

四川省成都盐道街中学 2023-2024 学年高三下学期统练四数学试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知直线 $l: kx - y - 3k + 1 = 0$ 与椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 交于 A, B 两点，与圆 $C_2: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$

交于 C, D 两点. 若存在 $k \in [-2, -1]$ ，使得 $\overline{AC} = \overline{DB}$ ，则椭圆 C_1 的离心率的取值范围为 ()

- A. $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}]$ B. $[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ C. $(0, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ D. $[\frac{\sqrt{6}}{3}, 1)$

2. 一个四面体所有棱长都是 4，四个顶点在同一个球上，则球的表面积为 ()

- A. 24π B. $8\sqrt{6}\pi$ C. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$ D. 12π

3. 某高中高三 (1) 班为了冲刺高考，营造良好的学习氛围，向班内同学征集书法作品贴在班内墙壁上，小王，小董，小李各写了一幅书法作品，分别是：“入班即静”，“天道酬勤”，“细节决定成败”，为了弄清“天道酬勤”这一作品是谁写的，班主任对三人进行了问话，得到回复如下：

小王说：“入班即静”是我写的；

小董说：“天道酬勤”不是小王写的，就是我写的；

小李说：“细节决定成败”不是我写的。

若三人的说法有且仅有一人是正确的，则“入班即静”的书写者是 ()

- A. 小王或小李 B. 小王 C. 小董 D. 小李

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1, a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3, & a_n \text{ 为奇数} \\ 2a_n + 1, & a_n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，则 $a_6 =$ ()

- A. 16 B. 25 C. 28 D. 33

5. 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，准线为 l ， A, B 是抛物线上的两个动点，且满足 $\angle AFB = \frac{2\pi}{3}$ ，设线段 AB

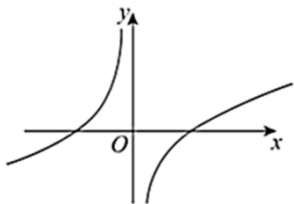
的中点 M 在 l 上的投影为 N ，则 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\sqrt{3}$

6. 已知复数 $z=1-i$, \bar{z} 为 z 的共轭复数, 则 $\frac{1+z}{z} = (\quad)$

- A. $\frac{3+i}{2}$ B. $\frac{1+i}{2}$ C. $\frac{1-3i}{2}$ D. $\frac{1+3i}{2}$

7. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则 $f(x)$ 可以为 ()



- A. $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$ B. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ C. $f(x) = \frac{2}{x} - x$ D. $f(x) = \frac{e^{|x|}}{x}$

8. 2019年10月1日, 中华人民共和国成立70周年, 举国同庆. 将2,0,1,9,10这5个数字按照任意次序排成一行, 拼成一个6位数, 则产生的不同的6位数的个数为

- A. 96 B. 84 C. 120 D. 360

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 1 \\ f(x-2), & x > 1 \end{cases}$, 若方程 $f(x) - mx - 1 = 0$ 恰有两个不同实根, 则正数 m 的取值范围为 ()

- A. $\left(\frac{e-1}{2}, 1\right) \cup (1, e-1)$ B. $\left(\frac{e-1}{2}, 1\right) \cup (1, e-1]$
 C. $\left(\frac{e-1}{3}, 1\right) \cup (1, e-1)$ D. $\left(\frac{e-1}{3}, 1\right) \cup (1, e-1]$

10. 已知 α, β 是两平面, l, m, n 是三条不同的直线, 则不正确命题是 ()

- A. 若 $m \perp \alpha, n // \alpha$, 则 $m \perp n$ B. 若 $m // \alpha, n // \alpha$, 则 $m // n$
 C. 若 $l \perp \alpha, l // \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$ D. 若 $\alpha // \beta, l \not\subset \beta$, 且 $l // \alpha$, 则 $l // \beta$

11. 若函数 $f(x) = |\ln x|$ 满足 $f(a) = f(b)$, 且 $0 < a < b$, 则 $\frac{4a^2 + b^2 - 4}{4a + 2b}$ 的最小值是 ()

- A. 0 B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $2\sqrt{2}$

12. 若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x+y \geq 2, \\ 3x-y \leq 6, \\ x-y \geq 0, \end{cases}$ 则 $3x+y$ 的最小值等于 ()

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。

13. 根据如图的算法, 输出的结果是_____.

```

S=0
For i=1 To 10
S=S+i
Next
输出S

```

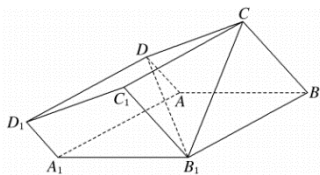
14. 已知点 P 是抛物线 $x^2 = 4y$ 上动点, F 是抛物线的焦点, 点 A 的坐标为 $(0, -1)$, 则 $\frac{PF}{PA}$ 的最小值为_____.

