

2.2.3 二次函数与一元二次方程、不等式 (第1课时)

最新课程标准：(1)从函数观点看一元二次方程．

会结合一元二次函数的图象，判断一元二次方程实根的存在性及实根的个数，了解函数的零点与方程根的关系．

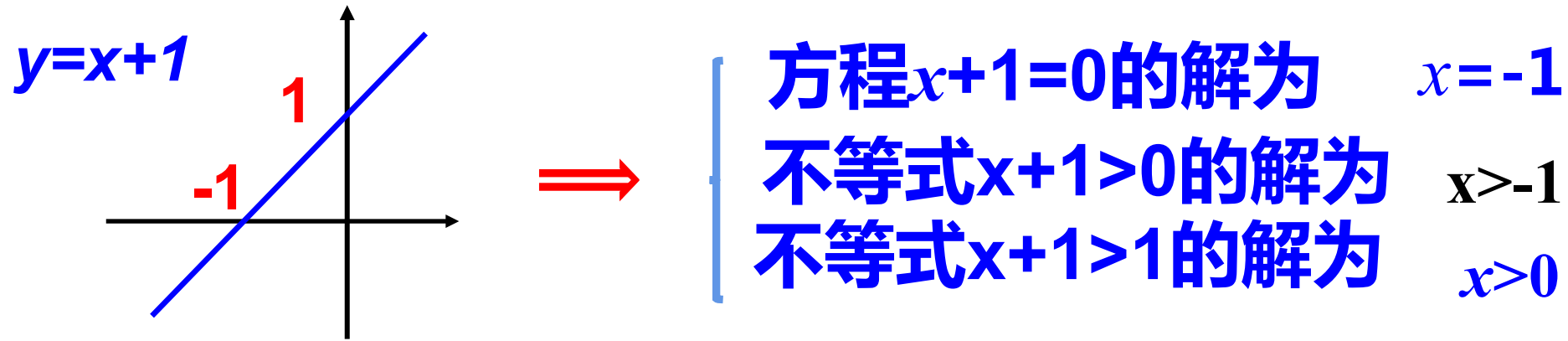
(2)从函数观点看一元二次不等式．

①经历从实际情境中抽象出一元二次不等式的过程，了解一元二次不等式的现实意义．能借助一元二次函数求解一元二次不等式，并能用集合表示一元二次不等式的解集．

②借助一元二次函数的图象，了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系．

函数、方程、不等式知识回顾

在初中，我们从一次函数的角度看一元一次方程，一元一次不等式，发现了三者之间的内在联系，利用这种联系可以让我们更简便的解决问题：



对于二次函数、一元二次方程和一元二次不等式，

$$y = ax^2 + bx + c (a \neq 0) \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad ax^2 + bx + c > 0$$

他们的联系又是怎样的呢？

问题:园艺师打算在绿地上用栅栏围一个矩形区域种植花卉.若栅栏的长度是24 m.围成的矩形区域的面积要大于 20m^2 .则这个矩形的边长为多少米?



设这个矩形的一条边长为 $x\text{m}$, 则另一条边长为 $(12 - x)\text{m}$.

由题意, 得: $(12 - x)x > 20$,

其中 $x \in \{x \mid 0 < x < 12\}$. 整理得

$$x^2 - 12x + 20 < 0, x \in \{x \mid 0 < x < 12\}. \quad \textcircled{1}$$

求得不等式 $\textcircled{1}$ 的解集, 就得到了问题的答案.

一元二次不等式的概念

【定义】 在上题中我们得到这样一个不等式： $x^2-12x+20<0$

一元二次不等式的定义： 我们把只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2的不等式，称为**一元二次不等式**。

一元二次不等式的一般表达式 $ax^2+bx+c>0$ ($a\neq 0$)

或 $ax^2+bx+c<0$ ($a\neq 0$)，其中 a, b, c 均为常数。



1. “一元”指的是只有一个未知数，不代表只有一个字母，如 a, b, c 等；
2. “二次”指的是未知数的最高次必须存在并且是2,并且最高次系数不为0.

探究1 一元二次不等式的解法

二次函数的零点

在初中我们学习了从一次函数的观点看一元一次方程、一元一次不等式的思想方法,类似的,能否从二次函数的观点来看一元二次不等式,进而得到一元二次不等式的求解方法呢?

