

2023-2024 学年安徽省砀山县第二中学高三一诊考试数学试卷

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $7S_2 = 4S_4$ ，则公比 q 的值为（ ）

- A. 1 B. 1 或 $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是（ ）

- A. $y = \sqrt{x}$ B. $f(x) = x \sin x$ C. $f(x) = x^2 + |x|$ D. $y = |x+1|$

3. 幻方最早起源于我国，由正整数 1, 2, 3, …, n^2 这 n^2 个数填入 $n \times n$ 方格中，使得每行、每列、每条对角线上的数的和相等，这个正方形数阵就叫 n 阶幻方。定义 $f(n)$ 为 n 阶幻方对角线上所有数的和，如 $f(3) = 15$ ，则 $f(10) =$ （ ）

8	1	6
3	5	7
4	9	2

- A. 55 B. 500 C. 505 D. 5050

4. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 经过点 $M(2, 2\sqrt{2})$ ，焦点为 F ，则直线 MF 的斜率为（ ）

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-2\sqrt{2}$

5. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 15$ 且 $3a_{n+1} = 3a_n - 2$ ，则使 $a_k \cdot a_{k+1} < 0$ 的 k 的值为（ ）

- A. 21 B. 22 C. 23 D. 24

6. 在满足 $0 < x_i < y_i \leq 4$ ， $x_i^{y_i} = y_i^{x_i}$ 的实数对 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$) 中，使得 $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} < 3x_n$ 成立的正整数 n 的最大值为（ ）

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 9

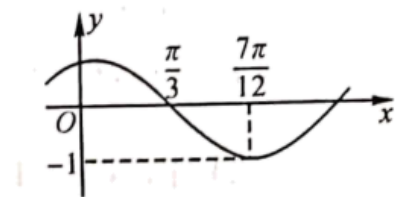
7. 若 $z = (3-i)(a+2i)$ ($a \in R$) 为纯虚数, 则 $z =$ ()

- A. $\frac{16}{3}i$ B. $6i$ C. $\frac{20}{3}i$ D. 20

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $(S_n+1)(S_{n+2}+1) = (S_{n+1}+1)^2$ ($n \in N^*$), $a_1=1, a_2=2$, 则 $S_n =$ ()

- A. $\frac{n(n+1)}{2}$ B. 2^{n+1} C. $2^n - 1$ D. $2^{n+1} + 1$

9. $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图象如图所示, $g(x) = -A \sin(\omega x - \varphi)$, 若将 $y = f(x)$ 的图象向左平移 a ($a > 0$) 个单位长度后所得图象与 $y = g(x)$ 的图象重合, 则 a 可取的值为 ()



- A. $\frac{1}{12}\pi$ B. $\frac{5}{12}\pi$ C. $\frac{7}{12}\pi$ D. $\frac{11}{12}\pi$

10. 已知 F 为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, 点 A 在抛物线上, 且 $|AF| = 5$, 过点 F 的动直线 l 与抛物线 B, C 交于两点, O 为坐标原点, 抛物线的准线与 x 轴的交点为 M . 给出下列四个命题:

- ①在抛物线上满足条件的点 A 仅有一个;
②若 P 是抛物线准线上一动点, 则 $|PA| + |PO|$ 的最小值为 $2\sqrt{13}$;
③无论过点 F 的直线 l 在什么位置, 总有 $\angle OMB = \angle OMC$;
④若点 C 在抛物线准线上的射影为 D , 则三点 B, O, D 在同一条直线上.

