

江苏省无锡市江阴四校 2024 年高三第二次模拟考试数学试卷

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 S_n 为前 n 项和, $2a_9 = a_{11} + 12$, 则 S_{13} 的值是 ()

- A. 156 B. 124 C. 136 D. 180

2. 下列说法正确的是 ()

A. 命题“ $\exists x_0 \leq 0, 2x_0 \leq \sin x_0$ ”的否定形式是“ $\forall x > 0, 2x > \sin x$ ”

B. 若平面 α, β, γ , 满足 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ 则 $\alpha // \beta$

C. 随机变量 ξ 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 若 $P(0 < \xi < 1) = 0.4$, 则 $P(\xi > 0) = 0.8$

D. 设 x 是实数, “ $x < 0$ ”是“ $\frac{1}{x} < 1$ ”的充分不必要条件

3. 函数 $f(x) = ax - 2$ 与 $g(x) = e^x$ 的图象上存在关于直线 $y = x$ 对称的点, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{e}{4}\right]$ B. $\left(-\infty, \frac{e}{2}\right]$ C. $(-\infty, e]$ D. $(-\infty, e^2]$

4. 已知集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{3\}$ B. $\{5\}$ C. $\{3, 5\}$ D. $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

5. 已知某口袋中有 3 个白球和 a 个黑球 ($a \in \mathbb{N}^*$), 现从中随机取出一球, 再换回一个不同颜色的球 (即若取出的是白球, 则放回一个黑球; 若取出的是黑球, 则放回一个白球), 记换好球后袋中白球的个数是 ξ . 若 $E\xi = 3$, 则 $D\xi =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

6. 设 $P = \{y | y = -x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\}$, $Q = \{y | y = 2^x, x \in \mathbb{R}\}$, 则

- A. $P \subseteq Q$ B. $Q \subseteq P$
C. $C_{\mathbb{R}}P \subseteq Q$ D. $Q \subseteq C_{\mathbb{R}}P$

7. 已知角 α 的顶点与坐标原点 O 重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 它的终边过点 $P(-3, -4)$, 则 $\tan\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$

的值为（ ）

- A. $-\frac{24}{7}$ B. $-\frac{17}{31}$ C. $\frac{24}{7}$ D. $\frac{17}{31}$

8. 已知圆锥的高为 3，底面半径为 $\sqrt{3}$ ，若该圆锥的顶点与底面的圆周都在同一个球面上，则这个球的体积与圆锥的体积的比值为（ ）

- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{32}{9}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{25}{9}$

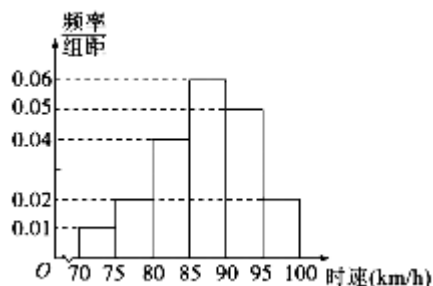
9. 已知单位向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$ ，若向量 $\vec{m} = 2\vec{a}$ ， $\vec{n} = 4\vec{a} - \lambda\vec{b}$ ，且 $\vec{m} \perp \vec{n}$ ，则 $|\vec{n}| =$ （ ）

- A. 2 B. 2 C. 4 D. 6

10. 已知复数 z 满足 $z \cdot i^{2020} = 1 + i^{2019}$ （其中 i 为虚数单位），则复数 z 的虚部是（ ）

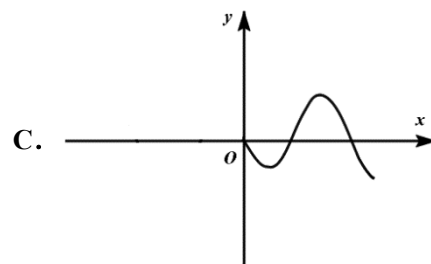
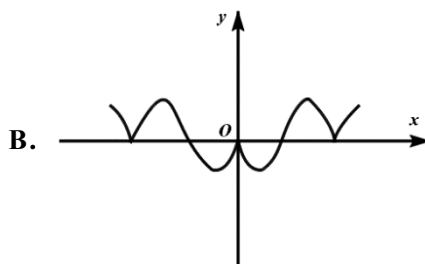
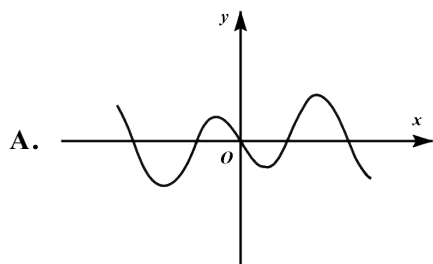
- A. -1 B. 1 C. $-i$ D. i

