专题18 牛吃草问题

有的放矢

1、英国科学家牛顿在他的《普通算术》一书中，有一道关于牛在牧场上吃草的问题，即牛在牧场上吃草，牧场上的草在不断的、均匀的生长。后人把这类问题称为牛吃草问题或叫做“牛顿问题”。

2、“牛吃草”问题主要涉及三个量：草的数量、牛的头数、时间．难点在于随着时间的增长，草也在按不变的速度均匀生长，所以草的总量不定。“牛吃草”问题是小学应用题中的难点。

3、解“牛吃草”问题的主要依据：

草的每天生长量不变

每头牛每天的食草量不变

草的总量＝草场原有的草量＋新生的草量，其中草场原有的草量是一个固定值

新生的草量＝每天生长量×天数

4、同一片牧场中的“牛吃草”问题，一般的解法可总结为：

⑴设定1头牛1天吃草量为“1”

⑵草的生长速度＝(对应牛的头数×较多天数－对应牛的头数×较少天数)÷(较多天数－较少天数)

⑶原来的草量＝对应牛的头数×吃的天数－草的生长速度×吃的天数

⑷吃的天数＝原来的草量÷(牛的头数－草的生长速度)

⑸牛的头数＝原来的草量÷吃的天数＋草的生长速度

5、“牛吃草”问题有很多的变例，像抽水问题、检票口检票问题等等，只有理解了“牛吃草”问题的本质和解题思路，才能以不变应万变，轻松解决此类问题。

能力巩固提升

1．某水库建有10个泄洪闸，现在水库的水位已经超过安全警戒线，上游的河水还在按一不变的速度增加．为了防洪，需开闸泄洪．假设每个闸门泄洪的速度相同，经测算，若打开一个泄洪闸，30小时水位降到安全线，若打开两个泄洪闸，10小时水位降到安全线．现在抗洪指挥部要求在5.5小时内使水位降到安全线，问：至少要同时打开几个闸门？

2．一个蓄水池装有 9 根水管，其中 1 根为进水管，其余 8 根为相同的出水管。开始进水管以均匀的速度不停地向这个蓄水池蓄水。池内注入了一些水后，有人想把出水管也打开，使池内的水再全部排光。如果把 8 根出水管全部打开，需要 3 小时可将池内的水排光；而若仅打开 3 根出水管，则需要 18 小时。问如果想要在 8 小时内将池中的水全部排光，最少要打开几根出水管？

3．有一片草地，每天都在匀速生长，这片草可供 16 头牛吃 20 天，可供 80 只羊吃 12 天．如果一头牛的吃草量等于 4 只羊的吃草量，那么 10 头牛与 60 只羊一起吃可以吃多少天？

4．有一个蓄水池，池中已经有一些水，一个进水管不断向池内匀速进水．如果打开 10 个相同的出水管放水，3 小时放完；如果打开 5 个相同的出水管放水，8 小时放完．如果要求在 2 小时放完，要安排多少个相同的出水管？

5．北京密云水库建有10个泄洪洞，现在水库的水位已经超过安全线，并且水量还在以一个不变的速度增加，为了防洪，需要调节泄洪的速度，假设每个闸门泄洪的速度相同，经测算，若打开一个泄洪闸，30个小时以后水位降至安全线；若同时打开两个泄洪闸，10个小时后水位降至安全线。根据抗洪形势，需要用2个小时使水位降至安全线以下，则至少需要同时打开泄洪闸的数目为多少个？

6．有一牧场，已知养牛 27 头，6 天把草吃尽，养牛 23 头，9 天把草吃尽．如果养牛 21 头，那么几天能把草吃尽呢？

7．有三块草地，面积分别为 5 公顷，6 公顷和 8 公顷．每块地每公顷的草量相同而且长的一样快，第一块草地可供 11 头牛吃 10 天，第二块草地可供 12 头牛吃 14 天．第三块草地可供 19 头牛吃多少天？

8．有一口井，用四部抽水机 40 分钟可以抽干，若用同样的抽水机 6 部，24 分钟可以抽干，那么，同样用抽水机 5 部，多少时间可以抽干？

9．现欲将一池塘水全部抽干，但同时有水匀速流入池塘．若用 8 台抽水机 10 天可以抽干；用 6 台抽水机 20 天能抽干．问：若要 5 天抽干水，需多少台同样的抽水机来抽水？

