拓展1 利用递推公式求通项公式常用的方法（精讲）

思维导图

- **公式法求通项**
  - **公式**：$a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge 2,n\in N)$或$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n(n\in N^*)$
  - **条件特征**
    - 前n项和与项、项数的关系
    - 常见形式（1）S_n、n（2）S_n、a_n（3）S_n、n、a_n
  - **解题思路**
    - 考法一：求通项相关的：求首项、列两式、作差、化简
      - 求首项：$\begin{cases}\text{有首项，此步略}\\ \text{无首项，令}n=1\text{进行求解}\end{cases}$
      - 列两式：$\begin{cases}\text{一式含有}S_n\text{，此式题目已给}\\ \text{一式含有}S_{n-1}\text{，根据题目的式子把}n\text{变}n-1\end{cases}$
      - 作差：将上面两式相减
      - 化简：$\begin{cases}\text{(1) 得到通项公式，检验}n=1\text{是否满足条件}\\ \text{(2) 得到等差或等比数列}\\ \text{(3) 得到数列两项的关系式}\end{cases}$
      - 看a_1是否符合$n\ge 2$时a_n的表达式，如果符合，则可以把数列的通项公式合写
      - 否则应写成分段的形式，即$a_n=\begin{cases}S_1 & n=1\\ S_n-S_{n-1} & n\ge 2\end{cases}$
    - 考法二：求前n项和有关的：将$a_n=S_n-S_{n-1}$代替，化简
  - **类比**
    - 前n项积与项或项数关系
    - $a_n=\dfrac{T_n}{T_{n-1}}(n\ge 2\text{且}n\in N)$ 或$a_{n+1}=\dfrac{T_{n+1}}{T_n}(n\in N^*)$ （T_n为数列$\{a_n\}$的前n项积）

求通项方法

- 累加法
  - 条件特征
    - $a_{后}-a_{前}=f(n)$表示含n的式子
  - 解题思路
    - 思路一
      - $a_n-a_1=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\dots+(a_{n-1}-a_{n-2})+(a_n-a_{n-1})$
      - =根据f(n)中与前后项下标的关系写出每个括号的结果
      - =观察f(n)的特征选择合适的求和方法
      - =计算化简
      - 注意：记得最后a_1进行移项
    - 思路二
      - $a_2-a_1=$
      - $a_3-a_2=$
      - $a_4-a_3=$
      - $\dots$
      - $a_{n-1}-a_{n-2}=$
      - $a_n-a_{n-1}=$
      - （1）等式右边根据f(n)中与前后项下标的关系写出等式的结果
      - （2）观察f(n)的特征选择合适的求和方法
      - （3）计算化简
      - （4）记得最后a_1进行移项
- 累乘法
  - 条件特征
    - $\frac{a_{后}}{a_{前}}=f(n)$含有n的式子
  - 解题思路
    - $\frac{a_n}{a_1}=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdot\dots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}$
    - =根据f(n)中的n与前后项下标的关系列式
    - =整理化简
    - 注意：将a_1进行移项

构造等比数列

模型一

通项特征：两项放两边，系数则不同，相差常数项．形如$a_{n+1}=pa_n+k$

解题思路：待定系数法

（1）设方程：设$a_{n+1}+\lambda=p（a_n+\lambda）$

（2）移项解：$a_{n+1}=pa_n+p\lambda-\lambda$，令$p\lambda-\lambda=k$解$\lambda$

（3）λ代入：将λ代入（1）中，再移项$\dfrac{a_{n+1}+\lambda}{a_n+\lambda}=p$，构成等比数列$\{a_n+\lambda\}$

模型二

通项特征：两项放两边，系数则不同，相差一次函数．形如$a_{n+1}=pa_n+kn+b$

解题思路：待定系数法

（1）设方程：设$a_{n+1}+\lambda(n+1)+a=p（a_n+\lambda n+a）$

（2）移项解：$a_{n+1}=pa_n+(p\lambda-\lambda)n+pa-a-\lambda$，对比得$\begin{cases}p\lambda-\lambda=k\\pa-a-\lambda=b\end{cases}$解得$\lambda$和$b$

（3）λ、b代入：将λ代入（1）移项$\dfrac{a_{n+1}+\lambda(n+1)+a}{a_n+\lambda n+a}=p$，构成等比数列$\{a_n+\lambda n+a\}$

