e + \ln 3$ ，所以 $(\ln 2 + \ln 3)^2 < (\ln e + \ln 3)^2$ ，即 $a < c$ ，

$$a = \ln^2 6 = (\ln 2 + \ln 3)^2, \quad b = 4 \ln 2 \cdot \ln 3,$$

$$\text{则 } a - b = (\ln 2 + \ln 3)^2 - 4 \ln 2 \cdot \ln 3 = (\ln 2 - \ln 3)^2 > 0, \text{ 即 } b < a,$$

所以 $b < a < c$ 。

故选：D。

● 题型03 构造函数、利用导数比较大小

10. (23-24 高二下·湖南衡阳·期中) 已知 $a = 4\ln 3^\pi, b = 3\pi, c = 4\ln \pi^3$ ，则 a, b, c 的大小关系是 ()

A. $c < b < a$

B. $c < a < b$

C. $b < c < a$

D. $a < b < c$

【答案】C

【分析】观察 a, c 的式子结构，构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，利用导数判断 $f(x)$ 的单调性，从而得到 $c < a$ ，再利用对数函数的单调性判断出 $b < c$ ，从而得解。

【解析】因为 $a = 4\ln 3^\pi = 4\pi \ln 3, b = 3\pi, c = 4\ln \pi^3 = 4 \times 3 \ln \pi$ ，

$$\frac{a}{12\pi} = \frac{\ln 3}{3}, \frac{c}{12\pi} = \frac{\ln \pi}{\pi}, \text{ 构造函数 } f(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ 则 } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

当 $x \in (0, e)$ 时， $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增，

当 $x \in (e, +\infty)$ 时， $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减，

因为 $\pi > 3 > e$ ，所以 $f(\pi) < f(3)$ ，即 $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln 3}{3}$ ，即 $\frac{c}{12\pi} < \frac{a}{12\pi}$ ，所以 $c < a$ ；

又 $\ln \pi > \ln e = 1$ ，所以 $3\pi < 3 \times 4 < 4 \times 3 \ln \pi$ ，即 $b < c$ 。

综上， $b < c < a$ 。

故选：C。

11. (2023·辽宁抚顺·模拟预测) 已知 $2^a = 3, 3^b = 4, c = \frac{\ln a - \ln b}{a - b}$ ，则在 $\log_a b, \log_a c, \log_b a, \log_b c,$

$\log_c a, \log_c b$ 这 6 个数中，值最小的是_____。

【答案】 $\log_b c$

【分析】首先利用对数的性质得到 $\frac{5}{4} < b < \frac{3}{2} < a < \frac{7}{4}$ 且 $ab = 2$ ，构造 $y = \ln \frac{a}{b} - \frac{\frac{a}{b} - 1}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$ 并利用导数研究其在

$(1, +\infty)$ 上的单调性可得 $\frac{\ln a - \ln b}{a - b} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$ ，进而有 $0 < c < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{5}{4} < b < \frac{3}{2} < a < \frac{7}{4}$ ，结合 6 个数的正负只需判断 $\log_c a$ 、 $\log_b c$ 大小，作商法 $\frac{\log_c a}{\log_b c} = \log_c a \times \log_c 2 - \log_c^2 a$ 判断与 1 的大小关系，即可得答案。

【解析】由 $\log_3 \sqrt[4]{243} = \frac{5}{4} < b = \log_3 4 < \log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2} = \log_2 \sqrt{8} < a = \log_2 3 < \log_2 \sqrt[4]{128} = \frac{7}{4}$ ，

且 $ab = \log_2 3 \times \log_3 4 = \log_2 3 \times \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = 2$ ，

所以 $\frac{5}{4} < b < \frac{3}{2} < a < \frac{7}{4}$ ，故 $\frac{a}{b} > 1$ ，

构造 $y = \ln \frac{a}{b} - \frac{\frac{a}{b} - 1}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$ ，令 $t = \sqrt{\frac{a}{b}} \in (1, +\infty)$ ，则 $f(t) = 2 \ln t - t + \frac{1}{t}$ ，则 $f'(t) = \frac{2}{t} - 1 - \frac{1}{t^2} = -\frac{(t-1)^2}{t^2} < 0$ ，

