

高二数学

4.考试结束后，将答题卡交回。

D. $\left\{ \overset{\text{r}}{a}, \overset{\text{r}}{a} + \overset{\text{r}}{b}, \overset{\text{r}}{a} + \overset{\text{r}}{c} \right\}$

B. $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$

C. $x = \frac{1}{6}, y = -\frac{3}{2}$

D. $x = -\frac{1}{6}, y = \frac{2}{3}$

【答案】C

【解析】

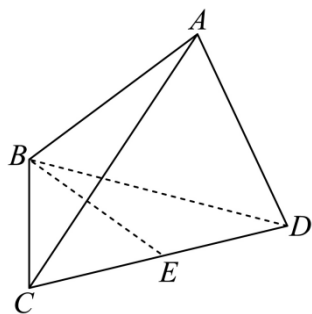
【分析】利用空间向量平行列出关于 x, y 的方程组，解之即可求得 x, y 的值.

【详解】因为 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，所以 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ，由题意可得 $(2x, 1, 3) = \lambda(1, -2y, 9) = (\lambda, -2\lambda y, 9\lambda)$ ，

$$\text{所以 } \begin{cases} 2x = \lambda \\ 1 = -2\lambda y \\ 3 = 9\lambda \end{cases} \text{ 则 } \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{6} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

故选：C.

3. 如图所示，在四面体 $A-BCD$ 中，点 E 是 CD 的中点，记 $\vec{AB} = \vec{a}$ ， $\vec{AC} = \vec{b}$ ， $\vec{AD} = \vec{c}$ ，则 $\vec{BE}$ 等于
()



A. $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

B. $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

C. $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

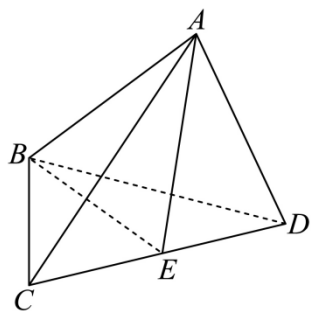
D. $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用空间向量的线性运算，用基底表示向量.

【详解】连接 AE ，如图所示，



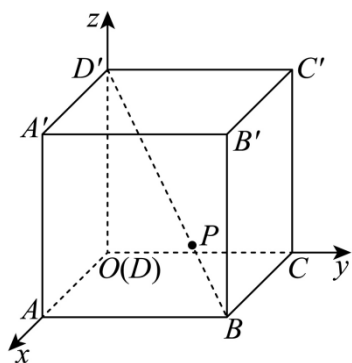
$$\because E \text{ 是 } CD \text{ 的中点, } \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}, \therefore \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}).$$

在 $\triangle ABE$ 中, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, 又 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$,

$$\therefore \overrightarrow{BE} = -\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

故选: A.

4. 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 1, 且 $BP = \frac{1}{3}BD'$, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则点 P 的坐标为 ()



- A. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ B. $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ C. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ D. $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】利用向量的线性运算及向量的坐标表示即可求解.

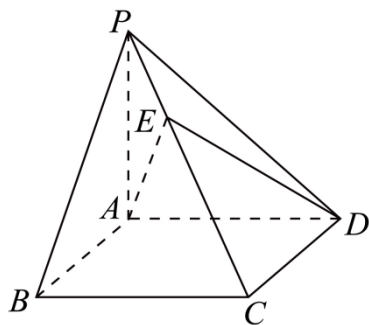
【详解】记 x, y, z 轴正方向上的单位向量分别为 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, 则 $\overrightarrow{DA} = \vec{i}, \overrightarrow{DC} = \vec{j}, \overrightarrow{DD'} = \vec{k}$,

$$\begin{aligned} \text{因为 } \overrightarrow{DP} &= \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'P} = \overrightarrow{DD'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{D'B} = \overrightarrow{DD'} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{DD'} + \frac{2}{3}(-\overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DD'} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}, \end{aligned}$$

所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

故选: D.