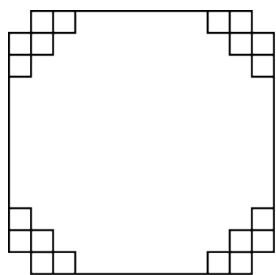
其中所有正确命题的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

11. 已知复数 $z = a^2i - 2a - i$ 是正实数, 则实数 a 的值为 ()

- A. 0 B. 1 C. -1 D. ± 1

12. 窗花是贴在窗纸或窗户玻璃上的剪纸, 是中国古老的传统民间艺术之一, 它历史悠久, 风格独特, 神兽人们喜爱. 下图即是一副窗花, 是把一个边长为 12 的大正方形在四个角处都剪去边长为 1 的小正方形后剩余的部分, 然后在剩余部分中的四个角处再剪出边长全为 1 的一些小正方形. 若在这个窗花内部随机取一个点, 则该点不落在任何一个正方形内的概率是 ()



- A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{5}{7}$ D. $\frac{6}{7}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + \frac{1}{4x^2 + 8x}, & -2 < x < 0 \\ x^2 + 2x - 1, & x \leq -2, x \geq 0 \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = a|f(x)| + 1$ 有 6 个零点，则实数 a 的取值范围是_____.

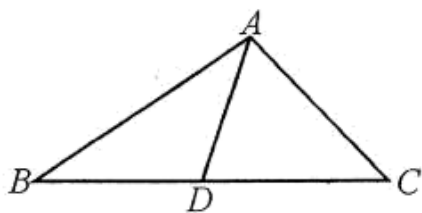
14. 从编号为 1, 2, 3, 4 的卡片中随机抽取一张，放回后再随机抽取一张，则第二次抽得的卡片上的数字能被第一次抽得的卡片上数字整除的概率为_____.

15. 已知点 P 是直线 l 上的一点，将直线 l 绕点 P 逆时针方向旋转角 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)，所得直线方程是 $x - y - 2 = 0$ ，若将它继续旋转 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 角，所得直线方程是 $2x + y - 1 = 0$ ，则直线 l 的方程是_____.

16. 若 $ax\left(x - \frac{2}{x}\right)^5$ 展开式中的常数项为 240，则实数 a 的值为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在 BC 上， $\angle CAD = \frac{\pi}{4}$ ， $AC = \frac{7}{2}$ ， $\cos \angle ADB = -\frac{\sqrt{2}}{10}$.



- (1) 求 $\sin C$ 的值；
(2) 若 $BD = 5$ ，求 AB 的长.

18. (12 分) 为了拓展城市的旅游业，实现不同市区间的物资交流，政府决定在 A 市与 B 市之间建一条直达公路，中间设有至少 8 个的偶数个十字路口，记为 $2m$ ，现规划在每个路口处种植一颗杨树或者木棉树，且种植每种树木的概率均为 $\frac{1}{2}$.

(1) 现征求两市居民的种植意见，看看哪一种植物更受欢迎，得到的数据如下所示：

	A 市居民	B 市居民
喜欢杨树	300	200
喜欢木棉树	250	250

- 是否有 99.9% 的把握认为喜欢树木的种类与居民所在的城市具有相关性；
- (2) 若从所有的路口中随机抽取 4 个路口，恰有 X 个路口种植杨树，求 X 的分布列以及数学期望；
- (3) 在所有的路口种植完成后，选取 3 个种植同一种树的路口，记总的选取方法数为 M ，求证：
 $3M \dots m(m-1)(m-2).$

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

19.（12 分）在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t\cos\alpha \\ y=1+t\sin\alpha \end{cases}$ （ t 为参数， $0\leq\alpha<\pi$ ）.在以 O 为极点， x 轴正半轴为极轴的极坐标中，曲线 $C：\rho=4\cos\theta$.

- (1) 当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，求 C 与 l 的交点的极坐标；
- (2) 直线 l 与曲线 C 交于 $A，B$ 两点，线段 AB 中点为 $M(1,1)$ ，求 $|AB|$ 的值.

20.（12 分）为了解本学期学生参加公益劳动的情况，某校从初高中学生中抽取 100 名学生，收集了他们参加公益劳动时间（单位：小时）的数据，绘制图表的一部分如表.