10．第一、二、三号牧场的面积依次为 3 公顷、5 公顷、7 公顷，三个牧场上的草长得一样密，且生长得一样快。有两群牛，第一群牛 2 天将一号牧场的草吃完，又用 5 天将二号牧场的草吃完。在这 7 天里，第二群牛刚好将三号牧场的草吃完。如果第一群牛有 15 头，那么第二群牛有多少头？

11．小明从甲地步行去乙地，出发一段时间后，小亮有事去追赶他，若骑自行车，每小时行 15 千米，3 小时可以追上；若骑摩托车，每小时行 35 千米，1 小时可以追上；若开汽车，每小时行 45 千米，多少分钟能追上？

12．一个农夫有面积为 2 公顷、4 公顷和 6 公顷的三块牧场。三块牧场上的草长得一样密，而且长得一样快。农夫将 8 头牛赶到 2 公顷的牧场，牛 5 天吃完了草；如果农夫将 8 头牛赶到 4 公顷的牧场，牛 15 天可吃完草。问：若农夫将这 8 头牛赶到 6 公顷的牧场，这块牧场可供这些牛吃几天？

13．牧场上有一片牧草，可以供 27 头牛吃 6 天，供 23 头牛吃 9 天，如果每天牧草生长的速度相同，那么这片牧草可以供 21 头牛吃几天？

14．由于天气逐渐冷起来，牧场上的草不仅不长大，反而在匀速地在减少，已知某块地上的草可供 21 头牛吃 10 天，或可供 30 头牛吃 8 天，照此计算，可供 45 头牛吃多少天。

15．一个牧场长满青草，牛在吃草而草又在不断生长，已知牛 27 头，6 天把草吃尽，同样一片牧场，牛 23 头，9 天把草吃尽．如果有牛 21 头，几天能把草吃尽？

16．某足球赛检票前几分钟就有观众排队，每分钟来的观众人数一样多，从开始检票到等候入场的队伍消失，若同时开 4 个入场口需 50 分钟，若同时开 6 个入场口需 30 分钟。如果要使队伍 25 分钟消失，需要同时开几个入场口？

综合拔高拓展

17．广州火车站在检票前若干分钟就开始排队，每分钟来的旅客人数一样多。从开始检票到检票队伍消失，若同时开 5 个检票口，则需要 30 分钟，若同时开 6 个检票口，则需 20 分钟。如果要使等候检票的队伍 10 分钟消失，需要同时开多少个检票口？

18．画展 8：30 开门，但早有人来排队入场，从第一个观众来到时起，若每分钟来的观众一样多，如果开 3 个入场口，9 点就不再有人排队；如果开 5 个入场口，8 点 45 分就没有人排队。求第一个观众到达的时间。

19．有甲，乙两块匀速生长的草地，甲草地的面积是乙草地面积的三倍。30 头牛 12 天能吃完甲草地上的草，20 头牛 4 天能吃完乙草地的草。问几头牛 10 天能同时吃完两块草地上的草？

20．内蒙古草原的一个牧场有一片青草，这片青草每天都在匀速生长。这片牧草可供 24 头牛吃 12 天，可供 30 头牛吃 8 天，问可供多少头牛吃 4 天？

21．一片草地每天长的草一样多，现有牛、羊、鹅各一只，且羊和鹅吃草的总量正好是牛吃草的总量．如果草地放牧牛和羊，可以吃 45 天；如果放牧牛和鹅，可吃 60 天：如果放牧羊和鹅，可吃 90 天．这片草地放牧牛、羊、鹅，可以供它们吃多少天？

22．有一片牧场，草每天都在均匀地生长．如果在牧场上放养 18 头牛，那么 10 天能把草吃完；如果只放养 24 头牛，那么 7 天就把草吃完了，请问：

（1）如果放养 32 头牛，多少天可以把草吃完？

（2）要放养多少头牛，才能恰好 14 天把草吃完？

23．某建筑工地开工前运进一批砖，开工后每天运进相同数量的砖，如果派 15 个工人砌砖墙 14 天可以把砖运完，如果派 20 个工人，9 天可以把砖用完，现在派若干名工人砌了 6 天后，调走 6 名工人，其余工人又工作 4 天才砌完，问原来有多少工人来砌墙？

24．一只船发现漏水时，已经进了一些水，现在水匀速进入船内，如果 3 人淘水 40 分钟可以淘完；6 人淘水 16 分钟可以把水淘完，那么，5 人淘水几分钟可以把水淘完？