所以 $f(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递减，故 $f(t) < f(1) = 0$ ，故 $\ln \frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b} - 1}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$ ，即 $\frac{\ln a - \ln b}{a - b} < \frac{1}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ；

综上， $0 < c < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{5}{4} < b < \frac{3}{2} < a < \frac{7}{4}$ ，

6 个数中，正数有 $\log_a b$ 、 $\log_b a$ ，负数有 $\log_c a < \log_c b < 0$ 、 $0 > \log_a c = \frac{1}{\log_c a} > \log_b c = \frac{1}{\log_c b}$ ，

所以只需比较 $\log_c a$ 、 $\log_b c$ 大小，又 $\frac{\log_c a}{\log_b c} = \log_c a \log_c b$ ，而 $\log_c b = \log_c \frac{2}{a} = \log_c 2 - \log_c a$ ，

所以 $\frac{\log_c a}{\log_b c} = \log_c a \times \log_c 2 - \log_c^2 a = -(\log_c a - \log_c \sqrt{2})^2 + \frac{\log_c^2 2}{4} < \frac{\log_c^2 2}{4} = \log_c^2 \sqrt{2}$ ，

由 $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{2} = -1 < \log_c \sqrt{2} < 0$ ，故 $\log_c^2 \sqrt{2} < 1$ ，即 $0 < \frac{\log_c a}{\log_b c} < 1$ ， $\log_c a > \log_b c$ 。

综上，值最小的是 $\log_b c$ 。

故答案为： $\log_b c$

【点睛】关键点睛：由对数的性质得到 $\frac{5}{4} < b < \frac{3}{2} < a < \frac{7}{4}$ 且 $ab = 2$ ，利用对数均值不等式确定 $c = \frac{\ln a - \ln b}{a - b}$

的范围，结合不等式性质找到最小数。

12. (23-24 高三上·河北·期末) 已知 $\sin a + 2^a = \sin b + 3^b = 2$ ，则 ()

A. $blga > algb > blgb$

B. $blga > blgb > algb$

C. $algb > blga > blgb$

D. $algb > blgb > blga$

【答案】B

【分析】由题意构造 $f(x) = \sin x + 2^x$, $g(x) = \sin x + 3^x$, 结合 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系与单调性得 $0 < b < a < 1$, 从而利用对数函数的单调性和运算性质得到答案.

【解析】令 $f(x) = \sin x + 2^x$, $g(x) = \sin x + 3^x$,

当 $x > 0$ 时, $g(x) > f(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时, $g(x) < f(x) < 2$.

在 $(0, +\infty)$ 上 $f'(x) = \cos x + 2^x \ln 2 > 0$, $g'(x) = \cos x + 3^x \ln 3 > 0$,

所以 $f(x)$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上均单调递增,

由 $\sin a + 2^a = \sin b + 3^b = 2$, 即 $f(a) = g(b) = 2$ 可得 $0 < b < a < 1$,

因为幂函数 $y = x^b$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $a^b > b^b$,

指数函数 $y = b^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以 $b^b > b^a$,

综上所述, $a^b > b^b > b^a$.

又因为对数函数 $y = \lg x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $\lg a^b > \lg b^b > \lg b^a$, 即 $b \lg a > b \lg b > a \lg b$.

故选: B.

13. (23-24 高三下·黑龙江大庆·阶段练习) 已知 $a = \log_2 986 - \log_2 985$, $b = 1 - \cos \frac{1}{986}$, $c = \frac{1}{985}$, 则 ()

A. $b > a > c$

B. $b > c > a$

C. $a > c > b$

D. $c > b > a$

【答案】C

【分析】设 $g(x) = \log_2(x+1) - x$, 根据函数的单调性比较 a, c , 再根据 b, c 作差比较大小的思想, 设

$f(x) = 1 - \cos x - x$, $0 < x < 1$, 利用函数的导数讨论函数的单调性得出 $f(x) < 0$, 再结合 b, c 的具体值得出结果.