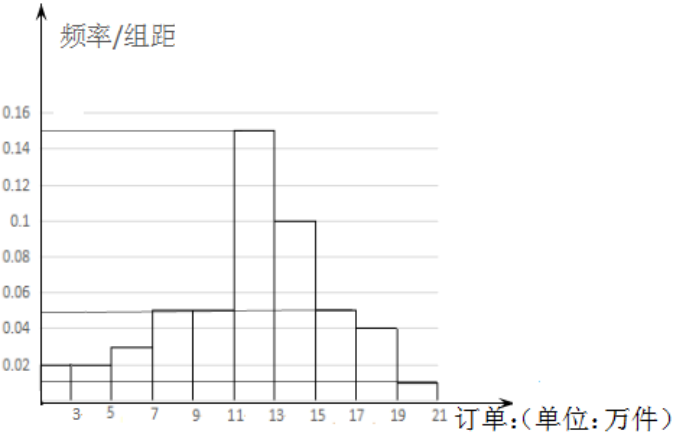
时间 \ 人数							
		[0，5)	[5，10)	[10，15)	[15，20)	[20，25)	[25，30)
学生类别	男	6	9	10	10	9	4
	女	5	12	13	8	6	8
学 段	初中	x	8	11	11	10	7
	高中						

- (1) 从男生中随机抽取一人，抽到的男生参加公益劳动时间在 $[10,20)$ 的概率：

(2) 从参加公益劳动时间 $[25,30)$ 的学生中抽取 3 人进行面谈，记 X 为抽到高中的人数，求 X 的分布列；

(3) 当 $x = 5$ 时，高中生和初中生相比，那学段学生平均参加公益劳动时间较长.（直接写出结果）

21.（12 分）为了解网络外卖的发展情况，某调查机构从全国各城市中抽取了 100 个相同等级地城市，分别调查了甲乙两家网络外卖平台（以下简称外卖甲、外卖乙）在今年 3 月的订单情况，得到外卖甲该月订单的频率分布直方图，外卖乙该月订单的频数分布表，如下图表所示.



订单：（单位：万件）	[3,5)	[5,7)	[7,9)	[9,11)
频数	1	2	2	3

订单：（单位：万件）	[11,13)	[13,15)	[15,17)	[17,19)	[19,21)
频数	40	20	20	10	2

(1) 现规定，月订单不低于 13 万件的城市为“业绩突出城市”，填写下面的列联表，并根据列联表判断是否有 90%的把握认为“是否为业绩突出城市”与“选择网络外卖平台”有关.

	业绩突出城市	业绩不突出城市	总计
外卖甲			
外卖乙			
总计			

(2) 由频率分布直方图可以认为，外卖甲今年 3 月在全国各城市的订单数 Z （单位：万件）近似地服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$ （同一组数据用该区间的中点值作代表）， σ 的值已求出，约为 3.64，现把频率视为概率，解决下列问题：

①从全国各城市中随机抽取 6 个城市，记 X 为外卖甲在今年 3 月订单数位于区间 $(4.88,15.8)$ 的城市个数，求 X

的数学期望；

②外卖甲决定在今年 3 月订单数低于 7 万件的城市开展“订外卖，抢红包”的营销活动来提升业绩，据统计，开展此活动后城市每月外卖订单数将提高到平均每月 9 万件的水平，现从全国各月订单数不超过 7 万件的城市中采用分层抽样的方法选出 100 个城市不开展营销活动，若每按一件外卖订单平均可获纯利润 5 元，但每件外卖平均需送出红包 2 元，则外卖甲在这 100 个城市中开展营销活动将比不开展营销活动每月多盈利多少万元？

附：①参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$.

参考数据：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	2.702	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

②若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < Z \leq \mu + \sigma) = 0.6826$ ， $P(\mu - 2\sigma < Z \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$.

22. (10 分) 函数 $f(x) = ax - \ln(x + 1)$, $g(x) = \sin x$ ，且 $f(x) \geq 0$ 恒成立.

- (1) 求实数 a 的集合 M ；
- (2) 当 $a \in M$ 时，判断 $f(x)$ 图象与 $g(x)$ 图象的交点个数，并证明.