25．有一牧场长满牧草，牧草每天匀速生长，这个牧场可供 17 头牛吃 30 天，可供 19 头牛吃 24 天，现在有若干头牛在吃草，6 天后，4 头牛死亡，余下的牛吃了 2 天将草吃完，问原来有牛多少头？

26．4 头牛 28 天可以吃完 10 公顷牧场上全部牧草，7 头牛 63 天可以吃完 30 公顷牧场上全部牧草，那么 60 头牛多少天可以吃完 40 公顷牧场上全部牧草？（每公顷牧场上原有草量相等，且每公顷牧场上每天生长草量相等）

27．有一片草场，草每天的生长速度相同。若 14 头牛 30 天可将草吃完，70 只羊 16 天也可将草吃完（4 只羊一天的吃草量相当于 1 头牛一天的吃草量）。那么，17 头牛和 20 只羊多少天可将草吃完？

28．牧场上长满了牧草，可供 27 头牛吃一周，或可供 23 头牛吃 9 周，如果牧草每周匀速生长，问原来的草量可供几头牛吃 1 周？

29．红旗农场有三块草地，面积分别是 5、15、36 公顷。草地上的草一样厚，而且长得一样快。第一块草地可供 12 头牛吃 28 天，第二块草地可供 21 头牛吃 63 天，第三块草地可供 36 头牛吃多少天？

30．甲、乙、丙三个仓库，各存放着数量相同的面粉，甲仓库用一台皮带输送机和 12 名工人，5 小时可将甲仓库内面粉搬完；乙仓库用一台皮带输送机和 28 名工人，3 小时可将仓库内面粉搬完；丙仓库现有 2 台皮带输送机，如果要用 2 小时把丙仓库内面粉搬完，同时还要多少名工人？（每个工人每小时工效相同，每台皮带输送机每小时工效也相同，另外皮带输送机与工人一起往外搬运面粉）

31．进入冬季后，有一片牧场上的草开始枯萎，因此草会均匀地减少．现在开始在这片牧场上放羊，如果有 38 只羊，把草吃完需要 25 天；如果有 30 只羊，把草吃完需要 30 天．如果有 20 只羊，这片牧场可以吃多少天？

32．120 头牛 28 天吃完 10 公顷牧场上的全部牧草，210 头牛 63 天吃完 30 公顷牧场上的全部牧草，如果每公顷牧场上原有的牧草相等，且每公顷每天新生长的草量相同，那么多少头牛 126 天可以吃完 72 公顷牧场上的全部牧草？

33．把一片均匀生长的大草地分成三块，面积分别为 5 公顷、15 公顷和 24 公顷．如果第一块草地可以供 10 头牛吃 30 天，第二块草地可以供 28 头牛吃 45 天，那么第三块草地可以供多少头牛吃 80 天？

34．由于天气逐渐寒冷，牧场的草不仅不生长反而以固定的速度在减少．已知某块草地的草可供 20 头牛吃 5 天，可供 15 头牛吃 6 天，照这样计算，可以供几头牛吃 10 天？

35．一片草地，可供 5 头牛吃 30 天，也可供 4 头牛吃 40 天，如果 4 头牛吃 30 天，又增加了 2 头牛一起吃，还可以再吃几天？

36．画展 9 点开门，但早有人来排队入场，从第一个观众来到时起，若每分钟来的观众一样多，如果开 3 个入场口，9 点 9 分就不再有人排队；如果开 5 个入场口，9 点 5 分就没有人排队．求第一个观众到达的时间．

37．科学家研究表明，10000 平方米的森林在生长季节每周可吸收 6.3 吨二氧化碳。城市森林公园有 60000 平方米森林，7 月份这片森林一共可以吸收多少二氧化碳？