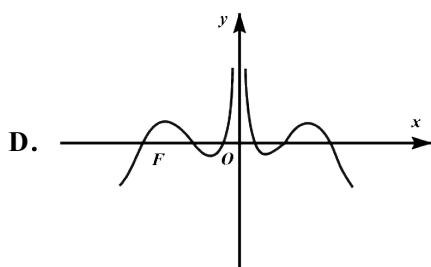
11. 港珠澳大桥于 2018 年 10 月 2 刻日正式通车，它是中国境内一座连接香港、珠海和澳门的桥隧工程，桥隧全长 55 千米。桥面为双向六车道高速公路，大桥通行限速 100km/h，现对大桥某路段上 1000 辆汽车的行驶速度进行抽样调查。画出频率分布直方图（如图），根据直方图估计在此路段上汽车行驶速度在区间[85，90）的车辆数和行驶速度超过 90km/h 的频率分别为（ ）



- A. 300, 0.25 B. 300, 0.35 C. 60, 0.25 D. 60, 0.35

12. 函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \ln|x|$ 图像可能是（ ）





二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 为 60° ，在其内部取点 A ，在半平面 α, β 内分别取点 B, C 。若点 A 到棱 l 的距离为 1，则 $\triangle ABC$ 的周长的最小值为_____。

14. 设全集 $U = \mathbf{R}$ ， $A = \{x \mid -3 < x \leq 1, x \in \mathbf{Z}\}$ ， $B = \{x \mid x^2 - x - 2 \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$ ，则 $A \cap \complement_U B =$ _____。

15. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，

若 $2\cos A(b\cos C + c\cos B) = a = \sqrt{13}$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$ ，

则 $A =$ _____， $b + c =$ _____。

16. 已知 x, y 均为非负实数，且 $x + y \leq 1$ ，则 $4x^2 + 4y^2 + (1 - x - y)^2$ 的取值范围为_____。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x - x^2 + ax (a \in \mathbf{R})$ 。

(1) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(2) 设函数 $f(x)$ 的极值点为 x_0 ，当 a 变化时，点 $(x_0, f(x_0))$ 构成曲线 M ，证明 过原点的任意直线 $y = kx$ 与曲线 M 有且仅有一个公共点。

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = xe^x + x^2 + ax + b$ ，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $4x - 2y - 3 = 0$

(1) 求 a, b 的值；

(2) 证明： $f(x) > \ln x$ 。

19. (12 分) 为增强学生的法治观念，营造“学宪法、知宪法、守宪法”的良好校园氛围，某学校开展了“宪法小卫士”活动，并组织全校学生进行法律知识竞赛。现从全校学生中随机抽取 50 名学生，统计他们的竞赛成绩，已知这 50 名学生的竞赛成绩均在 $[50, 100]$ 内，并得到如下的频数分布表：

分数段	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100]
人数	5	15	15	12	3

(1) 将竞赛成绩在 $[70, 100]$ 内定义为“合格”，竞赛成绩在 $[50, 70)$ 内定义为“不合格”。请将下面的 2×2

列联表补充完整，并判断是否有 95% 的把握认为“法律知识竞赛成绩是否合格”与“是否是高一新生”有关？

	合格	不合格	合计
高一新生	12		
非高一新生		6	
合计			

(2) 在 (1) 的前提下，按“竞赛成绩合格与否”进行分层抽样，从这 50 名学生中抽取 5 名学生，再从这 5 名学生中随机抽取 2 名学生，求这 2 名学生竞赛成绩都合格的概率。

参考公式及数据： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$ 。

$P(K^2 \geq k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

20. (12 分) 设数列 $\{a_n\}$ 是公差为零的等差数列，其前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 1$ ，若 a_1, a_2, a_5 成等比数列。

- (1) 求 a_n 及 S_n ；
- (2) 设 $b_n = \frac{1}{a_{n+1}^2 - 1} (n \in N^*)$ ，设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n ，证明： $T_n < \frac{1}{4}$ 。

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x + a| + |2x - 5| (a > 0)$ 。

- (1) 当 $a = 2$ 时，解不等式 $f(x) \geq 5$ ；
- (2) 当 $x \in [a, 2a - 2]$ 时，不等式 $f(x) \leq |x + 4|$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

22. (10 分) 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ ，过点 $C(-2, 0)$ 的直线 l 交抛物线于 A, B 两点，坐标原点为 O ， $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 12$ 。

- (1) 求抛物线的方程；
- (2) 当以 AB 为直径的圆与 y 轴相切时，求直线 l 的方程。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

因为 $a_7 + a_{11} = 2a_9 = a_{11} + 12$ ，可得 $a_7 = 12$ ，根据等差数列前 n 项和，即可求得答案.

