6.2.3 向量的数乘运算

高一下学期

学习目标

1、掌握向量数乘运算的定义；

2、掌握向量数乘运算的运算律；

3、掌握向量共线定理；

4、通过学习向量的有关概念，提升数学抽象素养；通过判断与向量有关命题的真假，提升逻辑推理素养.

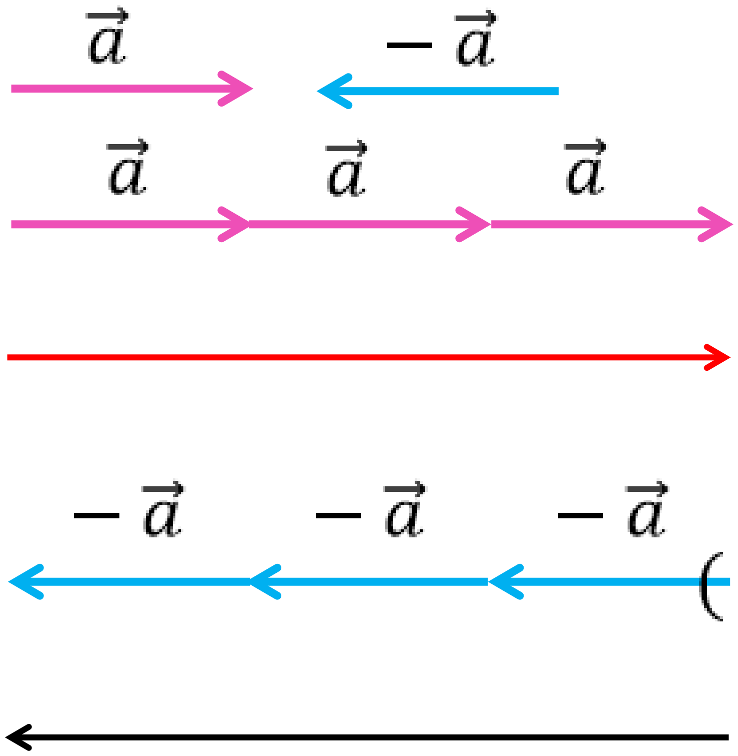
重点：向量数乘运算的定义和运算律

难点：向量共线定理

新知探究

思考：已知非零向量$\vec{a}$，作出$\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$和$(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})$，它们的长度和方向分别是怎样的？

追问：在整式运算中，我们可以将$x+x+x$用乘法简写为$3x$，对于非零向量$\vec{a}$，$\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$我们可以怎样简写呢？



$\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ 长度为$\vec{a}$的3倍,方向与$\vec{a}$相同

$3\vec{a}$

$(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})$ 长度为$\vec{a}$的3倍,方向与$\vec{a}$相反

$-3\vec{a}$

新知探究

1、向量的数乘：一般地，我们规定实数λ与向量$\vec{a}$的积是一个向量，这种运算叫做向量的数乘，记作$\lambda\vec{a}$.

模长：(1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$；

方向：(2) 当$\lambda > 0$时，$\lambda\vec{a}$的方向与$\vec{a}$的方向相同；

当$\lambda < 0$时，$\lambda\vec{a}$的方向与$\vec{a}$的方向相反.

当$\lambda = 0$时，$0 \cdot \vec{a} =$ $\underline{\ \vec{0}\ }$.

当$\lambda = -1$时，$(-1)\vec{a} =$ $\underline{\ -\vec{a}\ }$.