参考答案

1．4 个

【详解】设 1 个泄洪闸 1 小时的泄水量为 1 份．

（1）水库中每小时增加的上游河水量：（1×30-2×10）÷（30-10）=0.5（份）

（2）水库中原有的超过安全线的水量为：1×30-0.5×30＝15（份）

（3）在 5.5 小时内共要泄出的水量是：15+0.5×5.5＝17.75（份）

（4）至少要开的闸门个数为：17.75÷5.5≈4（个）（采用“进 1”法取值）

2．5 根

【分析】根据题意，设出 1 根出水管每小时的排水量为 1 份，先求出进水管每小时的进水量，在求出蓄水池原有水量，由此问题可以解决。

【详解】设1根排水管1小时排水为“1”份，

进水速度为：

（3×18－8×3）÷（18－3）

＝（54－24）÷15

＝30÷15

＝2（份）

原有水量为：

（8－2）×3

＝6×3

＝18（份）

如果想要在8小时内将池中的水全部排光，最少要打开：

18÷8＋2

＝2.25＋2

＝4.25（根）

根出水管，每根出水管 1 小时排水 1 份，又出水管的根数是整数，故最少要打开 5 根出水管。

答：最少要打开 5 根出水管。

【点睛】本题属于牛吃草问题，只要求出进水管每小时的进水量是解题的关键。

3．8 天

【分析】：这道题又有一个新的变化，不是只有牛了，而是有牛又有羊，表面上看起来很复杂，但是冷静的分析一下，因为题目告诉我们 1 头牛一天的吃草量等于 4 只羊一天的吃草量，因此我们可以把 4 只羊换成 1 头牛，这样就只剩一种动物了．80 只羊可以换成 20 头牛，60 只羊可以换成 15 头牛．

【详解】设 1 头牛 1 天吃 1 份牧草，那么 16 头牛 20 天一共吃了 16×20=320 份草，20 头牛 12 天吃了 240 份草，每天长草量为（320-240）÷（20-12）=10 份草，原有的草量为 320-10×20=120 份草，现在有 10+15=25 头牛，其中吃原有草的牛有 25-10=15 头，那么可以吃 120÷15=8 天．

【点睛】不论是有几种动物，只要他们之间互相有联系，那么都可以把它们转化成一种动物来操作．

4．14 个

【详解】排水问题对照“牛吃草问题”，蓄水池原注入的水量相当于“原有的草量”，打开出水管时新注入的水量相当于“新生长的草量”，每小时注入的水量相当于“每天新生长的草量”．

解：(1)每小时新注入的水量是：

（5×8-10×3）÷（10-5）

=（40-30）÷5

=10÷5

=2（个）

(2)排水前原有的水量是：

10×3-2×3

=30-6

=24（个）

（3）蓄水池 2 小时的总水量是：

24+2×2=28（个）

4.2 小时把池内的水排完需要安排同样的出水管数是：28÷2=14（个）

答：要想 2 小时内把池内的水排完需要安排同样的 14 个出水管.

5．8 个

【分析】设每个泄洪闸每小时泄洪的量为“1”，根据“每小时增加的水量＝总量差÷时间差”，求出每小时增加的水量；再根据“原有水量超过安全线的部分＝（泄洪闸数－每小时增加的水量）×时间”，求出原有的水量超过安全线的部分；最后用原有水量÷时间＋每小时增加的水量，即可求出需要打开的泄洪闸数量。

【详解】设每个泄洪闸每小时泄洪的量为“1”，则水库每小时增加的水量为：

（1×30－2×10）÷（30－10）

＝10÷20

＝0.5

原有的水量超过安全线的部分有：

（1－0.5）×30

＝0.5×30

＝15

如果要用 2 个小时使水位降至安全线以下，至少需要打开泄洪闸的个数：

15÷2＋0.5

＝8（个）

答：至少需要同时打开泄洪闸的数目为 8 个。

【点睛】解题关键是要读懂题目的意思，根据题目给出的条件，准确找到等量关系是解题的关键。

6．12 天

【分析】对于比较基本的牛吃草问题，我们可以用“五步法”来解题：

1.求出两个总量.

2.总量的差÷时间差=每天长草量=安排去吃新草的牛数

3.每天长草量×天数=总共长出来的草

4.草的总量－总共长出来的草＝原有的草

5.原有的草÷吃原有草的牛＝能吃多少天（或原有的草÷能吃多少天＝吃原有草的牛）

【详解】解：设 1 头牛 1 天吃 1 份的草，

27×6＝162　　　23×9＝207

（207－162）÷（9－6）＝15

15×6＝90

162－90＝72

72÷（21－15）＝12

答：如果养牛 21 头，那么 12 天能把草吃尽

7．8 天

【详解】略

8．30 分钟

【详解】这是典型的牛吃草问题，要先求出变化的量（井每分钟涌出的水量）和不变的量（井里原有的水量）；由于每台抽水机的工作效率是一定的，所以可以用 4 部抽水机和 6 部抽水机的工作总量之差÷时间差（40-24）即为井每分钟涌出的水量，然后用四部抽水机 40 分钟的工作总量-40 分钟涌出的水量就是井里原有的水量，进而可以求出同样用抽水机 5 部，多少时间可以抽干？