(参考数据： $\ln 2 \approx 0.69, e^{\frac{x}{2}-1} \approx 1.77$)

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、 C

【解析】

由 $7S_2 = 4S_4$ 可得 $3(a_1 + a_2) = 4(a_3 + a_4)$ ，故可求 q 的值.

【详解】

因为 $7S_2 = 4S_4$ ，所以 $3(a_1 + a_2) = 4(S_4 - S_2) = 4(a_3 + a_4)$ ，

故 $q^2 = \frac{3}{4}$ ，因 $\{a_n\}$ 为正项等比数列，故 $q > 0$ ，所以 $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故选 C.

【点睛】

一般地，如果 $\{a_n\}$ 为等比数列， S_n 为其前 n 项和，则有性质：

(1) 若 $m, n, p, q \in N^*, m+n = p+q$ ，则 $a_m a_n = a_p a_q$ ；

(2) 公比 $q \neq 1$ 时，则有 $S_n = A + Bq^n$ ，其中 A, B 为常数且 $A + B = 0$ ；

(3) $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 为等比数列 ($S_n \neq 0$) 且公比为 q^n .

2、C

【解析】

结合基本初等函数的奇偶性及单调性，结合各选项进行判断即可.

【详解】

A: $y = \sqrt{x}$ 为非奇非偶函数，不符合题意；

B: $f(x) = x \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 上不单调，不符合题意；

C: $y = x^2 + |x|$ 为偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，符合题意；

D: $y = |x+1|$ 为非奇非偶函数，不符合题意.

故选：C.

【点睛】

本小题主要考查函数的单调性和奇偶性，属于基础题.

3、C

【解析】

因为幻方的每行、每列、每条对角线上的数的和相等，可得 $f(n) = \frac{1+2+3+\dots+n^2}{n}$ ，即得解.

【详解】

因为幻方的每行、每列、每条对角线上的数的和相等，

所以 n 阶幻方对角线上数的和 $f(n)$ 就等于每行（或每列）的数的和，

又 n 阶幻方有 n 行（或 n 列），

因此， $f(n) = \frac{1+2+3+\dots+n^2}{n}$ ，

$$\text{于是 } f(10) = \frac{1+2+3+\cdots+99+100}{10} = 505.$$

故选：C

【点睛】

本题考查了数阵问题，考查了学生逻辑推理，数学运算的能力，属于中档题.

4、A

【解析】

先求出 p ，再求焦点 F 坐标，最后求 MF 的斜率

【详解】

解：抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 经过点 $M(2, 2\sqrt{2})$

$$(2\sqrt{2})^2 = 2p \times 2, \quad p = 2,$$

$$F(1, 0), \quad k_{MF} = 2\sqrt{2},$$

故选：A

【点睛】

考查抛物线的基础知识及斜率的运算公式，基础题.

5、C

【解析】

因为 $a_{n+1} - a_n = -\frac{2}{3}$ ，所以 $\{a_n\}$ 是等差数列，且公差 $d = -\frac{2}{3}$ ， $a_1 = 15$ ，则 $a_n = 15 - \frac{2}{3}(n-1) = -\frac{2}{3}n + \frac{47}{3}$ ，所以由题设 $a_k \cdot a_{k+1} < 0$ 可得 $(-\frac{2}{3}n + \frac{47}{3})(-\frac{2}{3}n + \frac{45}{3}) < 0 \Rightarrow \frac{45}{2} < n < \frac{47}{2}$ ，则 $n = 23$ ，应选答案 C.

6、A

【解析】

由题可知 $0 < x_i < y_i \leq 4$ ，且 $x_i^{y_i} = y_i^{x_i}$ 可得 $\frac{\ln x_i}{x_i} = \frac{\ln y_i}{y_i}$ ，构造函数 $h(t) = \frac{\ln t}{t}$ ($0 < t \leq 4$) 求导，通过导函数求出 $h(t)$

的单调性，结合图像得出 $t_{\min} = 2$ ，即 $2 \leq x_i < e$ 得出 $3x_n < 3e$ ，

从而得出 n 的最大值.

