

第 06 讲 实数的运算 (4 大考点)



考点考向

一、实数大小的比较

正实数大于 0，负实数小于 0.

两个正数，绝对值大的数较大；两个负数，绝对值大的数较小.

从数轴上看，右边的点所表示的数总比左边的点所表示的数大.

二、实数的运算

有理数关于相反数和绝对值的意义同样适合于实数.

当数从有理数扩充到实数以后，实数之间不仅可以进行加、减、乘、除（除数不为 0）、乘方运算，而且正数及 0 可以进行开平方运算，任意一个实数可以进行开立方运算. 在进行实数的运算时，有理数的运算法则及运算性质等同样适用.



考点精讲

题型一：实数的混合运算

一、填空题

1. (2021·浙江·杭州市青春中学七年级期中) 计算：

(1) $\sqrt[3]{64} = \underline{\quad}$. (2) $4 + \sqrt{(-4)^2} = \underline{\quad}$. (3) $\sqrt{64}$ 的立方根为 $\underline{\quad}$.

(4) 如果 $\sqrt{a}$ 的平方根是 ± 3 ，则 $\sqrt[3]{a-17} = \underline{\quad}$.

【答案】 4 8 3 4

【分析】(1) 根据立方根的定义求解即可；

(2) 根据平方根的定义先化简，然后求解即可；

(3) 根据平方根的定义先化简，再求立方根即可；

(4) 根据平方根的定义先求出 a ，然后代入求解即可.

【详解】解：(1) $\sqrt[3]{64} = 4$ ；

(2) $4 + \sqrt{(-4)^2} = 4 + \sqrt{16} = 4 + 4 = 8$ ；

(3) $\because \sqrt{64} = 8$ ，

$\therefore \sqrt{64}$ 的立方根即为 8 的立方根，8 的立方根为 3，

$\therefore \sqrt{64}$ 的立方根为 3；

(4) $\therefore \sqrt{a}$ 的平方根是 ± 3 ,

$$\therefore \sqrt{a} = (\pm 3)^2 = 9,$$

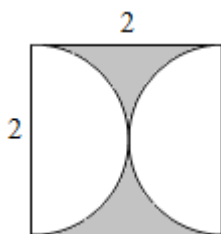
$$\therefore a = 9^2 = 81,$$

$$\therefore \sqrt[3]{a-17} = \sqrt[3]{81-17} = \sqrt[3]{64} = 4;$$

故答案为: 4; 8; 3; 4.

【点睛】本题考查平方根, 算术平方根以及立方根的相关计算, 理解平方根与立方根的相关基本概念是解题关键.

2. (2021·浙江温州·七年级期中) 如图边长为 2 的正方形, 则图中的阴影部分面积是_____.



【答案】 $4 - \pi$

【分析】由图可知阴影部分的面积等于正方形面积减去圆的面积, 由此求解即可.

【详解】解: 根据题意可得:

$$S_{\text{阴影}} = 2 \times 2 - \pi \times \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 4 - \pi.$$

故答案为: $4 - \pi$.

【点睛】此题主要考查了实数的运算, 解题的关键是熟知正方形、圆的面积公式.

3. (2022·浙江宁波·七年级期末) 计算: $|3 - \pi| + |\pi - 4| =$ _____.

【答案】 1

【分析】先化简绝对值, 再加减运算即可求解.

【详解】解: $\because 3 < \pi < 4$,

$$\therefore |3 - \pi| + |\pi - 4| = \pi - 3 + 4 - \pi = 1,$$

故答案为: 1.

【点睛】本题考查化简绝对值、实数的加减运算, 会利用绝对值的性质化简绝对值是解答的关键.

4. (2021·浙江·台州市书生中学七年级期中) 若 $\sqrt[3]{1-2x}$ 与 $\sqrt[3]{3x-5}$ 互为相反数, 则 $(1 - \sqrt{x})^{2021} =$ _____.

【答案】-1

【分析】根据题意，可得： $\sqrt[3]{1-2x} + \sqrt[3]{3x-5} = 0$ ，所以 $1-2x = -(3x-5)$ ，据此求出 x 的值是多少，再应用代入法，求出 $(1-\sqrt{x})^{2021}$ 的值是多少即可。

【详解】解：Q $\sqrt[3]{1-2x}$ 与 $\sqrt[3]{3x-5}$ 互为相反数，

$$\therefore \sqrt[3]{1-2x} + \sqrt[3]{3x-5} = 0,$$

$$\therefore 1-2x = -(3x-5),$$

解得： $x=4$ ，

$$\therefore (1-\sqrt{x})^{2021} = (1-\sqrt{4})^{2021} = (1-2)^{2021} = (-1)^{2021} = -1,$$

故答案为：-1.

【点睛】此题主要考查了实数的混合运算，相反数的性质，立方根的性质，根据两个数的立方根互为相反数得到关于 x 的方程是关键点。

二、解答题

5. (2021·浙江台州·七年级期末) 计算： $|\sqrt{3}| - \sqrt[3]{27} + \sqrt{4}$.

