

2025 届北京西城 161 中学高三第五次模拟考试数学试卷

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 第七届世界军人运动会于 2019 年 10 月 18 日至 27 日在中国武汉举行, 中国队以 133 金 64 银 42 铜位居金牌榜和奖牌榜的首位。运动会期间有甲、乙等五名志愿者被分配到射击、田径、篮球、游泳四个运动场地提供服务, 要求每个人都要被派出去提供服务, 且每个场地都要有志愿者服务, 则甲和乙恰好在同一组的概率是 ()

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{40}$ D. $\frac{9}{40}$

2. 已知 x, y 满足条件 $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ y \leq x \\ 2x + y + k \leq 0 \end{cases}$ (k 为常数), 若目标函数 $z = 3x + y$ 的最大值为 9, 则 $k =$ ()

- A. -16 B. -6 C. $-\frac{27}{4}$ D. $\frac{27}{4}$

3. 为了加强“精准扶贫”, 实现伟大复兴的“中国梦”, 某大学派遣甲、乙、丙、丁、戊五位同学参加 A、B、C 三个贫困县的调研工作, 每个县至少去 1 人, 且甲、乙两人约定去同一个贫困县, 则不同的派遣方案共有 ()

- A. 24 B. 36 C. 48 D. 64

4. 若 x, a, b 均为任意实数, 且 $(a+2)^2 + (b-3)^2 = 1$, 则 $(x-a)^2 + (\ln x - b)^2$ 的最小值为 ()

- A. $3\sqrt{2}$ B. 18 C. $3\sqrt{2} - 1$ D. $19 - 6\sqrt{2}$

5. 若复数 $z = (2+i)(1+i)$ (i 是虚数单位), 则复数 z 在复平面内对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

6. 已知双曲线 $M: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 的焦距为 $2c$, 若 M 的渐近线上存在点 T , 使得经过点 T 所作的圆

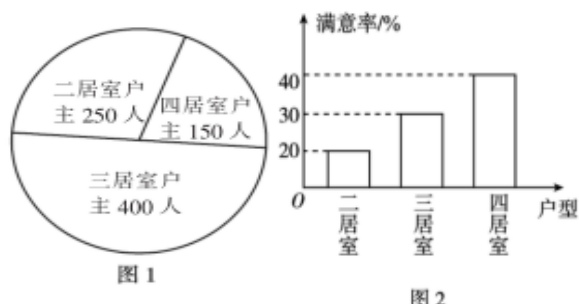
$(x-c)^2 + y^2 = a^2$ 的两条切线互相垂直, 则双曲线 M 的离心率的取值范围是 ()

- A. $(1, \sqrt{2}]$ B. $(\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ C. $(\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ D. $(\sqrt{3}, \sqrt{5}]$

7. 设复数 z 满足 $\frac{i^3}{z} = 1+i$, 则 $z =$ ()

- A. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ B. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ C. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ D. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

8. 已知我市某居民小区户主人数和户主对户型结构的满意率分别如图和如图所示，为了解该小区户主对户型结构的满意程度，用分层抽样的方法抽取30%的户主进行调查，则样本容量和抽取的户主对四居室满意的人数分别为



- A. 240, 18 B. 200, 20
C. 240, 20 D. 200, 18

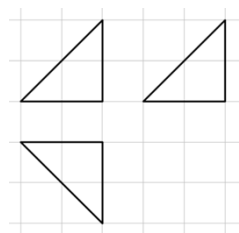
9. 已知不同直线 l 、 m 与不同平面 α 、 β ，且 $l \subset \alpha$ ， $m \subset \beta$ ，则下列说法中正确的是 ()

- A. 若 $\alpha // \beta$ ，则 $l // m$ B. 若 $\alpha \perp \beta$ ，则 $l \perp m$
C. 若 $l \perp \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$ D. 若 $\alpha \perp \beta$ ，则 $m \perp \alpha$

10. 设命题 p : 函数 $f(x) = e^x + e^{-x}$ 在 R 上递增，命题 q : 在 $\triangle ABC$ 中， $A > B \Leftrightarrow \cos A < \cos B$ ，下列为真命题的是 ()

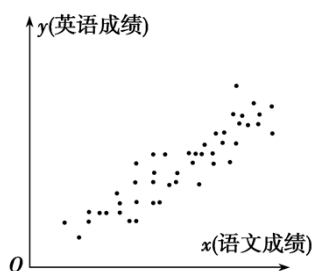
- A. $p \wedge q$ B. $p \vee (\neg q)$ C. $(\neg p) \wedge q$ D. $(\neg p) \wedge (\neg q)$

11. 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗线画出的是某几何体的三视图，则该几何体的表面积 ()



- A. $6 + 2\sqrt{3}$ B. $6 + 2\sqrt{2}$ C. $4 + 4\sqrt{2}$ D. $4 + 4\sqrt{3}$

12. 为研究语文成绩和英语成绩之间是否具有线性相关关系，统计两科成绩得到如图所示的散点图(两坐标轴单位长度相同)，用回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 近似地刻画其相关关系，根据图形，以下结论最有可能成立的是 ()



- A. 线性相关关系较强, b 的值为 1.25
 B. 线性相关关系较强, b 的值为 0.83
 C. 线性相关关系较强, b 的值为 -0.87
 D. 线性相关关系太弱, 无研究价值

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_2 = 3$, $S_4 = 16$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d =$ _____, 通项公式

$a_n =$ _____.