【详解】

$$\text{Q } a_7 + a_{11} = 2a_9 = a_{11} + 12,$$

$$\therefore a_7 = 12,$$

$$\therefore S_{13} = \frac{13(a_1 + a_{13})}{2} = 13a_7 = 13 \times 12 = 156.$$

故选：A.

【点睛】

本题主要考查了求等差数列前 n 项和，解题关键是掌握等差中项定义和等差数列前 n 项和公式，考查了分析能力和计算能力，属于基础题.

2、D

【解析】

由特称命题的否定是全称命题可判断选项 A； α, β 可能相交，可判断 B 选项；利用正态分布的性质可判断选项 C；

$\frac{1}{x} < 1 \Rightarrow x < 0$ 或 $x > 1$ ，利用集合间的包含关系可判断选项 D.

【详解】

命题“ $\exists x_0 \leq 0, 2x_0 \leq \sin x_0$ ”的否定形式是“ $\forall x \leq 0, 2x > \sin x$ ”，故 A 错误； $\alpha \perp \gamma$ ，

$\beta \perp \gamma$ ，则 α, β 可能相交，故 B 错误；若 $P(0 < \xi < 1) = 0.4$ ，则 $P(1 < \xi < 2) = 0.4$ ，所以

$$P(\xi < 0) = \frac{1 - 0.4 - 0.4}{2} = 0.1, \text{ 故 } P(\xi > 0) = 0.9, \text{ 所以 C 错误；由 } \frac{1}{x} < 1, \text{ 得 } x < 0 \text{ 或 } x > 1,$$

故“ $x < 0$ ”是“ $\frac{1}{x} < 1$ ”的充分不必要条件，D 正确.

故选：D.

【点睛】

本题考查命题的真假判断，涉及到特称命题的否定、面面相关的命题、正态分布、充分条件与必要条件等，是一道容易题.

3、C

【解析】

由题可知，曲线 $f(x) = ax - 2$ 与 $y = \ln x$ 有公共点，即方程 $ax - 2 = \ln x$ 有解，可得 $a = \frac{2 + \ln x}{x}$ 有解，令

$h(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$ ，则 $h'(x) = \frac{-1 - \ln x}{x^2}$ ，对 x 分类讨论，得出 $x = \frac{1}{e}$ 时， $h(x)$ 取得极大值 $h\left(\frac{1}{e}\right) = e$ ，也即为最大值，

进而得出结论.

【详解】

解：由题可知，曲线 $f(x) = ax - 2$ 与 $y = \ln x$ 有公共点，即方程 $ax - 2 = \ln x$ 有解，

即 $a = \frac{2 + \ln x}{x}$ 有解，令 $h(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$ ，则 $h'(x) = \frac{-1 - \ln x}{x^2}$ ，

则当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时， $h'(x) > 0$ ；当 $x > \frac{1}{e}$ 时， $h'(x) < 0$ ，

故 $x = \frac{1}{e}$ 时， $h(x)$ 取得极大值 $h\left(\frac{1}{e}\right) = e$ ，也即为最大值，

当 x 趋近于 0 时， $h(x)$ 趋近于 $-\infty$ ，所以 $a \leq e$ 满足条件.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查利用导数研究函数性质的基本方法，考查化归与转化等数学思想，考查抽象概括、运算求解等数学能力，属于难题.

4、C

【解析】

分析：根据集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ， $B = \{2, 3, 4, 5\}$ 可直接求解 $A \cap B = \{3, 5\}$ 。

详解：Q $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ， $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ，

$$\therefore A \cap B = \{3, 5\},$$

故选 C

点睛：集合题也是每年高考的必考内容，一般以客观题形式出现，一般解决此类问题时要先将参与运算的集合化为最简形式，如果是“离散型”集合可采用 Venn 图法解决，若是“连续型”集合则可借助不等式进行运算.

5、B

【解析】

由题意 $\xi = 2$ 或 4 ，则 $D\xi = \frac{1}{2}[(2-3)^2 + (4-3)^2] = 1$ ，故选 B.

6、C

【解析】

解：因为 $P = \{y|y = -x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\} = \{y|y \leq 1\}$ ， $Q = \{y|y = 2^x, x \in \mathbb{R}\} = \{y|y > 0\}$ ，因此选 C

7、B

【解析】

根据三角函数定义得到 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ ，故 $\tan 2\alpha = -\frac{24}{7}$ ，再利用和差公式得到答案.

【详解】

$\because$ 角 α 的终边过点 $P(-3, -4)$ ， $\therefore \tan \alpha = \frac{4}{3}$ ， $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{24}{7}$.

$$\therefore \tan \left(2\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan 2\alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan 2\alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{24}{7} + 1}{1 + \frac{24}{7} \times 1} = -\frac{17}{31}.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查了三角函数定义，和差公式，意在考查学生的计算能力.

