

北京市第一六1中学 2023—2024 学年第一学期阶段练习

高二数学

2023.10

班级_____ 姓名_____ 学号_____

本试卷共 3 页, 共 150 分. 考试时长 120 分钟. 考生务必将答案写在答题纸上, 在试卷上作答无效.

一、选择题: 本大题共 12 道小题, 每小题 4 分, 共 48 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目的要求. 把正确答案涂写在答题卡上相应的位置.

1. 已知点 $A(2, 1, 0)$ 和点 $B(0, -3, 4)$, 则向量 $AB = ()$

- A. $(-2, -4, 4)$ B. $(2, 4, -4)$ C. $(-2, -2, 4)$ D. $(2, 2, -4)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据向量的坐标的定义, 即可求解.

【详解】由 $A(2, 1, 0)$ 和点 $B(0, -3, 4)$, 所以 $AB = (-2, -4, 4)$.

故选: A

2. 设 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 是两两不共线的向量, 且向量 $a = -\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $b = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, 则 $2a - 3b = ()$

- A. $11\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ B. $-11\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ C. $-11\vec{i} + 10\vec{j} + 11\vec{k}$ D. $11\vec{i} - 10\vec{j} - 11\vec{k}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据向量基底运算法则直接计算即可.

【详解】因为 $a = -\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $b = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$,

所以 $2a - 3b = 2(-\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}) - 3(3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}) = -11\vec{i} + 10\vec{j} + 11\vec{k}$.

故选: C

3. 点 $M(3, -2, 1)$ 关于 yOz 平面对称的点的坐标是

- A. $(-3, 2, 1)$ B. $(-3, 2, -1)$ C. $(3, 2, -1)$ D. $(-3, -2, 1)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据空间直角坐标系对称点的坐标特点即可得到结果.

【详解】点 $M(3, -2, 1)$ 关于平面 yOz 的对称点坐标为 $(-3, -2, 1)$.

所以本题答案为 D.

【点睛】本题考查空间直角坐标系，注意仔细审题，属基础题.

4. 已知 $a = (-1, 0, -1)$, $b = (1, 1, 2)$ ，则向量 a 在 b 方向上的投影数量为 ()

- A. -3 B. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】代入向量投影的计算公式即可求出结果.

【详解】向量 a 在 b 方向上的投影数量为

$$|\vec{a}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-1 \times 1 + 0 \times 1 + (-1) \times 2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{-3}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2},$$

故选：B. -----

5. 与向量 $AB = (1, -1, \sqrt{2})$ 共线的单位向量是 ()

- A. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ 和 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$
C. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ 和 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

【答案】B

【解析】-----

【分析】设与向量 $AB = (1, -1, \sqrt{2})$ 共线的单位向量为 a ，则 $a = \lambda AB$ ，再根据 $|a| = 1$ 求出 λ ，即可得解.

【详解】设与向量 $AB = (1, -1, \sqrt{2})$ 共线的单位向量为 a ，

$$\text{则 } a = \lambda AB = (\lambda, -\lambda, \sqrt{2}\lambda), \text{ 所以 } |a| = \sqrt{\lambda^2 + (-\lambda)^2 + (\sqrt{2}\lambda)^2} = 1, \text{ 解得 } \lambda = \pm \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } a = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ 或 } a = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

故选：B

6. 已知向量 $a = (1, 1, 0)$, $b = (1, -1, 0)$ ，若 $(a + \lambda b) \perp (a + \mu b)$ ，则 ()

- A. $\lambda + \mu = 1$ B. $\lambda + \mu = -1$ C. $\lambda \mu = 1$ D. $\lambda \mu = -1$

【答案】D

【解析】

【分析】首先表示出 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$, $\vec{a} + \mu \vec{b}$, 依题意可得 $(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \mu \vec{b}) = 0$, 由数量积的坐标表示计算可得.

【详解】因为 $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, -1, 0)$,

所以 $\vec{a} + \lambda \vec{b} = (1 + \lambda, 1 - \lambda, 0)$, $\vec{a} + \mu \vec{b} = (1 + \mu, 1 - \mu, 0)$,

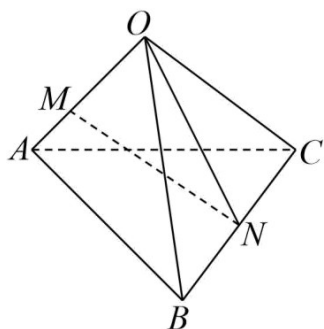
因为 $(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \perp (\vec{a} + \mu \vec{b})$,

所以 $(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \mu \vec{b}) = 0$, 即 $(1 + \lambda)(1 + \mu) + (1 - \lambda)(1 - \mu) = 0$,

所以 $\lambda \mu = -1$.