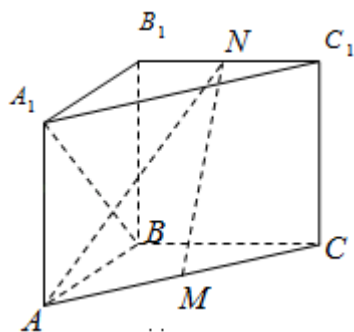
14. 某同学周末通过抛硬币的方式决定出去看电影还是在家学习, 抛一枚硬币两次, 若两次都是正面朝上, 就在家学习, 否则出去看电影, 则该同学在家学习的概率为_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2a \cos C = b \cos C + c \cos B$, 则 $C =$ _____.

16. 函数 $f(x) = \cos x - \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 的零点个数为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = AA_1$, M, N 分别是 AC, B_1C_1 的中点. 求证:



(1) $MN \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ;

(2) $AN \perp A_1B$.

18. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点是 F_1, F_2 , $M(\sqrt{2}, 1)$ 在椭圆 C 上, 且

$|MF_1| + |MF_2| = 4$, O 为坐标原点, 直线 l 与直线 OM 平行, 且与椭圆交于 A, B 两点. 连接 MA, MB 与 x 轴交于点 $D,$

E .

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 求证: $\left| \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} \right|$ 为定值.

19. (12 分) 手工艺是一种生活态度和对传统的坚持, 在我国有很多手工艺品制作村落, 村民的手工技艺世代相传, 有些村落制造出的手工艺品不仅全国闻名, 还大量远销海外. 近年来某手工艺品村制作的手工艺品在国外备受欢迎, 该村村民成立了手工艺品外销合作社, 为严把质量关, 合作社对村民制作的每件手工艺品都请 3 位行家进行质量把关, 质量把关程序如下: (i) 若一件手工艺品 3 位行家都认为质量过关, 则该手工艺品质量为 A 级; (ii) 若仅有 1 位行家认为质量不过关, 再由另外 2 位行家进行第二次质量把关, 若第二次质量把关这 2 位行家都认为质量过关, 则该手工艺品质量为 B 级, 若第二次质量把关这 2 位行家中有 1 位或 2 位认为质量不过关, 则该手工艺品质量为 C 级; (iii) 若有 2 位或 3 位行家认为质量不过关, 则该手工艺品质量为 D 级. 已知每一次质量把关中一件手工艺品被 1 位行家认为质量不过关的概率为 $\frac{1}{3}$, 且各手工艺品质量是否过关相互独立.

(1) 求一件手工艺品质量为 B 级的概率;

(2) 若一件手工艺品质量为 A, B, C 级均可外销, 且利润分别为 900 元, 600 元, 300 元, 质量为 D 级不能外销, 利润记为 100 元.

①求 10 件手工艺品中不能外销的手工艺品最有可能是多少件;

②记 1 件手工艺品的利润为 X 元, 求 X 的分布列与期望.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - mx + 2 \ln x + 4$.

(1) 当 $m = 5$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 设直线 l 是曲线 $y = f(x)$ 的切线, 若 l 的斜率存在最小值 -2, 求 m 的值, 并求取得最小斜率时切线 l 的方程.

(3) 已知 $f(x)$ 分别在 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ 处取得极值, 求证: $f(x_1) + f(x_2) < 2$.

21. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A、B, 焦距为 2, 直

线 l 与椭圆交于 C, D 两点 (均异于椭圆的左、右顶点). 当直线 l 过椭圆的右焦点 F 且垂直于 x 轴时, 四边形 ACBD 的面积为 6.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 设直线 AC, BD 的斜率分别为 k_1, k_2 .

①若 $k_2 = 3k_1$, 求证: 直线 l 过定点;

②若直线 l 过椭圆的右焦点 F, 试判断 $\frac{k_1}{k_2}$ 是否为定值, 并说明理由.

