概率模型

基础回扣•考教衔接

1.(人A必二10.2节例题改编)甲、乙两名射击运动员进行射击比赛,甲的中靶概率为0.8,乙的中靶概率为0.9,则至少有一人中靶的概率是(　C　)

A.0.72　　　　B.0.28　　　　C.0.98　　　　D.0.89

解析 设 A=“甲中靶”,B=“乙中靶”,则$\overline{A}$=“甲脱靶”,$\overline{B}$=“乙脱靶”.由于两个人射击的结果互不影响,所以 A 与 B 相互独立,A 与$\overline{B}$,$\overline{A}$与 B,$\overline{A}$与$\overline{B}$都相互独立.

由已知可得,$P(A)=0.8$,$P(B)=0.9$,$P(\overline{A})=0.2$,$P(\overline{B})=0.1$.

(方法一)事件“至少有一人中靶”$=AB\cup A\overline{B}\cup\overline{A}B$,且 AB,$A\overline{B}$与$\overline{A}B$ 两两互斥,所以 $P(AB\cup A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(AB)+P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=0.72+0.26=0.98$.

(方法二)由于事件“至少有一人中靶”的对立事件是“两人都脱靶”,根据对立事件的性质,得事件“至少有一人中靶”的概率为 $1-P(\overline{A}\overline{B})=1-0.02=0.98$.

2.(人A选必三7.1.2节例题改编)某社区有智能餐厅A、人工餐厅B两家餐厅,居民甲第1天随机地选择一家餐厅用餐.如果第1天去A餐厅,那么第2天去A餐厅的概率为0.7;如果第1天去B餐厅,那么第2天去A餐厅的概率为0.8.居民甲第2天去A餐厅用餐的概率为(A)

A.0.75　　B.0.7　　C.0.56　　D.0.38

解析　设A_1="第1天去A餐厅用餐",B_1="第1天去B餐厅用餐",A_2="第2天去A餐厅用餐",则$\Omega=A_1\cup B_1$,且A_1与B_1互斥,根据题意得

$P(A_1)=P(B_1)=0.5,P(A_2|A_1)=0.7,P(A_2|B_1)=0.8,$

由全概率公式,得

$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(B_1)\cdot P(A_2|B_1)=0.5\times0.7+0.5\times0.8=0.75.$

3.(人 A 必二 10.1.4 节例题改编)从不包含大小王牌的 52 张扑克牌中随机抽取一张,设事件 A=“抽到红桃”,事件 B=“抽到方块”,$P(A)=P(B)=\frac{1}{4}$,设 C=“抽到红花色”,则 $P(C)$=____$\frac{1}{2}$____;设 D=“抽到黑花色”,则 $P(D)$=____$\frac{1}{2}$____.

解析 因为 $C=A\cup B$,且 A 与 B 不会同时发生,所以 A 与 B 是互斥事件,根据互斥事件的概率加法公式,得 $P(C)=P(A)+P(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.因为 C 与 D 互斥,又因为 $C\cup D$ 是必然事件,所以 C 与 D 互为对立事件,所以

$P(D)=1-P(C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

4.(人A选必三第七章习题改编)抛掷两枚质地均匀的骰子,两个点数都出现偶数的概率为$\underline{\quad\frac{1}{4}\quad}$;已知第一枚骰子的点数是偶数的条件下,第二枚骰子的点数也是偶数的概率为$\underline{\quad\frac{1}{2}\quad}$.

解析 (1)抛掷两枚质地均匀的骰子,基本事件共有 $6\times6=36$ 个,两个点数都是偶数的基本事件有 22,24,26,42,44,46,62,64,66 共 9 个,概率为 $P=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

(2)记第一枚骰子的点数是偶数为事件 A,第二枚骰子的点数是偶数为事件 B,则 $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,

由(1)知 $P(AB)=\frac{1}{4}$,所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$.

真题体验

1.(2024·全国甲,文4)某独唱比赛的决赛阶段共有甲、乙、丙、丁四人参加,每人出场一次,出场次序由随机抽签确定.则丙不是第一个出场,且甲或乙最后出场的概率是(C)

A.$\frac{1}{6}$　　B.$\frac{1}{4}$

C.$\frac{1}{3}$　　D.$\frac{1}{2}$

解析 设A表示事件“丙不是第一个出场,且甲最后出场”,B表示事件“丙不是第一个出场,且乙最后出场”.