【解析】设 $g(x) = \log_2(x+1) - x$, $x \in (0, 1)$, 则 $g'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 2} - 1$,

当 $x \in \left(0, \frac{1}{\ln 2} - 1\right)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $x \in \left(\frac{1}{\ln 2} - 1, 1\right)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

又 $g(0) = g(1) = 0$, 所以 $g(x) = \log_2(x+1) - x > 0$, $x \in (0, 1)$,

所以 $a = \log_2 986 - \log_2 985 = \log_2 \left(1 + \frac{1}{985}\right) > \frac{1}{985} = c$;

$0 < b = 1 - \cos \frac{1}{986} < 1$, $0 < \frac{1}{986} < c = \frac{1}{985} < 1$,

设 $f(x) = 1 - \cos x - x$, $0 < x < 1$,

$f'(x) = \sin x - 1 < 0$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减,

所以 $f(x) = 1 - \cos x - x < f(0) = 0$,

所以 $1 - \cos x < x$, 又 $0 < \frac{1}{986} < 1$,

所以 $1 - \cos \frac{1}{986} < \frac{1}{986} < \frac{1}{985}$, 则 $b < c$,

综上, $a > c > b$.

故选: C.

14. (23-24 高二下·安徽宿州·期中) 已知 $a = \ln \sqrt{2}$, $b = e^{-1}$, $c = \ln \sqrt[3]{3}$ (e 为自然对数的底数), 则实数 a, b, c 的大小关系为 ()

A. $a < c < b$

B. $b < a < c$

C. $c < a < b$

D. $c < b < a$

【答案】 A

【分析】 根据 a, b, c 式子特点, 构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 利用导数判断函数 $f(x)$ 的单调性, 利用函数单调性比较 b, c 大小, 再由 $y = \ln x$ 的单调性比较 a, c 大小, 则可得结果.

【解析】 令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

故当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

而 $b = e^{-1} = \frac{\ln e}{e} = f(e)$, $c = \ln \sqrt[3]{3} = \frac{\ln 3}{3} = f(3)$,

因为 $e < 3$, $f(e) > f(3)$, 故 $c < b$,

因为函数 $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

而 $(\sqrt{2})^6 = \left[(\sqrt{2})^2\right]^3 = 8$, $(\sqrt[3]{3})^6 = \left[(\sqrt[3]{3})^3\right]^2 = 9$, 且 $8 < 9$,

所以 $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$, 所以 $a < c$,

所以 $a < c < b$.

故选：A.

15. (2024·安徽·三模) 已知 $a = e^{\pi-3}$, $b = \ln(e\pi - 2e)$, $c = \pi - 2$, 则 ()

- A. $b < c < a$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

【答案】A

【分析】构造函数 $f(x) = e^{x-1} - x$, 利用导数求取单调性可得 a 、 c 之间大小关系, 构造函数 $g(x) = \ln x - x + 1$, 利用导数求取单调性可得 b 、 c 之间大小关系, 即可得解.

【解析】由 $a = e^{\pi-3}$, $b = \ln(e\pi - 2e)$,

$$\text{即 } a = e^{(\pi-2)-1}, b = \ln(e\pi - 2e) = \ln(\pi - 2) + 1,$$

$$\text{令 } f(x) = e^{x-1} - x (x > 1),$$

$$\text{则 } f'(x) = e^{x-1} - 1 > 0 \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

故 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{则有 } f(\pi - 2) = e^{(\pi-2)-1} - (\pi - 2) > f(1) = 0, \text{ 即 } a > c,$$

$$\text{令 } g(x) = \ln x - x + 1 (x > 1),$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} < 0 \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

故 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{则有 } g(\pi - 2) = \ln(\pi - 2) + 1 - (\pi - 2) < g(1) = 0, \text{ 即 } b < c,$$

故 $b < c < a$.

故选：A.

【点睛】关键点点睛：本题关键点在于构造出函数 $f(x) = e^{x-1} - x$ 、 $g(x) = \ln x - x + 1$ ，以比较 a 、 c 与 b 、 c 之间大小关系.