15. 动点 P 到直线 $x = -1$ 的距离和他到点 $F(1, 0)$ 距离相等, 直线 AB 过 $(4, 0)$ 且交点 P 的轨迹于 A, B 两点, 则以 AB 为直径的圆必过_____.

16. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ 2x + y \leq 2 \end{cases}$, 则 $z = 3x + 2y$ 的最小值为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图所示, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 为梯形, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90^\circ$, $AB = BC = BB_1 = 2$, $AD = 1$, $CD = \sqrt{3}$, $\angle ABB_1 = 60^\circ$.

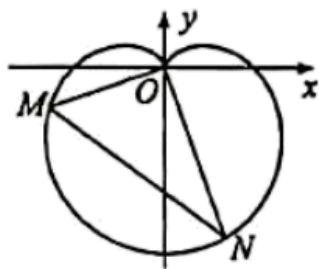


(1) 求证: $AB \perp B_1C$;

(2) 若平面 $ABCD \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 求二面角 $D - B_1C - B$ 的余弦值.

18. (12 分) 在新中国成立 70 周年国庆阅兵庆典中, 众多群众在脸上贴着一颗红心, 以此表达对祖国的热爱之情, 在数学中, 有多种方程都可以表示心型曲线, 其中有著名的笛卡尔心型曲线, 如图, 在直角坐标系中, 以原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 图中的曲线就是笛卡尔心型曲线, 其极坐标方程为 $\rho = 1 - \sin \theta$

($0 \leq \theta < 2\pi, \rho > 0$), M 为该曲线上的任意一点.



(1) 当 $|OM| = \frac{3}{2}$ 时, 求 M 点的极坐标;

(2) 将射线 OM 绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 与该曲线相交于点 N , 求 $|MN|$ 的最大值.

19. (12分) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $2S_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 求 $a_n + a_{n+1}$;

(2) 令 $b_n = a_{n+2} - a_n$, 证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 并求其前 n 项和 T_n .

20. (12分) 已知正数 x, y, z 满足 $x+y+z=t$ (t 为常数), 且 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2$ 的最小值为 $\frac{8}{7}$, 求实数 t 的值.

21. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列, 其前 n 项和为 S_n , 满足 $a_1 = 2$, 且 $a_2, 2S_2, a_3$ 成等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_2 a_n$, 求 $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + b_5^2 - b_6^2 + \cdots + b_{99}^2 - b_{100}^2$ 的值.

22. (10分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 右焦点为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F .

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) O 为坐标原点, 过 O 作两条射线, 分别交椭圆于 M, N 两点, 若 OM, ON 斜率之积为 $-\frac{4}{5}$, 求证 $\triangle MON$ 的面积为定值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

由题意可知直线过定点即为圆心, 由此得到 A, B 坐标的关系, 再根据点差法得到直线的斜率 k 与 A, B 坐标的关系, 由此化简并求解出离心率的取值范围.

【详解】

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 且线 $l: kx - y - 3k + 1 = 0$ 过定点 $(3, 1)$ 即为 C_2 的圆心,

因为 $\overline{AC} = \overline{DB}$, 所以 $\begin{cases} x_1 + x_2 = x_C + x_D = 2 \times 3 = 6 \\ y_1 + y_2 = y_C + y_D = 2 \times 1 = 2 \end{cases}$,

又因为 $\begin{cases} b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2 \\ b^2 x_2^2 + a^2 y_2^2 = a^2 b^2 \end{cases}$, 所以 $b^2(x_1^2 - x_2^2) = -a^2(y_1^2 - y_2^2)$,

所以 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$, 所以 $k = -\frac{3b^2}{a^2} \in [-2, -1]$,

所以 $\frac{b^2}{a^2} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, 所以 $\frac{a^2 - c^2}{a^2} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, 所以 $(1 - e^2) \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$,

所以 $e \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$.

故选: A.

【点睛】

本题考查椭圆与圆的综合应用, 着重考查了椭圆离心率求解以及点差法的运用, 难度一般. 通过运用点差法达到“设而不求”的目的, 大大简化运算.

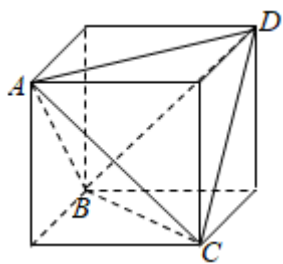
2、A

【解析】

将正四面体补成正方体, 通过正方体的对角线与球的半径关系, 求解即可.