8、B

【解析】

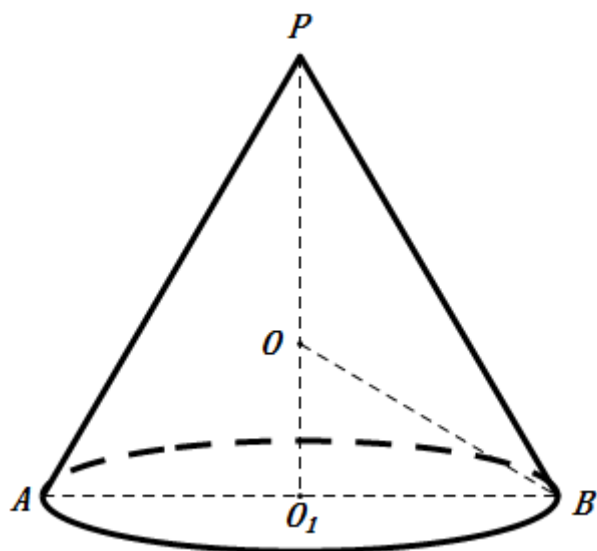
计算求半径为 $R = 2$ ，再计算球体积和圆锥体积，计算得到答案.

【详解】

如图所示：设球半径为 R ，则 $R^2 = (3 - R)^2 + \sqrt{3}^2$ ，解得 $R = 2$.

故求体积为： $V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{32}{3} \pi$ ，圆锥的体积： $V_2 = \frac{1}{3} \pi \sqrt{3}^2 \times 3 = 3\pi$ ，故 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{32}{9}$.

故选：B.



【点睛】

本题考查了圆锥，球体积，圆锥的外接球问题，意在考查学生的计算能力和空间想象能力.

9、C

【解析】

根据 $\vec{m} \perp \vec{n}$ 列方程，由此求得 λ 的值，进而求得 $|\vec{n}|$.

【详解】

由于 $\vec{m} \perp \vec{n}$ ，所以 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$ ，即

$$2\vec{a} \cdot (4\vec{a} - \lambda\vec{b}) = 8\vec{a}^2 - 2\lambda\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 - 2\lambda \cdot \cos \frac{3\pi}{4} = 8 + \sqrt{2}\lambda = 0,$$

$$\text{解得 } \lambda = -\frac{8}{\sqrt{2}} = -4\sqrt{2}.$$

$$\text{所以 } \vec{n} = 4\vec{a} + 4\sqrt{2}\vec{b}$$

所以

$$|\vec{n}| = \sqrt{(4\vec{a} + 4\sqrt{2}\vec{b})^2} = \sqrt{16\vec{a}^2 + 32\sqrt{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + 32\vec{b}^2} = \sqrt{48 + 32\sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4}} = \sqrt{48 - 32} = 4.$$

故选：C

【点睛】

本小题主要考查向量垂直的表示，考查向量数量积的运算，考查向量模的求法，属于基础题.

10、A

【解析】

由虚数单位 i 的运算性质可得 $z = 1 - i$ ，则答案可求.

【详解】

解：∵ $i^4 = 1$ ，

$$\therefore i^{2020} = i^{4 \times 505} = 1, \quad i^{2019} = i^{4 \times 504 + 3} = -i,$$

则 $z \cdot i^{2020} = 1 + i^{2019}$ 化为 $z = 1 - i$ ，

∴ z 的虚部为 -1 。

故选：A.

【点睛】

本题考查了虚数单位 i 的运算性质、复数的概念，属于基础题。

11、B

【解析】

由频率分布直方图求出在此路段上汽车行驶速度在区间 $[85, 90)$ 的频率即可得到车辆数，同时利用频率分布直方图能求行驶速度超过 90 km/h 的频率。

【详解】

由频率分布直方图得：

在此路段上汽车行驶速度在区间 $[85, 90)$ 的频率为 $0.06 \times 5 = 0.3$ ，

∴ 在此路段上汽车行驶速度在区间 $[85, 90)$ 的车辆数为： $0.3 \times 1000 = 300$ ，

行驶速度超过 90 km/h 的频率为： $(0.05 + 0.02) \times 5 = 0.35$ 。

故选：B.

【点睛】

本题考查频数、频率的求法，考查频率分布直方图的性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题。

12、D

【解析】

先判断函数的奇偶性可排除选项 A, C，当 $x \rightarrow 0^+$ 时，可分析函数值为正，即可判断选项。

【详解】

$$Q \ y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \ln|x| = -\cos x \ln|x|,$$

$$\therefore -\cos(-x) \ln|-x| = -\cos x \ln|x|,$$

即函数为偶函数，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/106225215010010123>