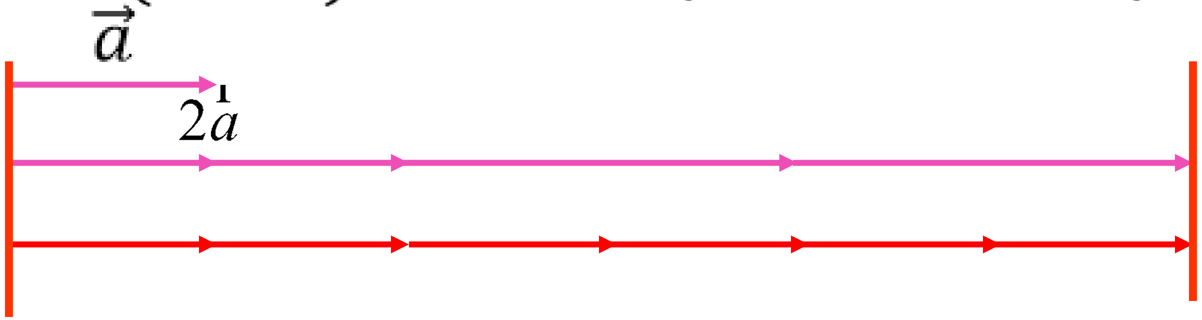
零乘任何向量的结果为零向量；

-1乘任何向量得到这个向量的相反向量.

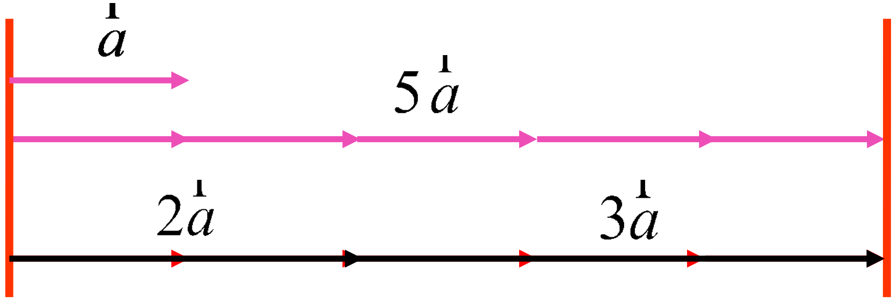
新知探究

探究：求作向量$3(2\vec{a})$和$6\vec{a}$（$\vec{a}$为非零向量），向量$(2+3)\vec{a}$和$2\vec{a}+3\vec{a}$，

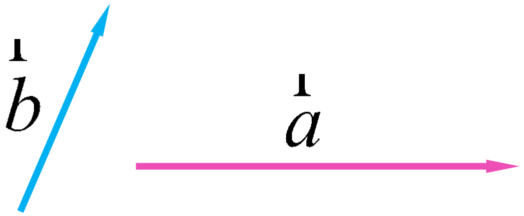
向量$2(\vec{a}+\vec{b})$和$2\vec{a}+2\vec{b}$，并进行比较，你发现了什么？