22. (10 分) 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 直线 $y = \frac{2b}{3}$ 与 C 交于 A, B 两点,

$$\angle AF_2B = 90^\circ, \text{ 且 } S_{\Delta F_2AB} = \frac{20}{9}.$$

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知点 P 是 C 上的任意一点, 不经过原点 O 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点, 直线 PM, PN, MN, OP 的斜率都存在, 且 $k_{MN} + k_{OP} = 0$, 求 $k_{PM} \cdot k_{PN}$ 的值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

根据题意, 五人分成四组, 先求出两人组成一组的所有可能的分组种数, 再将甲乙组成一组的情况, 即可求出概率.

【详解】

五人分成四组, 先选出两人组成一组, 剩下的人各自成一组,

所有可能的分组共有 $C_5^2 = 10$ 种,

甲和乙分在同一组, 则其余三人各自成一组, 只有一种分法, 与场地无关,

故甲和乙恰好在同一组的概率是 $\frac{1}{10}$.

故选: A.

【点睛】

本题考查组合的应用和概率的计算, 属于基础题.

2、B

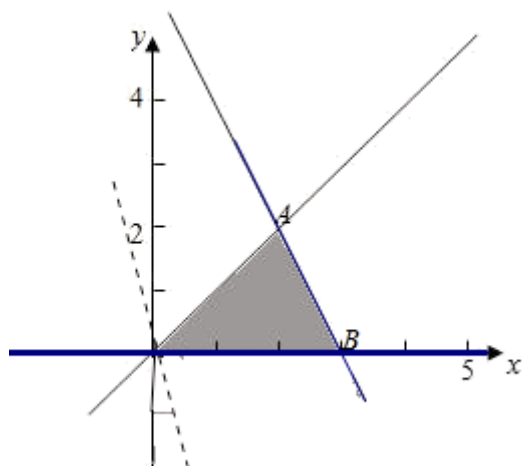
【解析】

由目标函数 $z = 3x + y$ 的最大值为 9, 我们可以画出满足条件 件 $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ y \leq x \\ 2x + y \leq k \end{cases} (k$

为常数)的可行域,根据目标函数的解析式形式,分析取得最优解的点的坐标,然后根据分析列出一个含参数 k 的方程组,消参后即可得到 k 的取值.

【详解】

画出 x, y 满足的 $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ y \leq x \\ 2x + y + k \leq 0 \end{cases}$ (k 为常数)可行域如下图:



由于目标函数 $z = 3x + y$ 的最大值为9,

可得直线 $y = 0$ 与直线 $9 = 3x + y$ 的交点 $B(3, 0)$,

使目标函数 $z = x + 3y$ 取得最大值,

将 $x = 3, y = 0$ 代入 $2x + y + k = 0$ 得: $k = -6$.

故选: B.

【点睛】

如果约束条件中含有参数,我们可以先画出不含参数的几个不等式对应的平面区域,分析取得最优解是哪两条直线的交点,然后得到一个含有参数的方程(组),代入另一条直线方程,消去 x, y 后,即可求出参数的值.

3、B

【解析】

根据题意,有两种分配方案,一是3:1:1,二是2:2:1,然后各自全排列,再求和.

【详解】

当按照3:1:1进行分配时,则有 $C_3^1 A_3^3 = 18$ 种不同的方案;

当按照2:2:1进行分配,则有 $C_3^2 A_3^3 = 18$ 种不同的方案.

故共有36种不同的派遣方案,

故选：B.

【点睛】

本题考查排列组合、数学文化，还考查数学建模能力以及分类讨论思想，属于中档题.

4、D

【解析】

该题可以看做是圆上的动点到曲线 $y = \ln x$ 上的动点的距离的平方的最小值问题，可以转化为圆心到曲线 $y = \ln x$ 上的动点的距离减去半径的平方的最值问题，结合图形，可以断定那个点应该满足与圆心的连线与曲线在该点的切线垂直的问题来解决，从而求得切点坐标，即满足条件的点，代入求得结果.

【详解】

由题意可得，其结果应为曲线 $y = \ln x$ 上的点与以 $C(-2, 3)$ 为圆心，以1为半径的圆上的点的距离的平方的最小值，可以求曲线 $y = \ln x$ 上的点与圆心 $C(-2, 3)$ 的距离的最小值，在曲线 $y = \ln x$ 上取一点 $M(m, \ln m)$ ，曲线有 $y = \ln x$ 在点 M 处的切线的斜率为 $k' = \frac{1}{m}$ ，从而有 $k_{CM} \cdot k' = -1$ ，即 $\frac{\ln m - 3}{m + 2} \cdot \frac{1}{m} = -1$ ，整理得 $\ln m + m^2 + 2m - 3 = 0$ ，解得 $m = 1$ ，所以点 $(1, 0)$ 满足条件，其到圆心 $C(-2, 3)$ 的距离为 $d = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-0)^2} = 3\sqrt{2}$ ，故其结果为 $(3\sqrt{2} - 1)^2 = 19 - 6\sqrt{2}$ ，

故选 D.