模型三

通项特征：两项放两边，系数不同，相差指数函数且底数与项的系数不同．形如$a_{n+1}=pa_n+kb^n$

解题思路：待定系数法

（1）设方程：设$a_{n+1}+\lambda b^{n+1}=p（a_n+\lambda b^n）$

（2）移项解：$a_{n+1}=pa_n+(p-b)\lambda b^n$，令$(p-b)\lambda=k$解$\lambda$

（3）λ代入：将λ代入（1）中，再移项$\dfrac{a_{n+1}+\lambda b^{n+1}}{a_n+\lambda b^n}=p$，构成等比数列$\{a_n+\lambda b^n\}$

构造等差数列

模型一

分式：$a_n=\frac{pa_{n-1}}{ka_{n-1}+p}$ 或 $a_{n+1}=\frac{pa_n}{ka_n+p}$

解法：两边同时取倒数，即

$\frac{1}{a_n}=\frac{ka_{n-1}+p}{pa_{n-1}}=\frac{k}{p}+\frac{1}{a_{n-1}}$ 即 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{k}{p}$

或 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{ka_n+p}{pa_n}=\frac{k}{p}+\frac{1}{a_n}$ 即 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{k}{p}$

$\therefore \left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以首项 $\frac{1}{a_1}$，公差 $\frac{k}{p}$ 的等差数列

又名倒数法

模型二

整式：$a_n-a_{n-1}=ka_na_{n-1}$ 或 $a_n-a_{n+1}=ka_{n+1}a_n$ 两项相减相乘

解法：两边同时除以乘的部分，即

$\frac{a_n}{a_na_{n-1}}-\frac{a_{n-1}}{a_na_{n-1}}=\frac{ka_na_{n-1}}{a_na_{n-1}}\Rightarrow\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=-k\Rightarrow\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 等差数列

$\frac{a_n}{a_na_{n+1}}-\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+1}}=\frac{ka_na_{n+1}}{a_na_{n+1}}\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=k\Rightarrow\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 等差数列

模型三

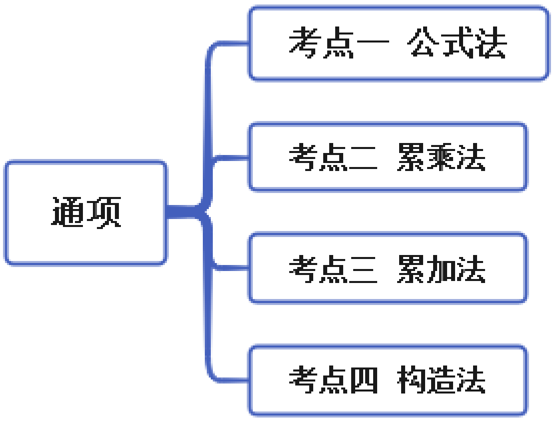
$a_{n+1}=pa_n+kp^n$（$p\neq1/0$ 指数的底数与项数的系数相同）

解法：同时除以 p^{n+1}（注意指数的次数是由后一项的下标决定）

即 $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{pa_n}{p^{n+1}}+\frac{kp^n}{p^{n+1}}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{k}{p}$

$\Rightarrow\left\{\frac{a_n}{p^n}\right\}$ 是首项 $\frac{a_1}{p}$，公差是 $\frac{k}{p}$ 的等差数列

考点呈现



例题剖析

考点一 公式法

【例 1-1】（2022·青海）已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3n^2-2n$，则$a_n=$________.

【例 1-2】（2023·全国·高三专题练习）已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3n^2-2n+1$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为______.

【例 1-3】（2022·广东）已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$2S_n=a_n^2+a_n-2$.求数列$\{a_n\}$的通项公式_______；

【例 1-4】（2022·北京）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=5n$，求$\{a_n\}$的通项公式________________.

【一隅三反】

1．（2022·上海）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=n^2+2n$.求数列$\{a_n\}$的通项公式______________.

2．（2022·广西）设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且$S_n=\frac{1}{3}(n+2)a_n$，求a_n.

3．（2023·安徽省舒城中学）若数列$\{a_n\}$是正项数列，且$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}=n^2+3n(n\in N^*)$，则$a_n=$

_______.

4．（2022·福建 ）已知数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和为S_n，且满足$\ln\left(S_n+1\right)=n+2$，则数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为______.