观察一下一元二次不等式 $x^2-12x+20 < (>) 0$ 和二次函数 $y = x^2-12x+20$ 的关系.

如图在坐标系中画出二次函数的图像,图像与x轴有两个交点.

这两个交点的横坐标就是方程 x^2-

$12x+20=0$ 的两个实根 $x_1=2, x_2=10$, 因此二次函数

$y = x^2-$

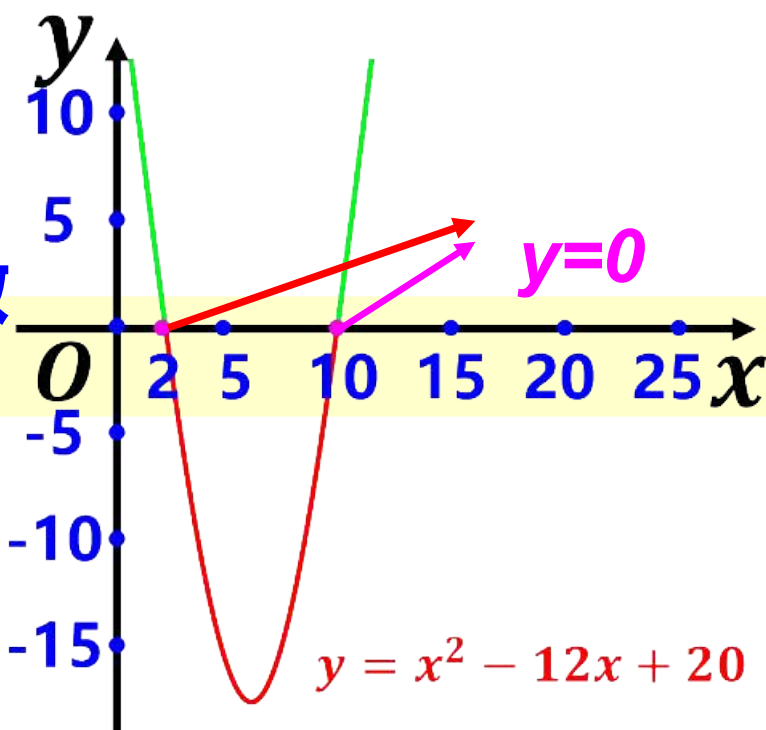
$12x+20$ 的图像与x轴交点坐标为 $(2, 0)$ 和 $(10, 0)$.

我们把使得 $ax^2+bx+c=0$ 的实数x叫做函数 $y = ax^2+b$

$x+c$ 的**零点**.