故选: D

7. 如图, 空间四边形 $OABC$ 中, $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. 点 M 在 OA 上, 且 $OM = 2MA$, N 为 BC 的中点, 则 $\vec{MN} =$ ()



- A. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ B. $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$ C. $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ D. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据空间向量的加减和数乘运算直接求解即可.

【详解】由 $OM = 2MA$, $\therefore \vec{OM} = \frac{2}{3}\vec{OA}$, N 为 BC 的中点, $\therefore \vec{ON} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC})$,
 $\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) - \frac{2}{3}\vec{OA} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

故选: C.

8. 已知平面 $\alpha \perp$ 平面 β , $\alpha \cap \beta = l$. 下列结论中正确的是 ()

- A. 若直线 $m \perp$ 平面 α ，则 $m \parallel \beta$ B. 若平面 $\gamma \perp$ 平面 α ，则 $\gamma \parallel \beta$
- C. 若直线 $m \perp$ 直线 l ，则 $m \perp \beta$ D. 若平面 $\gamma \perp$ 直线 l ，则 $\gamma \perp \beta$

【答案】D

【解析】

【分析】

A,

利用线面平行的判定定理；B，面面垂直没有传递性；C，利用面面垂直的性质定理；D，利用面面垂直的判定定理；

【详解】A，若 $m \perp \alpha$ ， $\alpha \perp \beta$ ，则 $m \parallel \beta$ 或 $m \subset \beta$ ，故 A 错误；

B，若 $\gamma \perp \alpha$ ， $\alpha \perp \beta$ ，则 $\gamma \parallel \beta$ 或 γ 与 β 相交，故 B 错误；

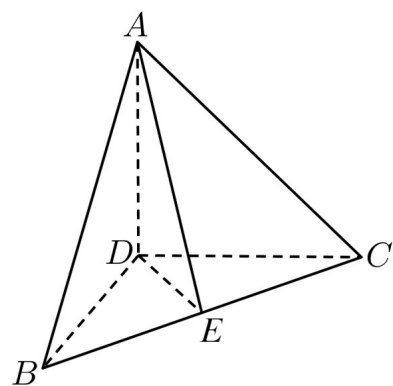
C，若 $m \perp l$ ， $\alpha \perp \beta$ ， $\alpha \cap \beta = l$ ，必须 $m \subset \alpha$ ，利用面面垂直的性质定理可知 $m \perp \beta$ ，故 C 错误； D，

若 $l \perp \gamma$ ， $\alpha \cap \beta = l$ ，即 $l \subset \beta$ ，利用面面垂直的判定定理知 $\gamma \perp \beta$ ，故 D 正确；

故选：D.

【点睛】关键点点睛：本题主要考查空间直线，平面直线的位置关系的判断，熟练掌握平行和垂直位置关系的判定和性质是解题的关键，属于基础题.

9. 如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中， DA, DB, DC 两两垂直，且 $DB = DC = 2$ ，点 E 为 BC 中点，若直线 AE 与 CD 所成的角为 60° ，则三棱锥 $A-BCD$ 的体积等于（ ）



- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【答案】D

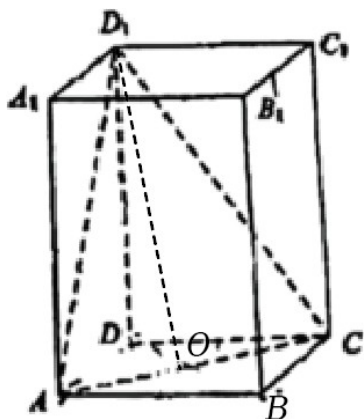
【解析】

【分析】由题意可证 $AD \perp$ 平面 DBC ，取 BD 的中点 F ，连接 EF ，则 $\angle AEF$ 为直线 AE 与 CD 所成的角，利用余弦定理求出 AD ，根据三棱锥体积公式即可求得体积.

【答案】C

【解析】

【分析】将点 B 到平面 ACD_1 距离转化为三棱锥 $B-ACD_1$ 的高，然后利用等体积的方法求距离即可.



【详解】

由题意得点 B 到平面 ACD_1 距离为三棱锥 $B-ACD_1$ 的高，

设点 B 到平面 ACD_1 距离为 d ，取 AC 中点 O ，连接 OD_1 ，

因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为长方体，所以 $AD_1 = CD_1$ ，所以 $OD_1 \perp AC$ ，

$$AD_1 = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \quad AC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad OD_1 = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以 } V_{B-ACD_1} = V_{D_1-ABC}, \quad \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} d = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 2, \quad \text{解得 } d = \frac{2}{3}.$$

故选：C.