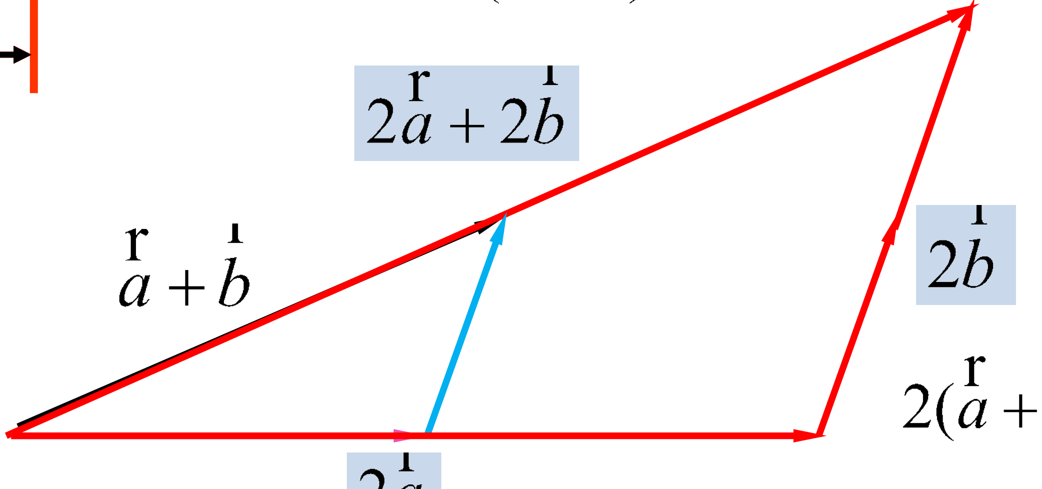


$3(2\vec{a}) = 6\vec{a}$



$(2+3)\vec{a} = 2\vec{a} + 3\vec{a}$





$2(\vec{a}+\vec{b}) = 2\vec{a}+2\vec{b}$

2、根据实数与向量的积的定义，可以验证下面的运算律是成立的.

设λ，μ为实数，那么

(1) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;

(2) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

(3) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

你能证明这些运算律吗？

对于∀向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，以及∀实数λ，μ_1，μ_2，恒有$\lambda(\mu_1\vec{a} \pm \mu_2\vec{b}) = \lambda\mu_1\vec{a} \pm \lambda\mu_2\vec{b}$.

特别地，我们有：$(-\lambda)\vec{a} = -(\lambda\vec{a}) = \lambda(-\vec{a})$，$\lambda(\vec{a} - \vec{b}) = \lambda\vec{a} - \lambda\vec{b}$.

向量的加、减、数乘运算统称为向量的线性运算. 线性运算的结果仍是向量.

新知探究

证明（1）$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$.

（2）（3）的证明略.

证：当$\lambda = 0$或$\mu = 0$或$\vec{a} = \vec{0}$时，上式显然成立.

当$\lambda \neq 0$或$\mu \neq 0$或$\vec{a} \neq \vec{0}$时，由向量数乘运算的定义，得：

$|\lambda(\mu\vec{a})| = |\lambda||\mu\vec{a}| = |\lambda||\mu||\vec{a}|$，$|(\lambda\mu)\vec{a}| = |\lambda\mu||\vec{a}| = |\lambda||\mu||\vec{a}|$.

当λ，μ同号时，上式两边向量的方向与向量$\vec{a}$的方向相同；

当λ，μ异号时，上式两边向量的方向与向量$\vec{a}$的方向相反.

所以$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$.

练习

2、根据实数与向量的积的定义，可以验证下面的运算律是成立的.

设λ，μ为实数，那么

(1) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$;

(2) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;

(3) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

对于∀向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，以及∀实数λ，μ_1，μ_2，恒有$\lambda(\mu_1\vec{a}\pm\mu_2\vec{b})=\lambda\mu_1\vec{a}\pm\lambda\mu_2\vec{b}$.

特别地，我们有：$(-\lambda)\vec{a}=-(\lambda\vec{a})=\lambda(-\vec{a})$，$\lambda(\vec{a}-\vec{b})=\lambda\vec{a}-\lambda\vec{b}$.

向量的加、减、数乘运算统称为向量的线性运算. 线性运算的结果仍是向量.

典例精析

例题：计算：

（1）$(-3)\times 4\vec{a}$；

（2）$3(\vec{a}+\vec{b})-2(\vec{a}-\vec{b})-\vec{a}$；

（3）$(2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c})-(3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})$.

解：（1）原式$=(-3\times 4)\vec{a}=-12\vec{a}$；

（2）原式$=3\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{a}=5\vec{b}$；

（3）原式$=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}-3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}=-\vec{a}+5\vec{b}-2\vec{c}$.