所以函数 $y = x^2-12x+20$ 的零点就是 $x_1=2, x_2=10$

【注意】零点不是点, 是交点的横坐标, 是数

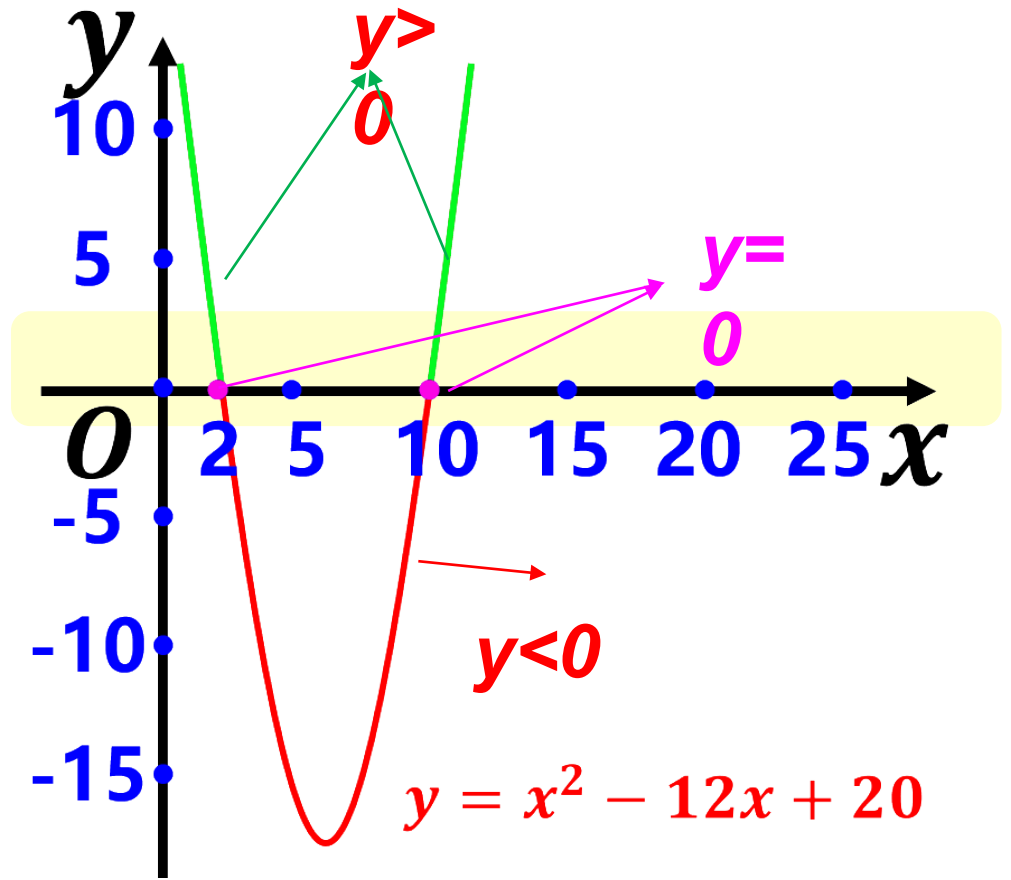




探究一元二次不等式的解法

从图中可以看出，二次函数 $y=x^2-12x+20$ 的两个零点 $x_1=2, x_2=10$ 将 x 轴分成三段。当 $x < 2$ 或 $x > 10$ 时，函数图像位于 x 轴上方，此时 $y > 0$ ，即 $x^2-12x+20 > 0$ ，所以一元二次不等式 $x^2-12x+20 > 0$ 的解集为： $\{x | x < 2 \text{ 或 } x > 10\}$

当 $2 < x < 10$ ，函数图像位于 x 轴下方，此时 $y < 0$ ，即 $x^2-12x+20 < 0$ ，所以，一元二次不等式 $x^2-12x+20 < 0$ 的解集为： $\{x | 2 < x < 10\}$ 。



新知探究

探究1 一元二次不等式的解法



练习:画出二次函数 $y=x^2-5x$ 的图象.

方程 $x^2-5x=0$ 的根为: 0, 5

由图形观察下列结果

当 $x=0$ 或 5 时, $y=0$.

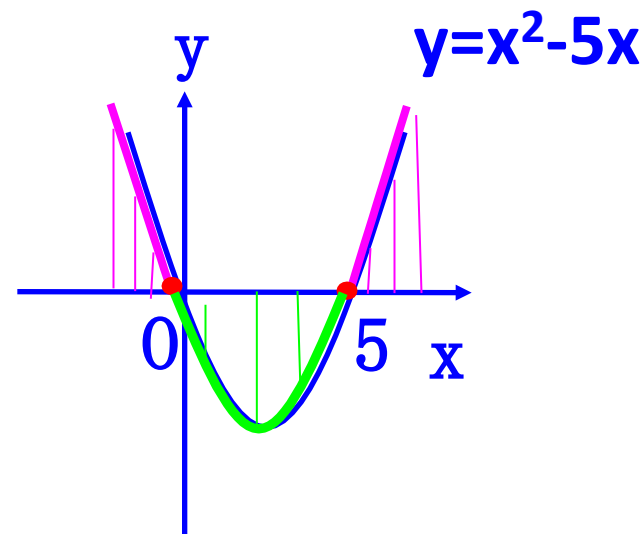
当 $0 < x < 5$ 时, $y < 0$.

当 $x < 0$ 或 $x > 5$ 时, $y > 0$.