考点二 累乘法

【例 2-1】（2022·江苏）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n}{n+2}$，$a_1=1$，则数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式是________

【例 2-2]（2022·湖南）已知$a_1=1$，$a_n=n\left(a_{n+1}-a_n\right)\left(n\in\mathbf{N}_+\right)$，则数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式是$a_n=$_________

【一隅三反】

1．（2022·全国·高三专题练习）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$(n+2)a_{n+1}=(n+1)a_n$，且$a_2=\dfrac{1}{3}$，则$a_n=$(　)

A．$\dfrac{n-1}{n+1}$　　B．$\dfrac{1}{2n-1}$　　C．$\dfrac{n-1}{2n-1}$　　D．$\dfrac{1}{n+1}$

2．（2022·全国·高二）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_n=n(a_{n+1}-a_n)(n\in N^*)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=$（　）

A．$2n$　　B．$(\dfrac{n+1}{n})^n$　　C．n^2+1　　D．$n+1$

3．（2022 河北）已知数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和为S_n，且满足$4(n+1)(S_n+1)=(n+2)^2a_n$，则数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式a_n等于___________

考点三 累加法

【例 3-1】（2022·黑龙江）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1$，$a_n=3^{n-1}+a_{n-1}\left(n\geq 2\right)$.

(1)求a_2，a_3；

(2)求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式.

【例 3-2】（2022·哈尔滨）在数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=2$，$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+\ln(1+\dfrac{1}{n})$，则$a_n$等于（　）

A．$2+n\ln n$　　B．$2n+(n-1)\ln n$

C．$2n+n\ln n$　　D．$1+n+n\ln n$

【一隅三反】

1．（2022 山东）已知在数列$\left\{a_n\right\}$的前n项之和为S_n，若$a_1=2, a_{n+1}=a_n+2^{n-1}+1$，则$a_n=$________.

2．（2022·云南）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=-1$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n(n+1)}$，$n\in\mathbf{N}^*$，求通项公式$a_n$．

3．（2021·全国·高二课时练习）设$\{a_n\}$是首项为 1 的正项数列且$na_{n+1}^2-(n+1)a_n^2-a_na_{n+1}=0(n\in\mathrm{N}^*)$，求$a_n$.

考点四 构造法

【例 4-1】（2022·宁夏）已知数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=4, a_{n+1}=4a_n-6$，则a_n等于________________

【例 4-2】（2022·上海）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=\dfrac{1}{2}$，且$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$，则数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为$a_n=$_______.

【例 4-3】（2022·湖北）已知在数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=\dfrac{5}{6}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$，则$a_n=$_______.

【例 4-4】（2022·江西）数列$\{an\}$满足$a_{n+1}=5a_n+3\times5^{n+1}$，$a_1=6$，则数列$\{an\}$的通项公式为____________.

【一隅三反】

1．（2022·青海）在数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+2$，则通项公式$a_n=$_______.

2．（2022·山西）在数列$\left\{a_n\right\}$中，若$a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+2a_n}$，则$a_n=$________.

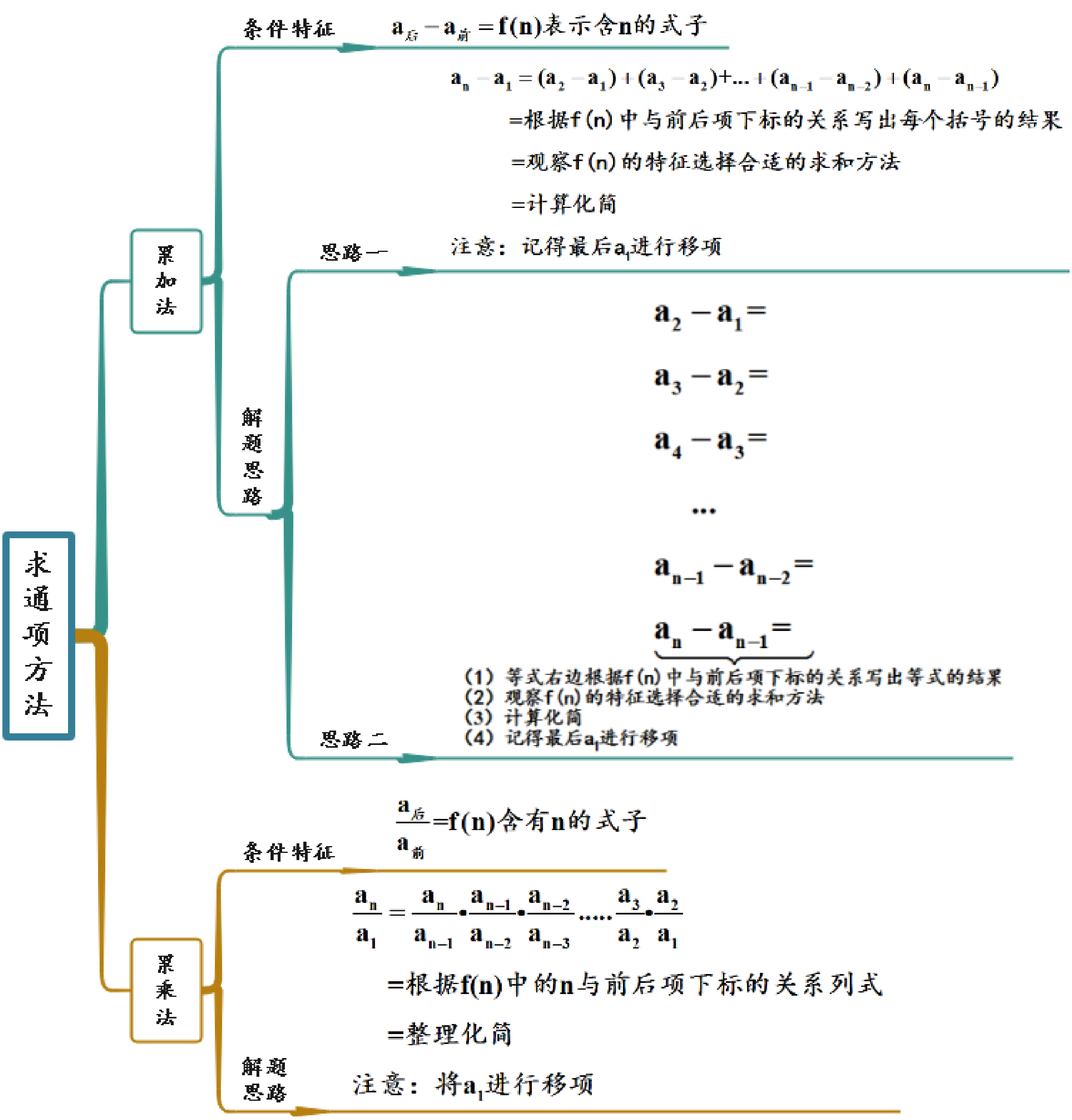
3．（2022 湖南）若数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=6a_n+2^{n+1}$，则数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式$a_n=$________.

