

## 专题 04 分式

### 一、单选题

1. (2021·湖北黄石市·中考真题) 函数  $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + (x-2)^0$  的自变量  $x$  的取值范围是 ( )

- A.  $x \geq -1$       B.  $x > 2$       C.  $x > -1$  且  $x \neq 2$       D.  $x \neq -1$  且  $x \neq 2$

【答案】C

【分析】

根据被开方数大于等于 0，分母不为 0 以及零次幂的底数不为 0，列式计算即可得解.

【详解】

解：函数  $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + (x-2)^0$  的自变量  $x$  的取值范围是：

$$x+1 > 0 \text{ 且 } x-2 \neq 0,$$

解得：  $x > -1$  且  $x \neq 2$ ,

故选：C.

【点睛】

本题考查了函数自变量的范围，一般从三个方面考虑：

- (1) 当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；
- (2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；
- (3) 当函数表达式是二次根式时，被开方数非负.

2. (2021·湖北随州市·中考真题) 下列运算正确的是 ( )

- A.  $a^{-2} = -a^2$       B.  $a^2 + a^3 = a^5$       C.  $a^2 \cdot a^3 = a^6$       D.  $(a^2)^3 = a^6$

【答案】D

【分析】

根据负指数运算法则可判断 A，根据同类项的定义可判断 B，根据同底数幂的乘法可判断 C，根据幂的乘方可判断 D

【详解】

A.  $a^{-2} = \frac{1}{a^2} \neq -a^2$ ，故选项 A 计算不正确；

B.  $a^2$  与  $a^3$  不是同类项不能合并， $a^2 + a^3 \neq a^5$ ，故选项 B 计算不正确；

C.  $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5 \neq a^6$ ，故选项 C 计算不正确；

D.  $(a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$ ，故选项 D 正确。

故选择 D。

【点睛】

本题考查负整指数运算，同类项识别与合并，同底数幂的乘法，幂的乘方，掌握负整指数运算，同类项识别与合并，同底数幂的乘法，幂的乘方是解题关键。

3. (2020·湖北黄石市·中考真题) 函数  $y = \frac{1}{x-3} + \sqrt{x-2}$  的自变量  $x$  的取值范围是 ( )

A.  $x \geq 2$ ，且  $x \neq 3$     B.  $x \geq 2$     C.  $x \neq 3$     D.  $x > 2$ ，且  $x \neq 3$

【答案】A

【分析】

根据分式与二次根式的性质即可求解。

【详解】

依题意可得  $x-3 \neq 0$ ， $x-2 \geq 0$

解得  $x \geq 2$ ，且  $x \neq 3$

故选 A。

【点睛】

此题主要考查函数的自变量取值，解题的关键是熟知分式与二次根式的性质。

4. (2020·湖北随州市·中考真题)  $\frac{2}{x^2-4} \div \frac{1}{x^2-2x}$  的计算结果为 ( )

A.  $\frac{x}{x+2}$     B.  $\frac{2x}{x+2}$     C.  $\frac{2x}{x-2}$     D.  $\frac{2}{x(x+2)}$

【答案】B

【分析】

先把分母因式分解，再把除法转换为乘法，约分化简得到结果。

【详解】

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x^2-4} \div \frac{1}{x^2-2x} \\ &= \frac{2}{(x+2)(x-2)} \div \frac{1}{x(x-2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{(x+2)(x-2)} \cdot x(x-2)$$

$$= \frac{2x}{x+2}$$

故选：B.

**【点睛】**

本题主要考查了分式的除法，约分是解答的关键.

5. (2020·湖北孝感市·中考真题) 已知  $x = \sqrt{5} - 1$ ,  $y = \sqrt{5} + 1$ , 那么代数式  $\frac{x^3 - xy^2}{x(x-y)}$  的值是 ( )

A. 2

B.  $\sqrt{5}$

C. 4

D.  $2\sqrt{5}$

**【答案】** D

**【分析】**

先按照分式四则混合运算法则化简原式，然后将  $x$ 、 $y$  的值代入计算即可.

