高等知识

一、集合（数域封闭性、点集开闭性）

【题文】（复旦 2009 选拔）设 Q 是有理数集，集合

$X=\left\{x \mid x=a+\sqrt{2}b, a,b\in Q, x\neq 0\right\}$，下列集合 (1) $\left\{2x \mid x\in X\right\}$，

(2) $\left\{\frac{x}{\sqrt{2}} \mid x\in X\right\}$，(3) $\left\{\frac{1}{x} \mid x\in X\right\}$，(4) $\left\{x^2 \mid x\in X\right\}$ 中，和 X 相同的集合有（　）个。

A. 4 个　　B.3 个　　C.2 个　　D.1 个

【题文】（2003 年复旦）定义闭集合 S，若 $a,b\in S$，则 $a+b\in S$，$a-b\in S$.

（1）举一例，真包含于 R 的无限闭集合；

（2）求证对任意两个闭集合 $S_1,S_2\subset R$，存在 $c\in R$，但 $c\notin S_1\bigcup S_2$.

【题文】（清华 2006 自招冬令营）对于集合 $M\subseteq R^2$，称 M 为开集当且仅当 $\forall P_0\in M, \exists r>0$，使得 $\left\{P\in R^2 \mid |PP_0|<r\right\}\subseteq M$。判断集合

$\left\{(x,y) \mid 4x+2y-5>0\right\}$ 与 $\left\{(x,y) \mid x\geq 0, y>0\right\}$ 是否为开集，并证明你的结论。

【题文】 (2012 年复旦)设集合 X 是实数集 R 的子集，如果点 $x_0\in R$ 满足：对任意 $a>0$，都存在 $x\in X$，使得 $0<|x-x_0|<a$，称 x_0 为集合 X 的聚点. 用 Z 表示整数集，则在下列集合：（1）$\{\frac{n}{n+1} \mid n\in Z, n\geq 0\}$；（2）$R\backslash\{0\}$；(3) $\{\frac{1}{n} \mid n\in Z, n\neq 0\}$；（4）整数集 Z 中，以 0 为聚点的集合有（　）

A.(2)，（3）　B.(1)，（4）　C.(1)，（3）　D.(1)，（2），（4）

【题文】（复旦 2009 选拔）实轴 R 中集合 X 如果满足：任意非空开区间都含有 X 中的点，则称 X 在 R 中稠密那么，“R 中集合 X 在 R 中不稠密”的充分必要条件是　（　）

A.任意非空开区间都不含有 X 中的点　　B.存在非空开区间不含有 X 中点

C.任意非空开区间都含有 X 的补集中的点　　D.存在非空开区间含有 X 的补集中的点

二、线性代数

㈠行列式及逆序数

【题文】设 a 是一个实数，则方程组 $\begin{cases}(a+1)x+8y=4a,\\ ax+(a+3)y=3a-1\end{cases}$ 解的情况为（ ）

A.无论 a 取何值，方程组均有解；　B.无论 a 取何值，方程组均无解；

C.若方程组有解，则仅有一组解；　D.方程组有可能无解.

【题文】设 a、b 是实常数，则二元一次方程组 $\begin{cases}ax+by=1,\\ x-2y=-a-b\end{cases}$ 无解的充要条件是（　）

A. $2a+b=0$ 且 $a\neq\pm1$；　　B. $2a+b=0$ 且 $a+b\neq-1$；

C. $a=1,b=-2$ 或 $a=-1,b=2$；　D. $2a+b=0$.

【题文】已知数列 $\{a_1\}$ 是首项为 a1，公差 d≠0 的等差数列，则方程组

$$\begin{cases}a_1x+a_2y+a_3z=a_4\\ a_5x+a_6y+a_7z=a_8\\ a_9x+a_{10}y+a_{11}z=a_{12}\end{cases}$$

解的情况比为（ ）

A，唯一解　B，无解　C，无穷多解　D，以上均有可能

【题文】（2008 年复旦）设 x_1,x_2,x_3，是方程 $x^3+x+2=0$ 的三个根，则行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=$ （ ）

A. -4 B. -1 C. 0 D. 2

【题文】（复旦 2008 选拔 B）方程 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 3x-5 \end{vmatrix}=0$ 的实根的个数为（ ）

A.1 个 B.2 个 C.3 个 D. 无实根

【题文】在 $m(m\geq 2)$ 个不同数的排列 $P_1P_2\cdots P_m$ 中，若 $1\leq i\leq j\leq m$ 时，$P_i>P_j$（即前面某数大于后面某数），则称 P_i 与 P_j 构成一个逆序.一个排列的全部逆序的总数称为该排列的逆序数.记排列 $(n+1)n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数为 a_n，如排列 21 的逆序数 $a_1=1$，排列 4321 的逆序数 $a_3=6$.

（1）求 a_4、a_5，并写出 a_n 的表达式;

（2）令 $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_n}$.求证：$2n<b_1+b_2+\cdots+b_n<2n+3,n=1,2,\cdots$

㈡矩阵及其应用

【题文】设$A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$是一个二阶方阵，则 100 个$A$连乘的乘积$A^{100}=$ （ ）

A.$2^{99}A$;　　B.$2^{100}A$;　　C.$3^{99}A$;　　D.$3^{100}A$.