11. 日晷是中国古代用来测定时间的仪器，利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间. 把地球看成一个球(球心记为 O)，地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角，点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面. 在点 A 处放置一个日晷，若晷面与赤道所在平面平行，点 A 处的纬度为北



纬 40° ，则晷针与点 A 处的水平面所成角为 ()

A. 20°

B. 40°

C. 50°

D. 90°

【答案】B

【解析】

【分析】画出过球心和晷针所确定的平面截地球和晷面的截面图，根据面面平行的性质定理和线面垂直的定义判定有关截线的关系，根据点A处的纬度，计算出晷针与点A处的水平面所成角.

【详解】画出截面图如下图所示，其中 CD 是赤道所在平面的截线； l 是点A处的水平面的截线，依题意可知 $OA \perp l$ ； AB 是晷针所在直线， m 是晷面的截线，依题意依题意，晷面和赤道平面平行，晷针与晷面垂直，

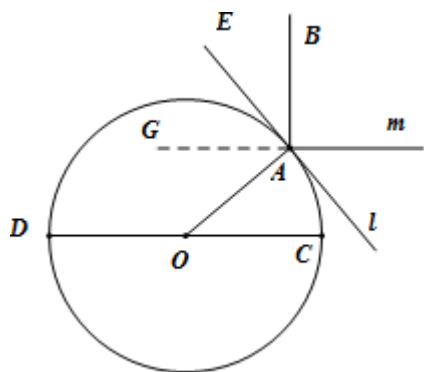
根据平面平行的性质定理可得可知 $m \parallel CD$ 、根据线面垂直的定义可得 $AB \perp m$..

由于 $\angle AOC = 40^\circ$, $m \parallel CD$ ，所以 $\angle OAG = \angle AOC = 40^\circ$ ，

由于 $\angle OAG + \angle GAE = \angle BAE + \angle GAE = 90^\circ$ ，

所以 $\angle BAE = \angle OAG = 40^\circ$ ，也即晷针与点A处的水平面所成角为 $\angle BAE = 40^\circ$.

故选：B



【点睛】本小题主要考查中国古代数学文化，考查球体有关计算，涉及平面平行，线面垂直的性质，属于中档题.

12. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为2的等边三角形， P 为平面 ABC 内一点，则 $PA + (PB + PC)$ 的最小值是()

- A. -2 B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. -1

【答案】B

【解析】

【分析】根据条件建立坐标系，求出点的坐标，利用坐标法结合向量数量积的公式进行计算即可.

【详解】建立如图所示的坐标系，以 BC 中点为坐标原点，

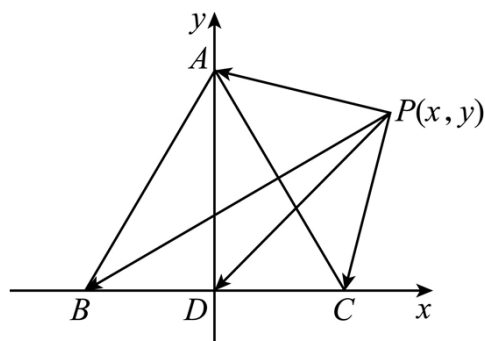
则 $A(0, \sqrt{3})$ ， $B(-1, 0)$ ， $C(1, 0)$ ，

设 $P(x, y)$ ，则 $PA = (-x, \sqrt{3} - y)$ ， $PB = (-1 - x, -y)$ ， $PC = (1 - x, -y)$ ，

$$\text{则 } \overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = 2x^2 - 2\sqrt{3}y + 2y^2 = 2\left[x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right]$$

$\therefore$ 当 $x = 0$ ， $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，取得最小值 $2 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2}$ ，

故选：B。



二、填空题：本大题共 6 小题，共 30 分.把答案填在答题纸中相应的横线上.

1. 设 a ， b 为单位向量，且 $|\vec{a} + \vec{b}| = 1$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{2}$ ## -0.5

【解析】

【分析】由向量的数量积及运算律计算可得解.

【详解】由题意得 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ，又 $|\vec{a} + \vec{b}| = 1$ ，

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 1 \text{ 即 } (\vec{a} + \vec{b})^2 = 1,$$

$$\text{整理得 } \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1, \text{ 代入 } |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1,$$

$$\text{得 } \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}.$$

故答案为： $-\frac{1}{2}$.

2. 若空间三点 $A(4,1,3)$ ， $B(2, -5,1)$ ， $C(m,4,4)$ 共线，则实数 $m =$ _____.

【答案】 5

【解析】

【分析】根据三点共线，转化为向量共线，即可求解.

【详解】 $\vec{AB} = (-2, -6, -2)$ ， $\vec{AC} = (m - 4, 3, 1)$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/108067051135006117>