**【详解】**

$$\text{解：} \frac{x^3 - xy^2}{x(x-y)} = \frac{x(x+y)(x-y)}{x(x-y)} = x+y = \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} + 1 = 2\sqrt{5}.$$

故答案为 D.

**【点睛】**

本题考查了分式的化简求值，根据分式四则混合运算法则化简分式是解答本题的关键.

6. (2020·湖北荆门市·中考真题) 下列等式中成立的是 ( )

A.  $(-3x^2y)^3 = -9x^6y^3$

B.  $x^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2$

C.  $\sqrt{2} \div \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 + \sqrt{6}$

D.  $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$

**【答案】** D

**【分析】**

根据幂的乘方法则、完全平方公式、二次根式的运算法则以及分式的运算法则计算即可.

**【详解】**

$$\text{解：} \text{A、} (-3x^2y)^3 = -27x^6y^3,$$

故选项 A 错误；

$$\begin{aligned} \text{B、} \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 &= \frac{x^2+2x+1}{4} - \frac{x^2-2x+1}{4} \\ &= \frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{4} \\ &= x, \end{aligned}$$

故选项 B 错误；

$$\begin{aligned} \text{C、} \sqrt{2} \div \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \sqrt{2} \div \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}\right) \\ &= \sqrt{2} \div \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ &= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \\ &= 6 - 2\sqrt{6}, \end{aligned}$$

故选项 C 错误；

$$\begin{aligned} \text{D、} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} &= \frac{x+2}{(x+1)(x+2)} - \frac{x+1}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{x+2-x-1}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{1}{(x+1)(x+2)}, \end{aligned}$$

故选项 D 正确，

故选：D.

**【点睛】**

本题考查了乘方法则、完全平方公式、二次根式的运算法则以及分式的运算法则，熟练掌握相关运算法则是解决本题的关键.

7. (2019·湖北恩施土家族苗族自治州·中考真题) 函数  $y = \frac{1}{x+1} - \sqrt{2-3x}$  中, 自变量  $x$  的取值范围是 ( )

- A.  $x \leq \frac{2}{3}$       B.  $x \geq \frac{2}{3}$       C.  $x < \frac{2}{3}$  且  $x \neq -1$       D.  $x \leq \frac{2}{3}$  且  $x \neq -1$

【答案】D

【分析】

根据分式及二次根式有意义的条件解答即可.

【详解】

①  $y = \frac{1}{x+1} - \sqrt{2-3x}$  有意义,

②  $x+1 \neq 0, 2-3x \geq 0,$

解得:  $x \leq \frac{2}{3}$  且  $x \neq -1,$

故选 D.

【点睛】

本题考查分式及二次根式有意义的条件, 要使分式有意义, 分母不为 0; 要使二次根式有意义, 被开方数大于等于 0.

8. (2019·湖北黄石市·中考真题) 若式子  $\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$  在实数范围内有意义, 则  $x$  的取值范围是 ( )

- A.  $x \geq 1$  且  $x \neq 2$       B.  $x \leq 1$       C.  $x > 1$  且  $x \neq 2$       D.  $x < 1$

【答案】A

【分析】

分式有意义, 分母不等于零; 二次根式的被开方数是非负数.

【详解】

依题意, 得  $x-1 \geq 0$  且  $x-2 \neq 0,$

解得  $x \geq 1$  且  $x \neq 2.$

故选 A.

【点睛】

本题考查了二次根式有意义的条件, 分式有意义的条件. 函数自变量的范围一般从三个方面考虑: (1) 当函数表达式是整式时, 自变量可取全体实数; (2) 当函数表达式是分式时, 考虑分式的分母不能为 0; (3) 当函数表达式是二次根式时, 被开方数非负.