解：设每台抽水机每分钟的抽水量为 1 份．

井每分钟涌出的水量为：

（4×40-6×24）÷（40-24）

=16÷16

=1（份）

井里原有水量为：4×40-40×1=120（份）或 6×24-24×1=120（份）；

井每分钟涌出的水即 1 份，要用 1 台抽水机去抽，剩下 5-1=4（台）抽水机就要去抽原有的水：120÷（5－1）

=120÷4

=30（分钟）

答：同样用抽水机 5 部，30 分钟可以抽干．

9．12 台

【详解】解：设 1 台抽水机 1 天的抽水量为 1 单位，则池塘每天的进水速度为：（6×20-8×10）÷（20-10）=4 单位，池塘中原有水量：6×20-4×20=40 单位．若要 5 天内抽干水，需要抽水机 40÷5+4=12 台．

10．15 头

【分析】15 头牛，2 天吃完 1 号牧场也就是 3 公顷，15 头牛，5 天吃完 2 号牧场也就是 5 公顷；因为要计算草的生长速度，所以，设每头牛吃草速度为每天 X 公顷，每公顷草的生长速度为每天 Y 公顷，可得方程：2（15X）＝2（3Y）＋3，5（15X）＝7（5Y）＋5

【详解】解：15 头牛，2 天吃完 1 号牧场也就是 3 公顷，5 天吃完 2 号牧场也就是 5 公顷；设每头牛吃草速度为每天 X 公顷，每公顷草的生长速度为每天 Y 公顷

可得方程：

2×15X＝2×3Y＋3，

30X＝6Y＋3

30X÷3＝（6Y＋3）÷3

10X＝2Y＋1①

5×15X＝7×5Y＋5

75X＝35Y＋5

75X÷5＝（35Y＋5）÷5

15X＝7Y＋1②

由①得：10X×1.5＝（2Y＋1）×1.5

即为：15X＝3Y＋1.5 代入②得：

3Y＋1.5＝7Y＋1

3Y＋1.5﹣3Y﹣1＝7Y＋1﹣1﹣3Y

0.5＝4Y

4Y÷4＝0.5÷4

Y＝0.125

把 Y＝0.125 代入①得：

10X＝2×0.125＋1

10X÷10＝1.25÷10

X＝0.125

设第 2 群牛有 n 头，可得方程

7×0.125n＝7×7×0.125＋7

7×0.125n÷7÷0.125＝（7×7×0.125＋7）÷7÷0.125

n＝15

答：第二群牛有 15 头。

【点睛】本题属于典型的牛吃草问题，解答时认真分析所给的条件，根据条件列方程解答即可解决。

11．45 分钟

【详解】本题是“牛吃草”和行程问题中的追及问题的结合．小明在$3-1=2$小时内走了$15\times3-35\times1=10$千米，那么小明的速度为$10\div2=5$(千米/时)，追及距离为$\left(15-5\right)\times3=30$(千米)．汽车去追的话需要：

$30\div\left(45-5\right)=\frac{3}{4}$(小时)$=45$(分钟)．

12． 45 天

【分析】题中 3 块牧场面积不同，要解决这个问题，可以将 3 块牧场的面积统一起来；2 公顷、4 公顷和 6 公顷统一为 12 公顷，然后按照一般的行程问题考虑。

【详解】设1头牛1天吃草量为“1”；

将8头牛赶到2公顷的牧场，牛5天吃完了草，相当于12公顷的牧场可供48头牛吃5天；

将8头牛赶到4公顷的牧场，牛15天可吃完草，相当于12公顷的牧场可供24头牛吃15天；

所以12公顷的牧场每天新生长的草量为：

$\left(24\times15-48\times5\right)\div\left(15-5\right)$

$=120\div10$

$=12$

12公顷牧场原有草量为：

$\left(48-12\right)\times5$

$=36\times5$

$=180$

那么12公顷牧场可供16头牛吃：

$180\div\left(16-12\right)$

$=180\div4$

$=45$（天）

答：6公顷的牧场可供8头牛吃45天。

13．12天

【详解】根据题意，设每头牛每天吃“1”份草，先求出牧场每天的长草量，再求出牧场原有的草量，由此即可算出这片牧草可供21头牛吃的天数.

解：设每头牛每天吃“1”份草.

每天新生草量为：

（23×9-27×6）÷（9-6）

=（207-162）÷3

=45÷3

=15（份）

原有草量为：27×6-15×6=72（份）

21头牛吃的天数：

72÷（21-15）

=72÷6

=12（天）

答：这片牧草可供21头牛吃12天.

14．6天