由图象可知:

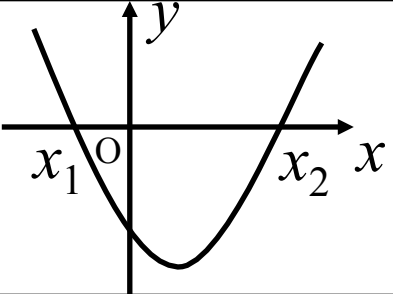
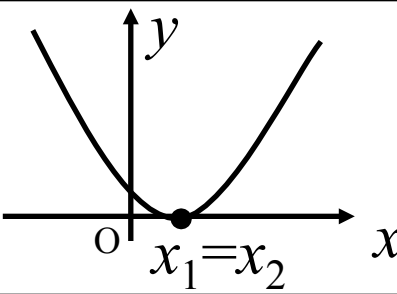
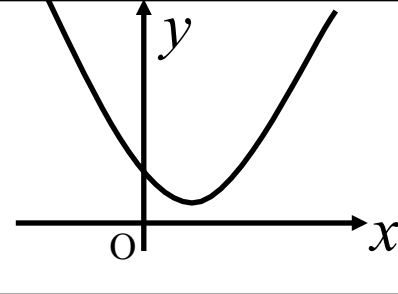
不等式 $x^2 - 5x > 0$ 的解集为 $\{x | x < 0$ 或 $x > 5\}$;

不等式 $x^2 - 5x \leq 0$ 的解集为 $\{x | 0 \leq x \leq 5\}$.



不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 或 $ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$)的解集是什么？

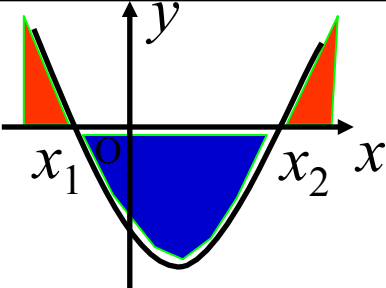
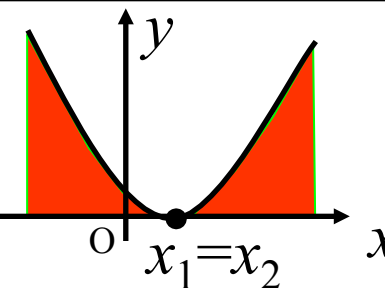
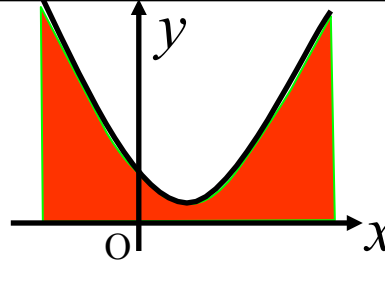
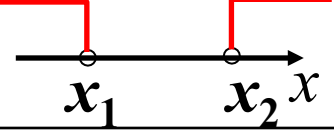


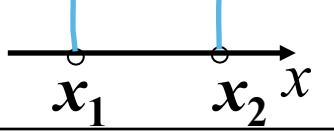
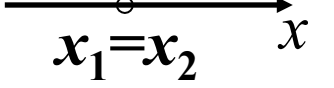
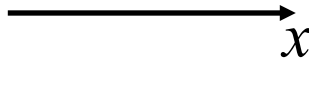
仿照上述过程讨论填写“三个二次”之间的关系表格

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)的图象			
$ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$)的根			
$ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$)的解集			
$ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$)的解集			

讨论总结在这个过程中用到了哪些数学思想和数学方法？

“三个二次”的关系（要牢记）

归纳总结（一元二次不等式的解集与一元二次方程、二次函数的图象的关系）

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)的图象			
$ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$)的根	有两相异实根 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实根
$ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$)的解集	$\{x x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$ 	$\{x x \neq -\frac{b}{2a}\}$ 	R 
$ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$)的解集	$\{x x_1 < x < x_2\}$ 	Φ 	Φ 

开口向上口诀: 大于0取两边, 小于0取中间.

一元二次不等式的解法

三个“二次”关系的实质用数形结合的思想来解读：

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ 的解 $\iff y = ax^2 + bx + c$ 的图像与 x 轴的交点的横坐标；

(2) $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集 $\iff y = ax^2 + bx + c$ 的图像上的点 (x, y) 处于 x 轴上方时，对应的 x 的取值范围的集合；

(3) $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集 $\iff y = ax^2 + bx + c$ 的图像上的点 (x, y) 处于 x 轴下方时，对应的 x 的取值范围的集合；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/105334343040011323>