【题文】一个班级 30 名学生排列成矩阵（长方形）队形，有哪几种队形可以排列（每行每列不能有空缺位置）？又设这 30 名学生的身高各不相同，比较每一列最矮的学生，将其中最高的学生标记为A；再比较每一行最高的学生，将其中最矮的学生标记为B.按照上述队形，A是否有可能比B高？A和B是否可能等高？

㈢线性变换及其性质（向量线性相关）

【题文】（复旦 2010 选拔）设非零向量$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$

为共面向量，$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$是未知向量，则满足$\vec{a}\bullet\vec{x}=0,\vec{b}\bullet\vec{x}=0,\vec{c}\bullet\vec{x}=0$的向量$\vec{x}$

的个数为（ ）

A. 1 个　　B.无穷多个　　C.0 个　　D.不能确定

【题文】 (复旦 2009 选拔)给定一组向量$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$

如果存在不全为零的实数k_1,k_2,k_3，使得$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}$=0（0 表示零向量）则称向量组$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，是线性相关的，下面各组向量中，哪一组向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$是线性相关的？( )

A. $\vec{a}=(1,2,1),\vec{b}=(-1,3,2),\vec{c}=(3,1,0)$　　B. $\vec{a}=(1,2,1),\vec{b}=(-1,3,2),\vec{c}=(0,1,-1)$

C. $\vec{a}=(1,2,0),\vec{b}=(-1,3,2),\vec{c}=(0,1,-1)$　　D. $\vec{a}=(1,2,1),\vec{b}=(-1,0,2),\vec{c}=(0,1,-1)$

【题文】(复旦 2010 选拔)在坐标平面Oxy上给定点$A(1,2),B(2,3),C(2,1)$，矩阵$\begin{pmatrix} 2 & k \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$将向量$OA,OB,OC$分别换成向量$OA'、OB'、OC'$，如果联结它们的终点$A'$、$B'$、$C'$构成直角三角形，且斜边为$B'C'$，那么$k=$（ ）

A.± 2；　B.2；　C.0　；　D.$0,-2$.

㈣多项式

【题文】(交大 2004 保送)

设x^2+ax+b和x^2+bx+c的最大公因式为$x+1$，最小公倍式为

$x^3+(c-1)x^2+(b+3)x+d$，则$(a,b,c,d)=$________.

【题文】 (2003年上海交大)求证：$\dfrac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$为最简分式.

【题文】(2006 年上海交大推优、保送生) 若函数形式为$f(x,y)=a(x)b(y)+c(x)d(y)$，其中$a(x),c(x)$为关于x的多项式，$b(y),d(y)$为关于y的多项式，则称$f(x,y)$为P类函数. 判断下列函数是否为P类函数，并说明理由.

(1)$1+xy$;　(2)$1+xy+x^2y^2$.

实根问题

【题文】(交大 2003 冬令营) 三次多项式 f(x)满足 f(3)=2f(1)，且有两个相等的实数根 2，则第三个根为_______.

【题文】(交大 2000 保送) 设三次多项式 f(x)满足：f(x+2)=-f(-x),f(0)=1,f(3)=4,试求 f(x)。

【题文】（2008 年复旦）设x_1,x_2,x_3，是方程$x^3+x+2=0$的三个根，则行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=$$

A. -4　　B. -1　　C. 0　　D. 2

【题文】（2008 年南开大学保送生）已知方程 $x^3+Px^2+qx+1=0$ 有 3 个实根, p>0,q>0 . 证明：$pq\geq 9$.

【题文】(2005 年上海交大)$x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三根分别为a,b,c 并且a,b,c 是不全为零的有理数,求a,b,c 的值.

【题文】（2009 年清华）请找出一个以$\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ 为根的整系数多项式.

【题文】(2010年五校联考示范)设θ是三次多项式$f(x)=x^3-3x+1$0的一个根，

且$\alpha=\dfrac{\theta^2+\theta-2}{2}$.若$h(x)$是一个有理系数的二次多项式,满足条件$h(\alpha)=\theta$.则$h(0)$=（　）

A.-2　　B.2　　C.$-\dfrac{1}{2}$　　D.$\dfrac{1}{2}$

三、零点定理与不动点

【题文】（交大 2002 保送）若存在实数x ,使$f(x)=x$,则称x 为$f(x)$ 的不动点，已知函数 $f(x)=\dfrac{2x+a}{x+b}$ 有两个关于原点对称的不动点。

（1）求 a,b 必须满足的充要条件；

（2）试用$y=f(x)$和$y=x$的图形表示上述两个不动点的位置（画草图）。

【题文】(2008 年上海交大冬令营)已知函数$f\left(x\right)=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$，且$f\left(x\right)=x$没有实数根，那么$f\left(f\left(x\right)\right)=x$是否有实数根？并证明你的结论.