9. (2019·湖北孝感市·中考真题) 已知二元一次方程组  $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+4y=9 \end{cases}$ , 则  $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$  的值是 ( )

A. -5                      B. 5                      C. -6                      D. 6

**【答案】 C**

**【分析】**

解方程组求出  $x$ 、 $y$  的值, 对所求式子进行化简, 然后把  $x$ 、 $y$  的值代入进行计算即可.

**【详解】**

$$\begin{cases} x+y=1 \text{①} \\ 2x+4y=9 \text{②} \end{cases},$$

②  $\text{①} \times 2$  得,  $2y=7$ , 解得  $y=\frac{7}{2}$ ,

把  $y=\frac{7}{2}$  代入 ① 得,  $x+\frac{7}{2}=1$ , 解得  $x=-\frac{5}{2}$ ,

$$\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2} = \frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x-y}{x+y} = \frac{-\frac{5}{2}-\frac{7}{2}}{1} = -6,$$

故选 C.

**【点睛】**

本题考查了解二元一次方程组, 分式化简求值, 正确掌握相关的解题方法是关键.

## 二、填空题

10. (2021·湖北荆州市·中考真题) 已知:  $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (-\sqrt{3})$ ,  $b = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ , 则  $\sqrt{a+b} =$  \_\_\_\_\_.

**【答案】 2**

**【分析】**

利用负整数指数幂和零指数幂求出  $a$  的值, 利用平方差公式, 求出  $b$  的值, 进而即可求解.

**【详解】**

解:  $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (-\sqrt{3}) = 2 + 1 = 3$ ,  $b = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 1$ ,

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{3+1} = 2,$$

故答案是: 2.

**【点睛】**

本题主要考查二次根式求值，熟练掌握负整数指数幂和零指数幂以及平方差公式，是解题的关键。

11. (2021 湖北黄冈市 中考真题) 人们把  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  这个数叫做黄金分割数，著名数学家华罗庚优选法中的

0.618 法就应用了黄金分割数. 设  $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ,  $b = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , 则  $ab = 1$ , 记  $S_1 = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$ ,

$S_2 = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}$ , ...,  $S_{10} = \frac{1}{1+a^{10}} + \frac{1}{1+b^{10}}$ . 则  $S_1 + S_2 + \dots + S_{10} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**【答案】** 10

**【分析】**

先根据  $ab = 1$  求出  $S_n = \frac{1}{1+a^n} + \frac{1}{1+b^n}$  ( $n$  为正整数) 的值, 从而可得  $S_1, S_2, \dots, S_{10}$  的值, 再求和即可得.

**【详解】**

解:  $\because ab = 1$ ,

$$\therefore S_n = \frac{1}{1+a^n} + \frac{1}{1+b^n} = \frac{1}{1+a^n} + \frac{a^n}{a^n(1+b^n)} \quad (n \text{ 为正整数}),$$

$$= \frac{1}{1+a^n} + \frac{a^n}{a^n + (ab)^n},$$

$$= \frac{1}{1+a^n} + \frac{a^n}{a^n + 1},$$

$$= 1,$$

$$\therefore S_1 = S_2 = \dots = S_{10} = 1,$$

$$\text{则 } S_1 + S_2 + \dots + S_{10} = 10,$$

故答案为: 10.

**【点睛】**

本题考查了二次根式的运算、分式的运算, 正确发现一般规律是解题关键.

12. (2020 湖北黄冈市 中考真题) 计算:  $\frac{y}{x^2 - y^2} \div \left(1 - \frac{x}{x+y}\right)$  的结果是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{1}{x-y}$

**【分析】**

先计算括号内分式的减法、将被除式分母因式分解，再将除法转化为乘法，最后约分即可得.

**【详解】**

$$\begin{aligned} \text{解: } & \frac{y}{x^2 - y^2} \div \left( 1 - \frac{x}{x+y} \right) \\ &= \frac{y}{(x+y)(x-y)} \div \left( \frac{x+y}{x+y} - \frac{x}{x+y} \right) \\ &= \frac{y}{(x+y)(x-y)} \div \frac{y}{x+y} \\ &= \frac{y}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{x+y}{y} \\ &= \frac{1}{x-y}, \end{aligned}$$

故答案为:  $\frac{1}{x-y}$ .