【详解】

解: 如图, 将正四面体补形成一个正方体, 正四面体的外接球与正方体的外接球相同,



\because 四面体所有棱长都是 4,

\therefore 正方体的棱长为 $2\sqrt{2}$,

设球的半径为 r ,

则 $2r = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4^2}$, 解得 $r = \sqrt{6}$,

所以 $S = 4\pi r^2 = 24\pi$,

故选: A.

【点睛】

本题主要考查多面体外接球问题，解决本题的关键在于，巧妙构造正方体，利用正方体的外接球的直径为正方体的对角线，从而将问题巧妙转化，属于中档题。

3、D

【解析】

根据题意，分别假设一个正确，推理出与假设不矛盾，即可得出结论。

【详解】

解：由题意知，若只有小王的说法正确，则小王对应“入班即静”，

而否定小董说法后得出：小王对应“天道酬勤”，则矛盾；

若只有小董的说法正确，则小董对应“天道酬勤”，

否定小李的说法后得出：小李对应“细节决定成败”，

所以剩下小王对应“入班即静”，但与小王的错误的说法矛盾；

若小李的说法正确，则“细节决定成败”不是小李的，

则否定小董的说法得出：小王对应“天道酬勤”，

所以得出“细节决定成败”是小董的，剩下“入班即静”是小李的，符合题意。

所以“入班即静”的书写者是：小李。

故选：D.

【点睛】

本题考查推理证明的实际应用。

4、C

【解析】

依次递推求出 a_6 得解。

【详解】

$$n=1 \text{ 时, } a_2 = 1 + 3 = 4,$$

$$n=2 \text{ 时, } a_3 = 2 \times 4 + 1 = 9,$$

$$n=3 \text{ 时, } a_4 = 9 + 3 = 12,$$

$$n=4 \text{ 时, } a_5 = 2 \times 12 + 1 = 25,$$

$$n=5 \text{ 时, } a_6 = 25 + 3 = 28.$$

故选：C

【点睛】

本题主要考查递推公式的应用，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

5、B

【解析】

试题分析：设 A, B 在直线 l 上的投影分别是 A_1, B_1 ，则 $|AF| = |AA_1|$ ， $|BF| = |BB_1|$ ，又 M 是 AB 中点，所以

$$|MN| = \frac{1}{2}(|AA_1| + |BB_1|)，则 \frac{|MN|}{|AB|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AA_1| + |BB_1|}{|AB|} = \frac{|AF| + |BF|}{2|AB|}，在 \triangle ABF 中$$

$$|AB|^2 = |AF|^2 + |BF|^2 - 2|AF||BF|\cos\frac{2\pi}{3} = |AF|^2 + |BF|^2 + |AF||BF| = (|AF| + |BF|)^2 - |AF||BF| \geq (|AF| + |BF|)^2$$

$$- \left(\frac{|AF| + |BF|}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}(|AF| + |BF|)^2，所以 \frac{(|AF| + |BF|)^2}{|AB|^2} \leq \frac{4}{3}，即 \frac{|AF| + |BF|}{|AB|} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}，所以 \frac{|MN|}{|AB|} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}，故选$$

B.

考点：抛物线的性质.

【名师点睛】

在直线与抛物线的位置关系问题中，涉及到抛物线上的点到焦点的距离，焦点弦长，抛物线上的点到准线（或与准线平行的直线）的距离时，常常考虑用抛物线的定义进行问题的转化. 象本题弦 AB 的中点 M 到准线的距离首先等于 A, B 两点到准线距离之和的一半，然后转化为 A, B 两点到焦点 F 的距离，从而与弦长 $|AB|$ 之间可通过余弦定理建立关系.

6、C

【解析】

求出 \bar{z} ，直接由复数的代数形式的乘除运算化简复数.

【详解】

$$\frac{1+z}{\bar{z}} = \frac{2-i}{1+i} = \frac{1-3i}{2}.$$

故选：C

【点睛】

本题考查复数的代数形式的四则运算，共轭复数，属于基础题.

7、A

【解析】

根据图象可知，函数 $f(x)$ 为奇函数，以及函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，且有一个零点，即可对选项逐个验证即可得出.

【详解】

首先对 4 个选项进行奇偶性判断, 可知, $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ 为偶函数, 不符合题意, 排除 B;

其次, 在剩下的 3 个选项, 对其在 $(0, +\infty)$ 上的零点个数进行判断, $f(x) = \frac{e^{|x|}}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无零点, 不符合题意, 排除

D; 然后, 对剩下的 2 个选项, 进行单调性判断, $f(x) = \frac{2}{x} - x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 不符合题意, 排除 C.

故选: A.

【点睛】

本题主要考查图象的识别和函数性质的判断, 意在考查学生的直观想象能力和逻辑推理能力, 属于容易题.