5. 我国古代数学名著《九章算术》中, 将底面为矩形且一侧棱垂直于底面的四棱锥称为阳马. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 为阳马, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $AB = AD = AP = 3$, $\overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{PE}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE} =$ ()



- A. -3 B. 3 C. 2 D. 5

【答案】B

【解析】

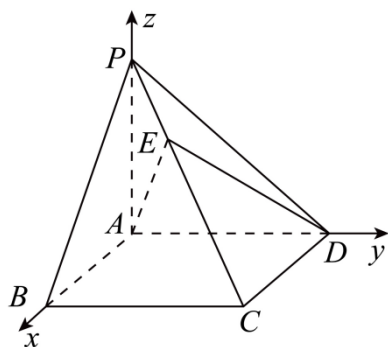
【分析】根据题意建立空间直角坐标系计算求解即可.

【详解】因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA \perp AB, PA \perp AD$,

又因为四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $AB \perp AD$,

以 A 为坐标原点, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x , y , z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $D(0,3,0)$, $C(3,3,0)$, $P(0,0,3)$, 则 $E(1,1,2)$,

所以 $\overrightarrow{AE} = (1,1,2)$, $\overrightarrow{DE} = (1,-2,2)$, 所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE} = 1 - 2 + 4 = 3$.

故选: B

6. 函数 $f(x) = \cos x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ 的最小值为 ()

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】D

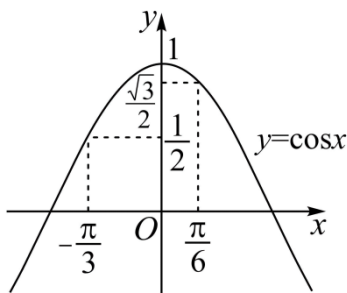
【解析】

【分析】由 $f(x) = \cos x$ 的图像，即可得出 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时 $f(x)$ 的最小值.

【详解】由 $f(x) = \cos x$ 的图像可知， $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时， $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

所以 $f(x)_{\min} = \frac{1}{2}$,

故选：D.



7. 已知平面 α 的一个法向量 $\vec{n} = (1, -1, 2)$ ， $A(0, 1, 2)$ 是平面 α 内一点， $P(2, 1, 4)$ 是平面 α 外一点，则点 P 到平面 α 的距离是 ()

A. $2\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{6}$

D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】根据空间向量点到面的距离公式直接进行求解即可.

【详解】因为 $A(0, 1, 2)$ ， $P(2, 1, 4)$ ，则 $\vec{AP} = (2, 0, 2)$ ，

点 $A(0, 1, 2)$ 在平面 α 内，点 $P(2, 1, 4)$ 平面 α 外，

平面 α 的一个法向量 $\vec{n} = (1, -1, 2)$ ，

所以点 $P(2, 1, 4)$ 到平面 α 的距离 $d = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|2 + 0 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

故选：C.

8. 设直线 l 的方程为 $y - x \cos \theta + 3 = 0 (\theta \in \mathbf{R})$ ，则直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是 ()

A. $[0, \pi)$

B. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

C. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

D. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

【答案】C

【解析】

【分析】求出直线 l 的斜率的取值范围，结合倾斜角的取值范围可得结果.

【详解】直线 l 的方程可化为 $y = x \cos \theta - 3$ ，所以， $\tan \alpha = \cos \theta \in [-1, 1]$ ，

因为 $0 \leq \alpha < \pi$ ，因此，直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$.

故选：C.

二、多选题（本大题共3小题，每小题6分，共18分）

9. （多选）下面关于空间直角坐标系的叙述正确的是（ ）

- A. 点 $P(1, -1, 0)$ 与点 $Q(1, 1, 0)$ 关于 z 轴对称
- B. 点 $A(-3, -1, 4)$ 与点 $B(3, -1, -4)$ 关于 y 轴对称
- C. 点 $A(-3, -1, 4)$ 与点 $B(3, -1, -4)$ 关于平面 xOz 对称
- D. 空间直角坐标系中的三条坐标轴组成的平面把空间分为八个部分

【答案】BD

【解析】

【分析】结合空间直角坐标系的概念对选项逐一分析即可.

【详解】点 $P(1, -1, 0)$ 与点 $Q(1, 1, 0)$ 关于 x 轴对称，故A错误；

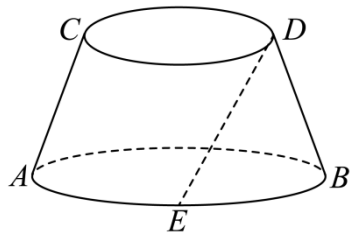
点 $A(-3, -1, 4)$ 与 $B(3, -1, -4)$ 关于 y 轴对称，故B正确；

点 $A(-3, -1, 4)$ 与 $B(3, -1, -4)$ 不关于平面 xOz 对称，故C错误；

空间直角坐标系中的三条坐标轴组成的平面把空间分为八个部分，故D正确.