练习

教材P16

2、化简：

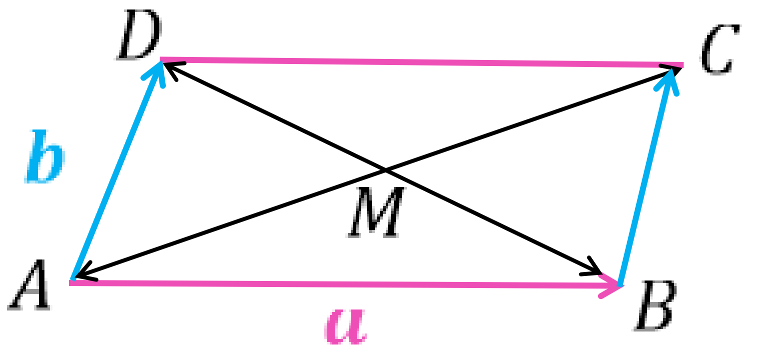
(1) $5(3\vec{a}-2\vec{b})+4(2\vec{b}-3\vec{a})$；　　$3\vec{a}-2\vec{b}$

(2) $\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b})-\frac{1}{4}(3\vec{a}-2\vec{b})-\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$；　　$-\frac{11}{12}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

(3) $(x+y)\vec{a}-(x-y)\vec{a}$.　　$2y\vec{a}$

典例精析

例题：如图，▱$ABCD$的两条对角线相交于点M，且$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，用$\vec{a}$，$\vec{b}$表示$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$.



解：在▱$ABCD$中，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$，

$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{b}$.

由平行四边形的两条对角线互相平分，得：

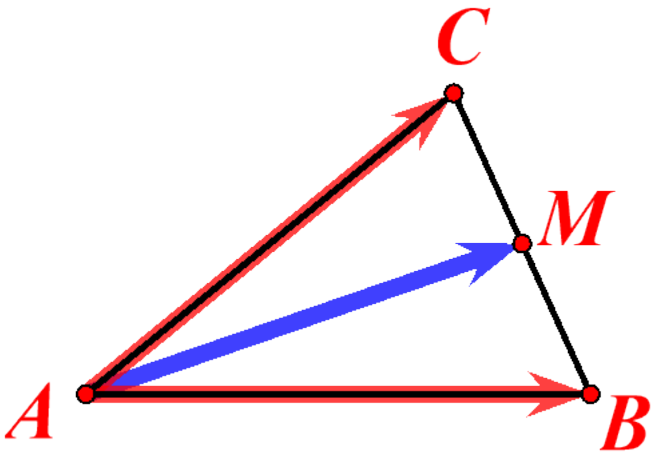
$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b},$$

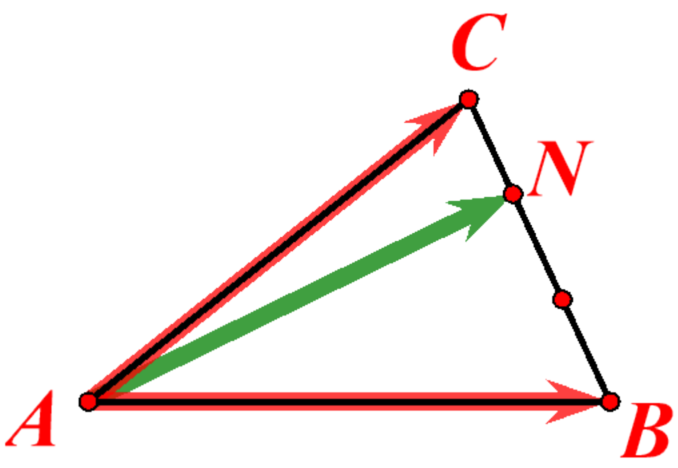
$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},\quad \overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=-\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}.$$

习题演练

练习：用$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$表示$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AN}$(M为BC中点，N为靠近点C的三等分点).