四人由随机抽签的方式确定出场次序,基本事件共有24个,事件A包含的基本事件有4个,故$P(A)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$,类似地有$P(B)=\frac{1}{6}$.

由于事件A与事件B互斥,故丙不是第一个出场,且甲或乙最后出场的概率为

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}$.

2.(2023·全国甲,理6)某地的中学生中有60%的同学爱好滑冰,50%的同学爱好滑雪,70%的同学爱好滑冰或爱好滑雪.在该地的中学生中随机调查一名同学,若该同学爱好滑雪,则该同学也爱好滑冰的概率为(A)

A.0.8　　B.0.6　　C.0.5　　D.0.4

解析　从该校的学生中任取一名学生,记A表示事件:“取到的学生爱好滑冰”,B表示事件:“取到的学生爱好滑雪”.

由题设知$P(A)=0.6$,$P(B)=0.5$,$P(A\cup B)=0.7$,

由$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,

得$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.6+0.5-0.7=0.4$,

则所求概率为 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.4}{0.5}=0.8$.

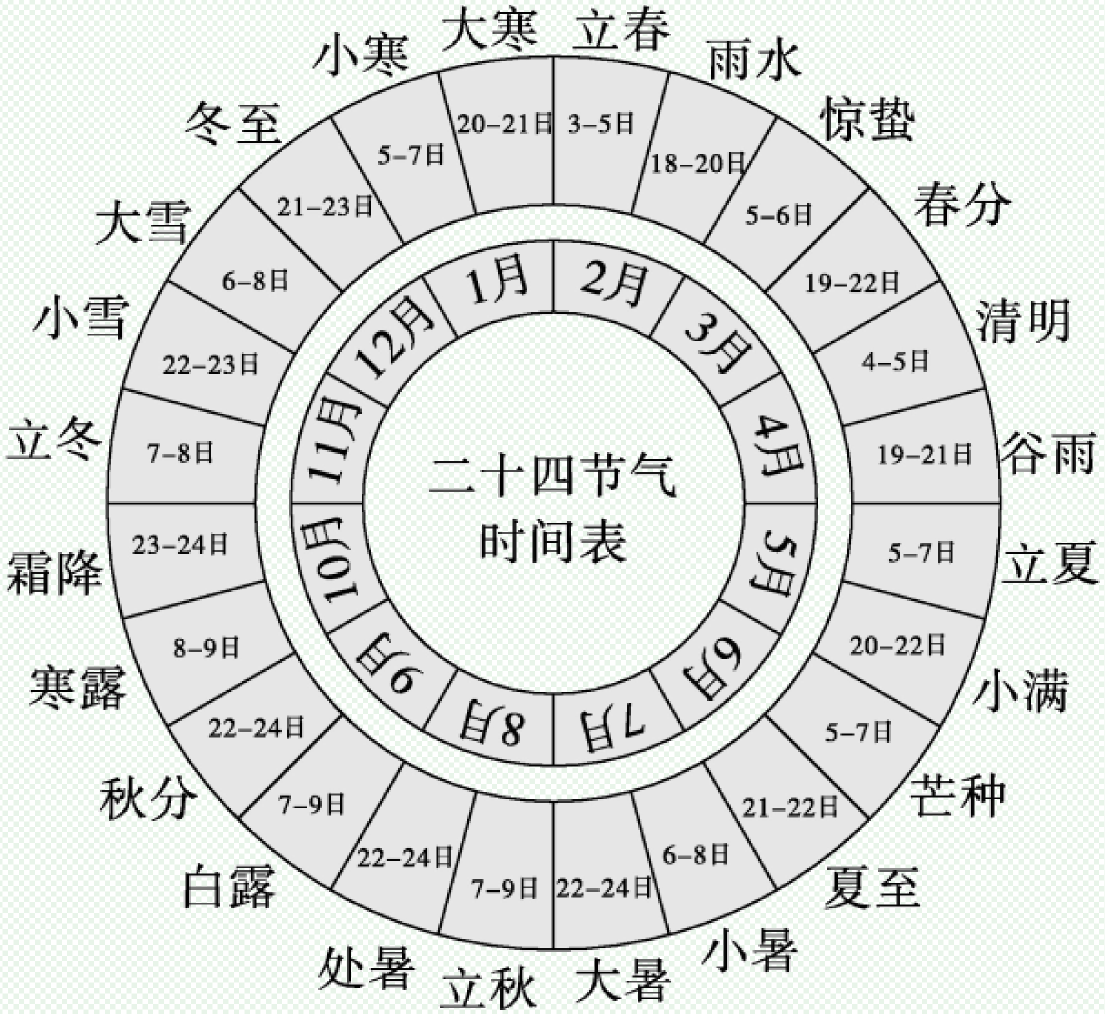
3.(2024·上海,8)小王参加知识竞赛,题库中A组题有5 000道,B组题有4 000道,C组题有3 000道.已知小王做对这3组题的概率依次是0.92,0.86,0.72,则随机从题库中抽取一道题,小王做对的概率是$\underline{\quad\frac{17}{20}\quad}$.