【点睛】

本题考查函数在一点处切线斜率的应用，考查圆的方程，两条直线垂直的斜率关系，属中档题.

5、A

【解析】

将 z 整理成 $a + bi$ 的形式，得到复数所对应的点，从而可选出所在象限.

【详解】

解： $z = (2 + i)(1 + i) = 2 + i^2 + 3i = 1 + 3i$ ，所以 z 所对应的点为 $(1, 3)$ 在第一象限.

故选:A.

【点睛】

本题考查了复数的乘法运算，考查了复数对应的坐标.易错点是误把 i^2 当成1进行计算.

6、B

【解析】

由 $b > a$ 可得 $e > \sqrt{2}$ ；由过点 T 所作的圆的两条切线互相垂直可得 $|TF| = \sqrt{2}a$ ，又焦点 $F(c, 0)$ 到双曲线渐近线的距离为 b ，则 $|TF| = \sqrt{2}a \geq b$ ，进而求解.

【详解】

$$Q\ b > a, \text{ 所以离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} > \sqrt{2},$$

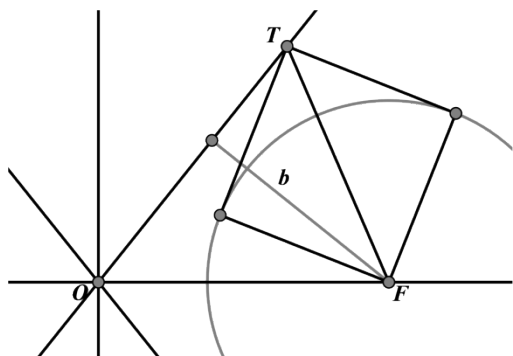
又圆 $(x-c)^2 + y^2 = a^2$ 是以 $F(c, 0)$ 为圆心, 半径 $r = a$ 的圆, 要使得经过点 T 所作的圆的两条切线互相垂直, 必有

$$|TF| = \sqrt{2}a,$$

而焦点 $F(c, 0)$ 到双曲线渐近线的距离为 b , 所以 $|TF| = \sqrt{2}a \geq b$, 即 $\frac{b}{a} \leq \sqrt{2}$,

所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \leq \sqrt{3}$, 所以双曲线 M 的离心率的取值范围是 $(\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

故选: B



【点睛】

本题考查双曲线的离心率的范围, 考查双曲线的性质的应用.

7、 D

【解析】

根据复数运算, 即可容易求得结果.

【详解】

$$z = \frac{i^3}{1+i} = \frac{-i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

故选: D.

【点睛】

本题考查复数的四则运算, 属基础题.

8、 A

【解析】

利用统计图结合分层抽样性质能求出样本容量, 利用条形图能求出抽取的户主对四居室满意的人数.

【详解】

样本容量为： $(150+250+400) \times 30\% = 240$ ，

$\therefore$ 抽取的户主对四居室满意的人数为： $240 \times \frac{150}{150+250+400} \times 40\% = 18$.

故选 A.

【点睛】

本题考查样本容量和抽取的户主对四居室满意的人数的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意统计图的性质的合理运用.

9、C

【解析】

根据空间中平行关系、垂直关系的相关判定和性质可依次判断各个选项得到结果.

【详解】

对于 A，若 $\alpha // \beta$ ，则 l, m 可能为平行或异面直线，A 错误；

对于 B，若 $\alpha \perp \beta$ ，则 l, m 可能为平行、相交或异面直线，B 错误；

对于 C，若 $l \perp \beta$ ，且 $l \subset \alpha$ ，由面面垂直的判定定理可知 $\alpha \perp \beta$ ，C 正确；

对于 D，若 $\alpha \perp \beta$ ，只有当 m 垂直于 α, β 的交线时才有 $m \perp \alpha$ ，D 错误.

故选：C.

【点睛】

本题考查空间中线面关系、面面关系相关命题的辨析，关键是熟练掌握空间中的平行关系与垂直关系的相关命题.

10、C

【解析】

命题 p ：函数 $f(x) = e^x + e^{-x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，即可判断出真假. 命题 q ：在 $\triangle ABC$ 中，利用余弦函数单调性判断出真假.

【详解】

解：命题 p ：函数 $f(x) = e^x + e^{-x}$ ，所以 $f'(x) = e^x - e^{-x}$ ，当 $x < 0$ 时， $f'(x) < 0$ ，即函数在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，因此是假命题.

命题 q ：在 $\triangle ABC$ 中， $A, B \in (0, \pi)$ ， $y = \cos x$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减，所以 $A > B \Leftrightarrow \cos A < \cos B$ ，是真命题.

则下列命题为真命题的是 $(\neg p) \wedge q$.

故选：C.

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/107106000102010041>