16. (2024·湖北黄冈·二模) 已知 a, b, c, d 分别满足下列关系： $16^a = 15$, $b = \log_{17} 16$, $\log_{\frac{15}{16}} c = \frac{17}{16}$, $d = \tan \frac{3}{2}$, 则 a, b, c, d 的大小关系为 ()

- A. $a < b < c < d$ B. $c < a < b < d$
C. $a < c < b < d$ D. $a < d < b < c$

【答案】B

【分析】将指数式化成对数式，利用换底公式，基本不等式可推得 $a < b$ ，利用指对数函数的单调性，通过构造函数判断单调性可推得 $c < a$ ，最后利用正切函数的单调性可得 $b < d$ 。

【解析】由 $16^a = 15$ ，可得 $a = \log_{16} 15$ ，

$$a - b = \log_{16} 15 - \log_{17} 16 = \frac{\ln 15}{\ln 16} - \frac{\ln 16}{\ln 17} = \frac{\ln 15 \cdot \ln 17 - (\ln 16)^2}{\ln 16 \cdot \ln 17},$$

$$\text{因 } \ln 15 \cdot \ln 17 < \left(\frac{\ln 15 + \ln 17}{2} \right)^2 = \left(\frac{\ln 255}{2} \right)^2 < \left(\frac{\ln 256}{2} \right)^2 = (\ln 16)^2,$$

又 $\ln 16 \cdot \ln 17 > 0$ ，故 $a - b < 0$ ，即 $a < b$ ；

$$\text{因 } \log_{\frac{15}{16}} c = \frac{17}{16}, \text{ 则 } c = \left(\frac{15}{16} \right)^{\frac{17}{16}} < \frac{15}{16}, \text{ 由 } \frac{c}{a} < \frac{\frac{15}{16}}{\log_{16} 15} = \frac{15}{16} \cdot \frac{\ln 16}{\ln 15} = \frac{\ln 16}{16} \div \frac{\ln 15}{15},$$

由函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ ， $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ，因 $x > e$ 时， $y' < 0$ ，

即函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减，则有 $0 < \frac{\ln 16}{16} < \frac{\ln 15}{15}$ ，故得 $c < a$ ；

由 $b = \log_{17} 16 < 1$ ，而 $d = \tan \frac{3}{2} > \tan \frac{\pi}{4} = 1$ ，即 $b < d$ ，

综上，则有 $c < a < b < d$ 。

故选：B。

【点睛】方法点睛：解决此类题的常见方法，

- (1) 指、对数函数的值比较：一般需要指对互化、换底公式，以及运用函数的单调性判断；
- (2) 作差、作商比较：对于结构相似的一般进行作差或作商比较，有时还需基本不等式放缩比较；
- (3) 构造函数法：对于相同结构的式子，常构造函数，利用函数单调性判断。

● 题型04 利用导数，函数的单调性、奇偶性、对称性比较大小

17. (2024·辽宁·二模) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = e^x - e^{-x}$ ，设 $a = 2^{0.7} \cdot f(2^{0.7})$ ， $b = \left(\frac{1}{2}\right)^{-0.8} \cdot f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-0.8}\right)$ ，

$c = -\log_{0.7} 1.25 \cdot f(\log_{0.7} 0.8)$ ，则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $b > a > c$ B. $c > a > b$ C. $b > c > a$ D. $c > b > a$

【答案】A

【分析】构造函数并判断奇偶性，通过导函数求出函数的单调区间，根据函数单调性比较大小即可

【解析】令 $F(x) = xf(x) (x \in \mathbf{R})$ ，因为 $F(-x) = -x(e^{-x} - e^x) = x(e^x - e^{-x}) = F(x)$ ，

所以 $F(x)$ 为偶函数。

$$F'(x) = (e^x - e^{-x}) + x(e^x + e^{-x}),$$

因为当 $x \geq 0$ 时, $e^x - e^{-x} \geq e^0 - e^0 = 0$, $x(e^x + e^{-x}) \geq 0$, 此时 $F'(x) \geq 0$,

所以 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{因为 } a = 2^{0.7} \cdot f(2^{0.7}) = F(2^{0.7}), \quad b = \left(\frac{1}{2}\right)^{-0.8} \cdot f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-0.8}\right) = F\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-0.8}\right),$$

$$c = -\log_{0.7} 1.25 \cdot f(\log_{0.7} 0.8) = \log_{0.7} 1.25^{-1} \cdot f(\log_{0.7} 0.8) = \log_{0.7} 0.8 \cdot f(\log_{0.7} 0.8) = F(\log_{0.7} 0.8),$$

$$\text{因为 } 2^{0.7} > 1, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-0.8} = 2^{0.8} > 2^{0.7}, \quad \log_{0.7} 0.8 < \log_{0.7} 0.7 = 1,$$

$$\text{所以 } \left(\frac{1}{2}\right)^{-0.8} > 2^{0.7} > \log_{0.7} 0.8 > 0, \quad \text{所以 } F\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-0.8}\right) > F(2^{0.7}) > F(\log_{0.7} 0.8),$$

即 $b > a > c$.