故选：BD.

10. 如图，已知圆台的上底面半径为1，下底面半径为2，母线长为2， AB ， CD 分别为上、下底面的直径， AC ， BD 为圆台的母线， E 为弧 AB 的中点，则（ ）



A. 圆台的侧面积为 6π

B. 直线 AC 与下底面所成的角的大小为 $\frac{\pi}{3}$

C. 圆台的体积为 $\sqrt{3}$

D. 异面直线 AC 和 DE 所成的角的大小为 $\frac{\pi}{4}$

【答案】ABD

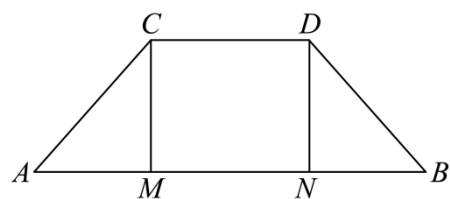
【解析】

【分析】由圆台的侧面积公式以及体积公式即可判断 A，由线面角的定义即可判断 B，由异面直线所成角的定义即可判断 D.

【详解】由题意可得上底面半径为 $r_1 = 1$ ，下底面圆半径为 $r_2 = 2$ ，母线 $l = 2$ ，

则圆台的侧面积为 $S = \pi(r_1 + r_2) \cdot l = \pi(1 + 2) \times 2 = 6\pi$ ，故 A 正确；

做圆台的轴截面如图所示，做 $CM \perp AB, DN \perp AB$ ，



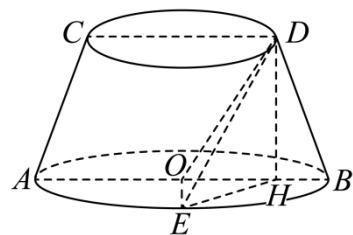
则直线 AC 与下底面所成的角为 $\angle CAB$ ，且 $CD = MN = 2$ ，

则 $AM = BN = 1$ ，且 $AC = 2$ ，

则 $\cos \angle CAB = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2}$ ，所以 $\angle CAB = \frac{\pi}{3}$ ，故 B 正确；

因为上底面圆的面积 $S_1 = \pi r_1^2 = \pi$ ， $S_2 = \pi r_2^2 = 4\pi$ ，圆台的高 $h = CM = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ，

则圆台的体积为 $V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}) \cdot h = \frac{1}{3}(\pi + 4\pi + \sqrt{\pi \cdot 4\pi}) \times \sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3}\pi$ ，故 C 错误；



取 AB 中点 O ，连接 OD, OE, DE ，由 E 为弧 AB 的中点，可得 $OE \perp AB$ ，

过点 D ，作 $DH \perp AB$ ，连接 EH ，

则 $OH = \frac{1}{2}OB = 1$ ，且 $OA = CD = 2$ ，且 $OA \parallel CD$ ，

则四边形 $AODC$ 为平行四边形，所以 $AC \parallel OD$ ，

则异面直线 AC 和 DE 所成的角即为 OD 与 DE 所成角，即为 $\angle ODE$ ，

又 $DH = h = \sqrt{3}$ ， $EH = \sqrt{OE^2 + OH^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ，

所以 $DE = \sqrt{DH^2 + EH^2} = \sqrt{3+5} = 2\sqrt{2}$,

在 $\triangle ODE$ 中, $OD = DE = 2$, $DE = 2\sqrt{2}$,

则 $\triangle ODE$ 为等腰直角三角形, 则 $\angle ODE = \frac{\pi}{4}$, 故 D 正确;

故选: ABD.

11. 已知 $\tan \alpha = 2 \tan \beta$, 则 ()

A. $\exists \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $\alpha = 2\beta$

B. 若 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{2}{5}$, 则 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{5}$

C. 若 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{2}{5}$, 则 $\cos(2\alpha + 2\beta) = -\frac{7}{25}$

D. 若 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\tan(\alpha - \beta)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

【答案】BD

【解析】

【分析】根据方程 $\frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = 2 \tan \beta$ 无解, 可判定 A 错误; 根据题意求得 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{5}$, 结合两角差

的正弦公式, 可判定 B 正确; 结合两角和的正弦公式, 求得 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$, 利用余弦的倍角公式, 可判

定 C 错误; 化简 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{\frac{1}{\tan \beta} + 2 \tan \beta}$, 结合基本不等式, 可判定 D 正确.