【题文】

(复旦 2010 选拔)对函数f：$\left[0,1\right]\rightarrow\left[0,1\right]$,定义$f^1(x)=f(x),\ldots,f^n(x)=f(f^{n-1}(x))$,

,n=1,2,3 ，…满足$f^n(x)=x$的点$x\in\left[0,1\right]$称为f的一个 n 一周期点。现设

$$f(x)=\begin{cases}2x, 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 2-2x, \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

问f的 n—周期点的个数是（ ）

A. 2n 个 B. $2n^2$个 C. 2^n 个 D. $2(2^n-1)$ 个

四、微积分

㈠实数及函数性质

【题文】 实数比自然数多。

【题文】 自然数与有理数一样多。

【题文】若存在M,使任意$t\in D$（D为函数$f\left(x\right)$的定义域），都有$|f\left(x\right)|\le M$，则称函数$f\left(x\right)$有界.函数$f\left(x\right)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在$x\in(0,\frac{1}{2})$上是否有界？

㈡数列与函数极限

⑴极限的概念与计算

【题文】判断命题真假：

（1）数列 1, 1, 1,,1 …，1（共 1 万个 1）的极限是 1.

（2）若 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$，则数列 $\{|a_n - A|\}$ 一定是递减数列。

【题文】若 $\lim_{n\to\infty} q^n$ 存在，则实数 q 的取值范围是　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A.(-1,1）　　B.（-1,0 $\cup$（0,1）　　C. (-1,1]　　D. （-1,0 $\cup$（0,1]

【题文】 (复旦大学自主招生题改编)

求：$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-2}{n}$

【题文】

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e, \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = ?; \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = ?; \lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n})^n = ?;$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{2n} = ?$$

【题文】（复旦 2005 保送推优）

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1})$ =________.

【题文】（复旦 2001 选拔）$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ =__________.

【题文】（复旦 2003 保送）a>0，$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{2^n+a^n}$ =______.

【题文】已知 $f(n)=1+2+3+\cdots+n(n\in N^*)$则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n^2)}{[f(n)]^2}$ 等于 （ ）

A.2 B.1 C.0 D.不存在

【题文】$\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{2\sqrt[3]{3\cdots}}}}}}$ =（ ）

A. $\sqrt[5]{24}$ B.$\sqrt[5]{6}$ C. 6 D.无穷大

【题文】(2000年上海交大保送生)极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^P+2^P+\cdots+n^P}{n^{P+1}}(P>0)$ =________.

【题文】计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^2\left(\dfrac{10}{n}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}-\cdots-\dfrac{1}{n+10}\right)\right]$ =_________.

【题文】计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\dfrac{3}{n^2+3}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$ =___________.

【题文】（复旦 2000 保送）

$\lim\limits_{n\to\infty}[(n+2)\log_2(n+2)-2(n+1)\log_2(n+1)+n\log_2 n]=$ ________.

【题文】

(复旦)设$S_n=1+2+\ldots+n,n\in N$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2nS_n}{(n+32)S_{n+1}}=$ （）

$A.2$ B.$\dfrac{1}{32}$ C.$\dfrac{1}{16}$ D.64

【题文】（交大 2002 联读）

①用数学归纳法证明一下结论：$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2-\dfrac{1}{n}(n\geq 2,n\in N^*)$.

$0 < x \leq 1$时有$1-\frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1$，利用①的结论求

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1\sin 1+2\sin\frac{1}{2}+\cdots+n\sin\frac{1}{n}\right)$$

【题文】 证明：$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$

【题文】

(2012年华约)$\sum_{n=1}^{\infty}\lg\left(1+\frac{2}{n^2+3n}\right)$的值为 ( )

【题文】

证明：$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$发散，即当$n\to+\infty$时，$S$将会大于任何给定数。

【题文】（武大）求常数 a，b 的值，使$\lim_{x\to1}\left(\frac{a}{1-x}-\frac{b}{1-x^3}\right)=1$

【题文】求极限：$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$

【题文】 求极限：$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\frac{x^3}{6}}$

【题文】确定a,b的值：

$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+ax^2+b}{x-2}=8$

(2) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+a}+b}{x^2-1}=1$

①代数递推

【题文】设两个等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的公差非零，分别为 c,d 则$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$=________.

【题文】（交大 2003 冬令营）数列$\{a_n\}$的$a_1=1,a_2=3,3a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$,求$a_n$和$\lim_{n\to\infty}a_n$。

【题文】已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}$，前两项为 a,b

（1）若$b_n=a_n-a_{n-1}$（n=2,3,4,　），求b_n；（2）$\sum_{i=2}^{n}b_i$；(3)求$\lim_{n\to\infty}a_n$。

【题文】(2003 年上海交大)数列$\{a_n\}$中$a_1=1,a_2=3,3a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$，求$a_n$和$\lim_{n\to\infty}a_n$

【题文】(2004 年复旦大学保送生）已知数列$\{b_n\}$、$\{a_n\}$满足

$a_{n+1}=-a_n-2b_n$,且$b_{n+1}=6a_n+6b_n$,又$a_1=2,b_1=4$,求(1)a_n,b_n;(2)$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

【题文】2006