$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$



$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN}&=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC})\end{aligned}$$

习题演练

1、辨析：$(1)5\vec{a}-5\vec{a}=0.$ ✗

(2)若$m\vec{a}=m\vec{b}$，则有$\vec{a}=\vec{b}.$ ✗

(3)若$m\vec{a}=n\vec{a}$，则有$m=n.$ ✗

$(4)|\lambda\vec{a}|=\lambda|\vec{a}|.$ ✗

2、点C在直线AB上，且$\frac{AC}{BC}=\frac{5}{2}$，则$\overrightarrow{AC}=$ $\underline{\frac{5}{3}\text{或}\frac{5}{7}}$ $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}=$ $\underline{\frac{2}{3}\text{或}-\frac{2}{7}}$ $\overrightarrow{AB}$

新知探究

思考：如果把非零向量$\vec{a}$的长度伸长到原来的3.5倍，方向不变得到向量$\vec{b}$，向量$\vec{b}$该如何表示？向量$\vec{a}$，$\vec{b}$之间的位置关系怎样？ $\vec{b}=3.5\vec{a}$ $\vec{a}//\vec{b}$

可以发现，引入向量数乘运算后，实数与向量的积与原向量共线.

事实上，对于向量$\vec{a}(\vec{a}\neq\vec{0})$，$\vec{b}$，如果有一个实数$\lambda$，使$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，那么由向量数乘的定义可知$\vec{a}$与$\vec{b}$共线.

已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$共线，且向量$\vec{b}$的长度是向量$\vec{a}$的长度的μ倍，即$|\vec{b}|=\mu|\vec{a}|$，

那么当$\vec{a}$与$\vec{b}$同方向时，有$\vec{b}=\mu\vec{a}$；当$\vec{a}$与$\vec{b}$反方向时，有$\vec{b}=-\mu\vec{a}$.

新知生成

3、向量共线定理：

向量$\vec{a}(\vec{a}\neq\vec{0})$与$\vec{b}$共线的充要条件是：存在唯一一个实数$\lambda$，使$\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

辨析：(1) 若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$共线，则存在唯一一个实数λ，使$\vec{b}=\lambda\vec{a}$. ✗

(2) 若存在λ，使$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，则必有$\vec{a}=\frac{1}{\lambda}\vec{b}$. ✗

(2) 若$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$共线. ✓

练习

教材P16

1、判断下列各小题中的向量$\vec{a}$与$\vec{b}$是否共线：

(1)$\vec{a}=-2\vec{e}$，$\vec{b}=2\vec{e}$；

(2)$\vec{a}=\vec{e_1}-\vec{e_2}$，$\vec{b}=-2\vec{e_1}+2\vec{e_2}$.

典例精析

例题：已知$\vec{a}$，$\vec{b}$是两个不共线的向量，向量$\vec{b}-t\vec{a}$，$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$共线，求实数$t$.

解：由于$\vec{a}$，$\vec{b}$不共线，易知向量$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$为非零向量.

由向量$\vec{b}-t\vec{a}$，$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$共线，可知存在实数$\lambda$，使得$\vec{b}-t\vec{a}=\lambda(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b})$，

即$(t+\frac{1}{2}\lambda)\vec{a}=(\frac{3}{2}\lambda+1)\vec{b}$. 由$\vec{a}$，$\vec{b}$不共线，必有$t+\frac{1}{2}\lambda=\frac{3}{2}\lambda+1=0$.

否则，不妨设$t+\frac{1}{2}\lambda\neq 0$，则$\vec{a}=\frac{\frac{3}{2}\lambda+1}{t+\frac{1}{2}\lambda}\vec{b}$.

由两个向量共线的充要条件知，$\vec{a}$，$\vec{b}$共线，与已知矛盾.

由$\begin{cases} t+\frac{1}{2}\lambda=0, \\ \frac{3}{2}\lambda+1=0, \end{cases}$解得$t=\frac{1}{3}$.因此，当向量$\vec{b}-t\vec{a}$，$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$共线时，$t=\frac{1}{3}$.

练习

3、已知$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$是两个不共线的向量，$\vec{a}=\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2}$，$\vec{b}=2\overrightarrow{e_1}+k\overrightarrow{e_2}$.

若$\vec{a}$与$\vec{b}$是共线向量，求实数k的值.