故选: A.

18. (2024·山东菏泽·一模) 已知 $f(x) = xh(x)$, 其中 $h(x)$ 是奇函数且在 $\mathbb{R}$ 上为增函数, 则 ()

$$\text{A. } f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) \quad \text{B. } f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{C. } f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) \quad \text{D. } f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) > f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right)$$

【答案】C

【分析】判断函数 $f(x) = xh(x)$ 的奇偶性和单调性, 继而判断 $\log_2 \frac{1}{3}, 2^{-\frac{3}{2}}, 2^{-\frac{2}{3}}$ 的取值范围和大小关系, 结合函数的奇偶性和单调性, 即可比较大小, 即得答案.

【解析】由于 $h(x)$ 是奇函数且在 $\mathbb{R}$ 上为增函数, 故 $h(0) = 0$,

当 $x > 0$ 时, $h(x) > h(0) = 0$, 且 $f(x) = xh(x)$ 为偶函数,

且 $f(x) = xh(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

$$\text{又 } \log_2 \frac{1}{3} < 0 < 2^{-\frac{3}{2}} < 2^{-\frac{2}{3}} < 1 < \log_2 3,$$

$$\text{故 } f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right) = f(-\log_2 3) = f(\log_2 3) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right),$$

故选: C

19. (23-24 高二下·甘肃兰州·期中) 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x$, 设 $a = f(0.2^{0.2}), b = f(2^{0.2}), c = f(\log_{0.2} 2)$,

则 ()

$$\text{A. } b > a > c$$

$$\text{B. } a > b > c$$

C. $b > c > a$

D. $c > a > b$

【答案】A

【分析】先判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，再利用导数研究函数 $f(x)$ 的单调性，最后利用指数函数和对数函数的单调性比较 $0.2^{0.2}, 2^{0.2}, \log_5 2$ 大小，即可比较.

【解析】因为函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $f(-x) = \frac{(-x)^2}{2} + \cos(-x) = \frac{x^2}{2} + \cos x = f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(\log_{0.2} 2) = f(-\log_5 2) = f(\log_5 2)$ ，

又 $f'(x) = x - \sin x, (x \geq 0)$ ，令 $g(x) = x - \sin x$ ，则 $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ ，

所以函数 $f'(x) = x - \sin x$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，所以 $f'(x) \geq f'(0) = 0 - \sin 0 = 0$ ，

所以函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

因为 $0 < \log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} < 0.2^{0.2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}} < \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1 = 2^0 < 2^{0.2}$ ，

所以 $0 < \log_5 2 < 0.2^{0.2} < 2^{0.2}$ ，所以 $f(\log_5 2) < f(0.2^{0.2}) < f(2^{0.2})$ ，所以 $b > a > c$ 。

故选：A

20. (2024·山西·三模) 已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + 3) - |x - 1|$ ，若 $a = f(\log_2 3), b = f\left(\sin \frac{1}{3}\right), c = f\left(e^{\frac{4}{5}}\right)$ ，

则 a, b, c 的大小关系为 ()

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $b < c < a$

D. $c < b < a$

【答案】D

【分析】首先得到 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，并根据复合函数单调性得到其单调性，再构造相关函数

$g(x) = x - \sin x, h(x) = x - x^2 - \sin x, \phi(x) = e^x - x - 1$ 的单调性得到 $\log_2 3 - 1 < 1 - \sin \frac{1}{3} < e^{\frac{4}{5}} - 1$ ，则比较出大小关系.

【解析】因为 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}[(x-1)^2 + 2] - |x-1|$ ，

则 $f(2-x) = \log_{\frac{1}{2}}[(2-x-1)^2 + 2] - |2-x-1| = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + 3) - |x-1| = f(x)$ ，

则 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/105004141022012120>