拓展1 利用递推公式求通项公式常用的方法（精讲）

思维导图

公式法求通项

- **公式**：$a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge 2,n\in N)$或$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n(n\in N^*)$
- **条件特征**
  - 前n项和与项、项数的关系
  - 常见形式（1）S_n、n(2)S_n、a_n(3)S_n、n、a_n
- **解题思路**
  - 考法一
    - 求通项相关的：求首项、列两式、作差、化简
    - 求首项：$\begin{cases}\text{有首项，此步略}\\ \text{无首项，令}n=1\text{进行求解}\end{cases}$
    - 列两式：$\begin{cases}\text{一式含有}S_n\text{，此式题目已给}\\ \text{一式含有}S_{n-1}\text{，根据题目的式子把}n\text{变}n-1\end{cases}$
    - 作差：将上面两式相减
    - 化简：（1）得到通项公式，检验n=1是否满足条件；（2）得到等差或等比数列；（3）得到数列两项的关系式
    - 看a_1是否符合$n\ge 2$时a_n的表达式，如果符合，则可以把数列的通项公式合写
    - 否则应写成分段的形式，即$a_n=\begin{cases}S_1 & n=1\\ S_n-S_{n-1} & n\ge 2\end{cases}$
  - 考法二
    - 求前n项和有关的：将$a_n=S_n-S_{n-1}$代替，化简
- **类比**
  - 前n项积与项或项数关系
  - $a_n=\dfrac{T_n}{T_{n-1}}(n\ge 2\text{且}n\in N)$ 或$a_{n+1}=\dfrac{T_{n+1}}{T_n}(n\in N^*)$ （T_n为数列$\{a_n\}$的前n项积）


求通项方法
累加法
条件特征
$a_{后}-a_{前}=f(n)$表示含n的式子
解题思路
思路一
$a_n-a_1=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_{n-1}-a_{n-2})+(a_n-a_{n-1})$
=根据f(n)中与前后项下标的关系写出每个括号的结果
=观察f(n)的特征选择合适的求和方法
=计算化简
注意：记得最后a_1进行移项
思路二
$a_2-a_1=$
$a_3-a_2=$
$a_4-a_3=$
…
$a_{n-1}-a_{n-2}=$
$a_n-a_{n-1}=$
（1）等式右边根据f(n)中与前后项下标的关系写出等式的结果
（2）观察f(n)的特征选择合适的求和方法
（3）计算化简
（4）记得最后a_1进行移项
累乘法
条件特征
$\frac{a_{后}}{a_{前}}=f(n)$含有n的式子
解题思路
$\frac{a_n}{a_1}=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdots\cdots\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}$
=根据f(n)中的n与前后项下标的关系列式
=整理化简
注意：将a_1进行移项