【详解】对于 A 中, 若 $\alpha = 2\beta$, 可得 $\tan \alpha = \tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta}$

因为 $\tan \alpha = 2 \tan \beta$, 可得 $\frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = 2 \tan \beta$, 解得 $\tan \beta = 0$,

又因为 $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\tan \beta > 0$, 所以方程无解, 所以 A 错误;

对于 B 中, 因为 $\tan \alpha = 2 \tan \beta$, 可得 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin \beta}{\cos \beta}$, 所以 $\sin \alpha \cos \beta = 2 \cos \alpha \sin \beta$,

又因为 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{2}{5}$, 所以 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{5}$,

则 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{5}$, 所以 B 正确;

对于 C 中, 由 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5}$,

则 $\cos(2\alpha + 2\beta) = 1 - 2\sin^2(\alpha + \beta) = \frac{7}{25}$, 所以 C 错误;

对于 D 中, 因为 $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 可得 $\tan \beta > 0$, 且 $\tan \alpha = 2 \tan \beta$,

$$\text{则 } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\tan \beta}{1 + 2 \tan^2 \beta} = \frac{1}{\frac{1}{\tan \beta} + 2 \tan \beta} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

当且仅当 $\frac{1}{\tan \beta} = 2 \tan \beta$ 时, 即 $\tan \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立,

所以 $\tan(\alpha - \beta)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 所以 D 正确.

故选: BD.

三、填空题 (本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

12. 过不重合的 $A(m^2 + 2, m^2 - 3), B(3 - m - m^2, 2m)$ 两点的直线 l 的倾斜角为 45° , 则 m 的取值为 _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】由题意得 $\frac{m^2 - 3 - 2m}{m^2 + 2 - (3 - m - m^2)} = 1$, 可求出 m 的取值.

【详解】由题意知 $k_{AB} = \tan 45^\circ = 1$,

$$\text{所以 } \frac{m^2 - 3 - 2m}{m^2 + 2 - (3 - m - m^2)} = 1, \text{ 即 } \frac{m^2 - 3 - 2m}{m^2 + 2 - 3 + m + m^2} = 1,$$

化简得 $m^2 + 3m + 2 = 0$, 解得 $m = -1$ 或 $m = -2$

当 $m = -1$ 时, $A(3, -2), B(3, -2)$ 重合, 不符合题意舍去,

当 $m = -2$ 时, $A(6, 1), B(1, -4)$, 符合题意,

所以 $m = -2$,

故答案为: -2

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\frac{\sin A - \sin B}{\sin C - \sin B} = \frac{c}{a+b}$, 则 $A =$ _____.

【答案】 $\frac{\pi}{3}$ 或 60°

【解析】

【分析】 先根据正弦定理化简题干条件可得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$, 进而结合余弦定理即可求解.

【详解】 对于 $\frac{\sin A - \sin B}{\sin C - \sin B} = \frac{c}{a+b}$,

由正弦定理得 $\frac{a-b}{c-b} = \frac{c}{a+b}$,

即 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$,

由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$,

又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

故答案为: $\frac{\pi}{3}$.

14. 已知两点 $A(-3, 4)$, $B(3, 2)$, 过点 $P(1, 0)$ 的直线 l 与线段 AB 有公共点, 则直线 l 的斜率 k 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

【解析】

【分析】 根据两点间的斜率公式, 利用数形结合即可求出直线斜率的取值范围.

【详解】 解: Q 点 $A(-3, 4)$, $B(3, 2)$, 过点 $P(1, 0)$ 的直线 L 与线段 AB 有公共点,

$\therefore$ 直线 l 的斜率 $k \dots k_{PB}$ 或 k_{PA} ,

Q PA 的斜率为 $\frac{4-0}{-3-1} = -1$, PB 的斜率为 $\frac{2-0}{3-1} = 1$,

$\therefore$ 直线 l 的斜率 $k \dots 1$ 或 $k_{PA} = -1$, 即 $k \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$,

故答案为: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/107005143015006200>