**【点睛】**

本题主要考查分式的混合运算，解题的关键是掌握分式的混合运算顺序和运算法则.

13. (2020 湖北武汉市 中考真题) 计算  $\frac{2}{m+n} - \frac{m-3n}{m^2-n^2}$  的结果是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{1}{m-n}$

**【分析】**

根据分式的减法法则进行计算即可.

**【详解】**

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{2(m-n)}{(m+n)(m-n)} - \frac{m-3n}{(m+n)(m-n)} \\ &= \frac{2m-2n-m+3n}{(m+n)(m-n)} \\ &= \frac{m+n}{(m+n)(m-n)} \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{m-n}$$

故答案为： $\frac{1}{m-n}$ 。

**【点睛】**

本题考查了分式的减法运算，熟记运算法则是解题关键。

14. (2019·湖北武汉市·中考真题) 计算  $\frac{2a}{a^2-16} - \frac{1}{a-4}$  的结果是\_\_\_\_\_

**【答案】**  $\frac{1}{a+4}$

**【分析】**

先通分，然后根据同分母分式加减法法则进行计算即可。

**【详解】**

$$\text{原式} = \frac{2a}{(a+4)(a-4)} - \frac{a+4}{(a+4)(a-4)}$$

$$= \frac{2a - (a+4)}{(a+4)(a-4)}$$

$$= \frac{a-4}{(a+4)(a-4)}$$

$$= \frac{1}{a+4},$$

故答案为  $\frac{1}{a+4}$ 。

**【点睛】**

本题考查了异分母分式的加减法，熟练掌握异分母分式加减法的运算法则是解题的关键。

三、解答题

15. (2021·湖北恩施土家族苗族自治州·中考真题) 先化简，再求值： $1 - \frac{a-2}{a+4} \div \frac{a^2-4}{a^2+8a+16}$ ，其中  $a = \sqrt{2} - 2$ 。

**【答案】**  $-\frac{2}{a+2}$ ，  $-\sqrt{2}$

**【分析】**

先对分式进行化简，然后再代入进行求解即可。

**【详解】**

解：原式 =  $1 - \frac{a-2}{a+4} \times \frac{(a+4)^2}{(a+2)(a-2)} = 1 - \frac{a+4}{a+2} = -\frac{2}{a+2}$ ；

把  $a = \sqrt{2} - 2$  代入得：原式 =  $-\frac{2}{\sqrt{2}-2+2} = -\sqrt{2}$ 。

**【点睛】**

本题主要考查二次根式的运算及分式的化简求值，熟练掌握分式的运算及二次根式的运算是解题的关键。

16. (2021湖北黄石市中考真题) 先化简，再求值： $\left(1 - \frac{1}{a}\right) \div \frac{a^2-1}{a}$ ，其中  $a = \sqrt{3} - 1$ 。

**【答案】**  $\frac{1}{a+1}, \frac{\sqrt{3}}{3}$

**【分析】**

先算括号内的减法，再把除法化为乘法，然后因式分解，约分化简，代入求值，再将结果化为最简二次根式即可。

**【详解】**

解：原式 =  $\left(\frac{a}{a} - \frac{1}{a}\right) \div \frac{(a+1)(a-1)}{a}$

$$= \frac{a-1}{a} \cdot \frac{a}{(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{1}{a+1}$$

将  $a = \sqrt{3} - 1$  代入，原式 =  $\frac{1}{\sqrt{3}-1+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

**【点睛】**

本题主要考查分式的化简求值，掌握因式分解，分式的通分，约分，二次根式的化简是解题的关键。

17. (2021湖北襄阳市中考真题) 先化简，再求值： $\frac{x^2+2x+1}{x} \div \left(x - \frac{1}{x}\right)$ ，其中  $x = \sqrt{2} + 1$ 。