8、B

【解析】

2,0,1,9,10 按照任意次序排成一行, 得所有不以 0 开头的排列数共 $4A_4^4 = 96$ 个, 其中含有 2 个 10 的排列数共 $A_4^2 = 12$ 个,

所以产生的不同的 6 位数的个数为 $96 - 12 = 84$. 故选 B.

9、D

【解析】

当 $x > 1$ 时, 函数周期为 2, 画出函数图像, 如图所示, 方程两个不同实根, 即函数 $f(x)$ 和 $y = mx + 1$ 有图像两个交点, 计算 $k_{AC} = \frac{e-1}{3}$, $k_{BC} = e-1$, 根据图像得到答案.

【详解】

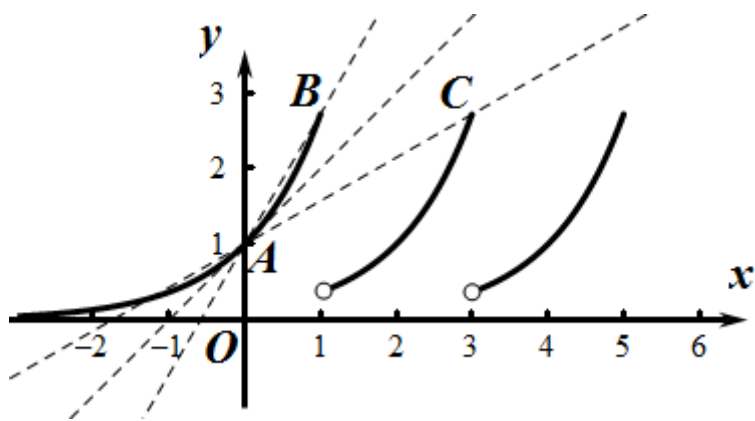
当 $x > 1$ 时, $f(x) = f(x-2)$, 故函数周期为 2, 画出函数图像, 如图所示:

方程 $f(x) - mx - 1 = 0$, 即 $f(x) = mx + 1$, 即函数 $f(x)$ 和 $y = mx + 1$ 有两个交点.

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, 故 $f'(0) = 1$, $B(1, e)$, $C(3, e)$, $k_{AC} = \frac{e-1}{3}$, $k_{BC} = e-1$.

根据图像知: $m \in \left(\frac{e-1}{3}, 1\right) \cup (1, e-1]$.

故选: D.



【点睛】

本题考查了函数的零点问题，确定函数周期画出函数图像是解题的关键.

10、B

【解析】

根据线面平行、线面垂直和空间角的知识，判断 A 选项的正确性.由线面平行有关知识判断 B 选项的正确性.根据面面垂直的判定定理，判断 C 选项的正确性.根据面面平行的性质判断 D 选项的正确性.

【详解】

A. 若 $n // \alpha$ ，则在 α 中存在一条直线 l ，使得 $l // n$ ， $m \perp \alpha$ ， $l \subset \alpha$ ，则 $m \perp l$ ，又 $l // n$ ，那么 $m \perp n$ ，故正确；

B. 若 $m // \alpha$ ， $n // \alpha$ ，则 $m // n$ 或相交或异面，故不正确；

C. 若 $l // \beta$ ，则存在 $a \subset \beta$ ，使 $l // a$ ，又 $l \perp \alpha$ ， $\therefore a \perp \alpha$ ，则 $\alpha \perp \beta$ ，故正确.

D. 若 $\alpha // \beta$ ，且 $l // \alpha$ ，则 $l \subset \beta$ 或 $l // \beta$ ，又由 $l \not\subset \beta$ ， $\therefore l // \beta$ ，故正确.

故选：B

【点睛】

本小题主要考查空间线线、线面和面面有关命题真假性的判断，属于基础题.

11、A

【解析】

由 $f(a) = f(b)$ 推导出 $b = \frac{1}{a}$ ，且 $0 < a < 1$ ，将所求代数式变形为 $\frac{4a^2 + b^2 - 4}{4a + 2b} = \frac{2a + b}{2} - \frac{4}{2a + b}$ ，利用基本不等式

求得 $2a + b$ 的取值范围，再利用函数的单调性可得出其最小值.

【详解】

Q 函数 $f(x) = |\ln x|$ 满足 $f(a) = f(b)$ ， $\therefore (\ln a)^2 = (\ln b)^2$ ，即 $(\ln a - \ln b)(\ln a + \ln b) = 0$ ，

Q $0 < a < b$ ， $\therefore \ln a < \ln b$ ， $\therefore \ln a + \ln b = 0$ ，即 $\ln(ab) = 0 \Rightarrow ab = 1$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/108063134126007002>