解析　由题意可知,A组题占比为$\frac{5}{12}$,B组题占比为$\frac{1}{3}$,C组题占比为$\frac{1}{4}$,设所求概率为P,则$P=\frac{5}{12}\times0.92+\frac{1}{3}\times0.86+\frac{1}{4}\times0.72=\frac{17}{20}$.

以题梳点•核心突破

考点一　古典概型

例1二十四节气歌是古人为表达人与自然宇宙之间独特的时间观念,科学揭示天文气象变化规律的小诗歌,它蕴含着中华民族悠久文化内涵和历史积淀,体现着我国古代劳动人民的智慧.其中四句“春雨惊春清谷天,夏满芒夏暑相连;秋处露秋寒霜降,冬雪雪冬小大寒”中每句的开头一字代表着季节,每一句诗歌包含了这个季节中的6个节气.若从24个节气中任选2个节气,则这2个节气恰好不在一个季节的概率为 $\underline{\frac{18}{23}}$.



解析 (方法一)从 24 个节气中任选 2 个节气的事件总数为$C_{24}^2=276$,求从 24 个节气中任选2个节气,这2个节气恰好不在一个季节的事件数,分两步完成:

第一步,从 4 个季节中任选 2 个季节的方法种数为$C_4^2=6$,

第二步,再从选出的这 2 个季节中各选一个节气的方法种数为$C_6^1C_6^1=36$,所以从 24 个节气中任选 2 个节气,这 2 个节气恰好不在一个季节的事件数为

$6\times36=216$,所以 $P=\dfrac{216}{276}=\dfrac{18}{23}$.

(方法二)从24个节气中任选2个节气的事件总数为C_{24}^{2}=276,从24个节气中任选2个节气,这2个节气恰好在一个季节的事件数为$4C_{6}^{2}$=60,从24个节气中任选2个节气,这2个节气恰好不在一个季节的事件数为276-60=216,所以$P=\frac{216}{276}=\frac{18}{23}$.

知识提炼

1. 具有以下两个特征的试验称为古典概型试验，其数学模型称为古典概率模型，简称古典概型

(1)有限性：样本空间的样本点只有有限个；

(2)等可能性：每个样本点发生的可能性相等.

2. 古典概型的概率公式

一般地，设试验 E 是古典概型，样本空间 Ω 包含 n 个样本点，事件 A 包含其中的 k 个样本点，则定义事件 A 的概率 $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$. 其中，$n(A)$和 $n(\Omega)$分别表示事件 A 和样本空间Ω 包含的样本点个数.

3. 利用公式法求解古典概型问题的步骤

第一步	定型，根据事件的性质，确定事件类型为古典概型
第二步	定量，确定试验包含的样本点总数及所求事件包含的样本点数
第三步	求值，代入古典概型的概率计算公式求解

[对点训练1](1)(2023·全国甲,文4)某校文艺部有4名学生,其中高一、高二年级各2名.从这4名学生中随机选2名组织校文艺汇演,则这2名学生来自不同年级的概率为(D)

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

解析 (方法一)由题意,设高一年级2名学生为A,B,高二年级2名学生为C,D,从这4名学生中随机选2名组织校文艺汇演有AB,AC,AD,BC,BD,CD,共6种,这2名学生来自不同年级的组合有AC,AD,BC,BD,共4种,故所求的概率$P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

(方法二)依题意,从这4名学生中随机选2名组织校文艺汇演,总的基本事件数为$C_4^2=6$,其中这2名学生来自不同年级的基本事件数为$C_2^1C_2^1=4$,所以这2名学生来自不同年级的概率为$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.