**【答案】**  $\frac{x+1}{x-1}; 1+\sqrt{2}$

**【分析】**

将被除数中分子因式分解，括号里先通分并利用同分母分式的减法法则计算，同时利用除以一个数等于乘以这个数的倒数将除法运算化为乘法运算，然后约分，得到最简结果，代入  $x$  的值计算即可。

**【详解】**

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \frac{(x+1)^2}{x} \div \left( \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} \right), \\ &= \frac{(x+1)^2}{x} \div \frac{x^2-1}{x}, \\ &= \frac{(x+1)^2}{x} \cdot \frac{x}{(x+1)(x-1)}, \\ &= \frac{x+1}{x-1}.\end{aligned}$$

$$\text{当 } x = \sqrt{2} + 1 \text{ 时, 原式} = \frac{\sqrt{2} + 1 + 1}{\sqrt{2} + 1 - 1} = \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

**【点睛】**

此题主要考查了分式的化简求值，分式的加减运算关键是通分，通分的关键是找最简公分母；分式的乘除运算关键是约分，约分的关键是找公因式，约分时，分式的分子分母出现多项式，应先将多项式因式分解后再约分.

18. (2021湖北中考真题) (1) 计算:  $(3 - \sqrt{2})^0 \times 4 - (2\sqrt{3} - 6) + \sqrt[3]{-8} + \sqrt{12}$ ;

(2) 解分式方程:  $\frac{2}{2x-1} + \frac{x}{1-2x} = 1$ .

**【答案】** (1) 8; (2)  $x = 1$ .

**【分析】**

(1) 先计算零指数幂、去括号、立方根、化简二次根式，再计算实数的混合运算即可得；

(2) 先将分式方程化成整式方程，再解一元一次方程即可得.

**【详解】**

$$\begin{aligned}\text{解: (1) 原式} &= 1 \times 4 - 2\sqrt{3} + 6 - 2 + 2\sqrt{3}, \\ &= 4 + 4, \\ &= 8;\end{aligned}$$

$$(2) \frac{2}{2x-1} + \frac{x}{1-2x} = 1,$$

方程两边同乘以  $2x-1$  得:  $2 - x = 2x - 1$ ,

移项、合并同类项得:  $-3x = -3$ ,

系数化为1得： $x=1$ ，

经检验， $x=1$ 是原分式方程的解，

故方程的解为 $x=1$ 。

**【点睛】**

本题考查了零指数幂、立方根、化简二次根式、解分式方程，熟练掌握各运算法则和方程的解法是解题关键。

19. (2021湖北鄂州市中考真题) 先化简，再求值： $\frac{x^2-9}{x-1} \div \frac{x^2+3x}{x-1} + \frac{4}{x}$ ，其中 $x=2$ 。

**【答案】**  $\frac{x+1}{x}$ ， $\frac{3}{2}$

**【分析】**

先通过约分、通分进行化简，再把给定的值代入计算即可。

**【详解】**

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \frac{(x-3)(x+3)}{x-1} \times \frac{x-1}{x(x+3)} + \frac{4}{x} \\ &= \frac{x+1}{x}, \end{aligned}$$

$$\text{当 } x=2 \text{ 时，原式} = \frac{3}{2}.$$

**【点睛】**

本题主要考查分式的化简求值，解题的关键是熟练掌握因式分解，正确进行约分、通分。

20. (2021湖北荆州市中考真题) 先化简，再求值： $\frac{a^2+2a+1}{a^2-a} \div \left(1 + \frac{2}{a-1}\right)$ ，其中 $a=2\sqrt{3}$ 。

**【答案】**  $\frac{a+1}{a}$ ， $\frac{6+\sqrt{3}}{6}$

**【分析】**

先计算括号内的加法，然后化除法为乘法进行化简，继而把 $a=2\sqrt{3}$ 代入求值即可。

**【详解】**

$$\text{解：原式} = \frac{(a+1)^2}{a(a-1)} \div \left(\frac{a+1}{a-1}\right)$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/107154145030006031>