【详解】

因为 $0 < x_i < y_i \leq 4$ ， $x_i^{y_i} = y_i^{x_i}$

则 $\ln x_i^{y_i} = \ln y_i^{x_i}$ ，即 $y_i \ln x_i = x_i \ln y_i$

整理得 $\frac{\ln x_i}{x_i} = \frac{\ln y_i}{y_i}$, 令 $t = x_i = y_i$,

设 $h(t) = \frac{\ln t}{t} (0 < t \leq 4)$,

则 $h'(t) = \frac{\frac{1}{t} \cdot t - 1 \cdot \ln t}{t^2} = \frac{1 - \ln t}{t^2}$,

令 $h'(t) > 0$, 则 $0 < t < e$, 令 $h'(t) < 0$, 则 $e < t \leq 4$,

故 $h(t)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, 4)$ 上单调递减, 则 $h(e) = \frac{1}{e}$,

因为 $x_i < y_i$, $h(x_i) = h(y_i)$,

由题可知: $h(t) = \frac{1}{4} \ln 4$ 时, 则 $t_{\min} = 2$, 所以 $2 \leq t < e$,

所以 $2 \leq x_i < e < y_i \leq 4$,

当 x_n 无限接近 e 时, 满足条件, 所以 $2 \leq x_n < e$,

所以要使得 $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} < 3x_n < 3e \approx 8.154$

故当 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$ 时, 可有 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 < 8.154$,

故 $n-1 \leq 4$, 即 $n \leq 5$,

所以: n 最大值为 5.

故选: A.

【点睛】

本题主要考查利用导数求函数单调性、极值和最值, 以及运用构造函数法和放缩法, 同时考查转化思想和解题能力.

7、C

【解析】

根据复数的乘法运算以及纯虚数的概念, 可得结果.

【详解】

$$z = (3-i)(a+2i) = 3a+2+(6-a)i$$

$\because z = (3-i)(a+2i) (a \in R)$ 为纯虚数,

$$\therefore 3a+2=0 \text{ 且 } 6-a \neq 0$$

$$\text{得 } a = -\frac{2}{3}, \text{ 此时 } z = \frac{20}{3}i$$

故选: C.

【点睛】

本题考查复数的概念与运算，属基础题.

8、C

【解析】

根据已知条件判断出数列 $\{S_n + 1\}$ 是等比数列，求得其通项公式，由此求得 S_n .

【详解】

由于 $(S_n + 1)(S_{n+2} + 1) = (S_{n+1} + 1)^2 (n \in \mathbb{N}^*)$ ，所以数列 $\{S_n + 1\}$ 是等比数列，其首项为 $S_1 + 1 = a_1 + 1 = 2$ ，第二项为

$S_2 + 1 = a_1 + a_2 + 1 = 4$ ，所以公比为 $\frac{4}{2} = 2$. 所以 $S_n + 1 = 2^n$ ，所以 $S_n = 2^n - 1$.

故选：C

【点睛】

本小题主要考查等比数列的证明，考查等比数列通项公式，属于基础题.

9、B

【解析】

根据图象求得函数 $y = f(x)$ 的解析式，即可得出函数 $y = g(x)$ 的解析式，然后求出变换后的函数解析式，结合题意可得出关于 a 的等式，即可得出结果.

【详解】

由图象可得 $A = 1$ ，函数 $y = f(x)$ 的最小正周期为 $T = 4 \times \left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} \right) = \pi$ ， $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ ，

$$\text{Q } f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(2 \times \frac{7\pi}{12} + \varphi\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6} + \varphi\right) = -1,$$

$$\text{则 } \frac{7\pi}{6} + \varphi = \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}), \therefore \varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ 取 } \varphi = -\frac{\pi}{6},$$

$$\therefore f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right), \text{ 则 } g(x) = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\therefore g(x) = f(x + a) = \cos\left(2x + 2a - \frac{\pi}{6}\right), \quad 2a - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \text{ 可得 } a = \frac{5\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{当 } k = 0 \text{ 时, } a = \frac{5\pi}{12}.$$

故选：B.

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/108075140137006055>