【答案】 $\sqrt{3}-1$

【分析】先逐项化简，再算加减即可。

【详解】解：原式 $=\sqrt{3}-3+2=\sqrt{3}-1$ ，

故答案为： $\sqrt{3}-1$ 。

【点睛】本题考查了实数的混合运算，熟练掌握立方根和算术平方根的定义是解答本题的关键。

6. (2021·浙江台州·七年级期末) 计算： $\sqrt{4} + \sqrt[3]{-8} - (\sqrt{3})^2$.

【答案】-3

【分析】先计算算术平方根、立方根、实数的乘方，再计算加减法即可得。

【详解】解：原式 $=2+(-2)-3$

$=-3$ 。

【点睛】本题考查了算术平方根、立方根、实数的运算，熟练掌握运算是解题关键。

7. (2022·浙江金华·七年级期末) 计算：

$$(1)\sqrt[3]{27}+4\div(-2)$$

$$(2)-1^{2022}+3^2\times\sqrt{16}$$

【答案】(1)1

(2)35

【分析】(1) 原式先化简立方根，再计算除法，最后计算减法即可得到答案；

(2) 原式先计算乘方和化简算术平方根，再计算乘法，最后计算加法即可得到答案.

(1)

$$\sqrt[3]{27}+4\div(-2)$$

$$=3-2$$

$$=1$$

(2)

$$-1^{2022}+3^2\times\sqrt{16}$$

$$=-1+9\times 4$$

$$=-1+36$$

$$=35$$

【点睛】本题主要考查了实数的混合运算，熟练掌握运算法则是解答本题的关键.

8. (2022·浙江台州·七年级期中) 计算:

$$(1)\sqrt{16}-\sqrt[3]{64}\times\sqrt[3]{-8};$$

$$(2)|\sqrt{2}-3|+\sqrt{(-3)^2}-(-1)^{2019}.$$

【答案】(1)12

$$(2)7-\sqrt{2}$$

【分析】(1) 直接利用立方根以及算术平方根的性质化简得出答案；

(2) 直接利用绝对值以及二次根式的性质化简得出答案.

(1)

$$\text{解: 原式}=4-4\times(-2)=12;$$

(2)

解：原式 $=3-\sqrt{2}+3+1=7-\sqrt{2}$ ．

【点睛】本题主要考查了实数运算，正确掌握相关运算法则是解题关键．

9.（2022·浙江台州·七年级期中）计算 $\sqrt{16}+\sqrt[3]{-27}+|1-\sqrt{3}|$

【答案】 $\sqrt{3}$

【分析】直接根据算术平方根、立方根以及绝对值的意义将原式进行化简，然后根据实数的运算法则进行计算即可．

【详解】解： $\sqrt{16}+\sqrt[3]{-27}+|1-\sqrt{3}|$
 $=4-3+\sqrt{3}-1$
 $=\sqrt{3}$ ．

【点睛】本题考查了实数的运算，熟练掌握算术平方根、立方根以及绝对值的非负性是解本题的关键．

10.（2021·浙江台州·七年级期末）计算： $\sqrt{4}+\sqrt[3]{27}-|\sqrt{3}-3|$

【答案】 $2+\sqrt{3}$

【分析】首先计算开方和绝对值，然后从左向右依次计算，求出算式的值是多少即可．

【详解】解： $\sqrt{4}+\sqrt[3]{27}-|\sqrt{3}-3|$
 $=2+3-(3-\sqrt{3})$
 $=2+3-3+\sqrt{3}$
 $=2+\sqrt{3}$

【点睛】此题主要考查了实数的运算，解答此题的关键是要明确：在进行实数运算时，和有理数运算一样，要从高级到低级，即先算乘方、开方，再算乘除，最后算加减，有括号的要先算括号里面的，同级运算要按照从左到右的顺序进行．另外，有理数的运算律在实数范围内仍然适用．

11.（2021·浙江·七年级期中）计算：

$$(1) -1^2 - 6 \div (-2) \times \sqrt{9} \qquad (2) \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt[3]{-8} + \left|-\frac{1}{2}\right|$$

【答案】(1) 8；(2) -1

【分析】(1) 先算乘方和开方，再算乘除，最后算加减；

(2) 先化简各数，再作加减法．

【详解】解：（1） $-1^2 - 6 \div (-2) \times \sqrt{9}$

$$= -1 - 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 3$$

$$= -1 + 9$$

$$= 8;$$

$$(2) \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt[3]{-8} + \left|-\frac{1}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2}$$

$$= -1$$

【点睛】本题考查了实数的混合运算，熟练掌握运算法则和运算顺序是解本题的关键.

12. (2022·浙江台州·七年级期中) 计算：

$$(1) \sqrt{16} - \sqrt[3]{27};$$

$$(2) 2\sqrt{3} + |\sqrt{3} - 2|.$$

【答案】(1) 1

$$(2) 2 + \sqrt{3}$$

【分析】（1）根据算术平方根和立方根化简后计算即可；

（2）去绝对值后计算即可.

（1）

$$\text{解：} \sqrt{16} - \sqrt[3]{27}$$

$$= 4 - 3$$

$$= 1;$$

（2）

$$2\sqrt{3} + |\sqrt{3} - 2|$$

$$= 2\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}$$

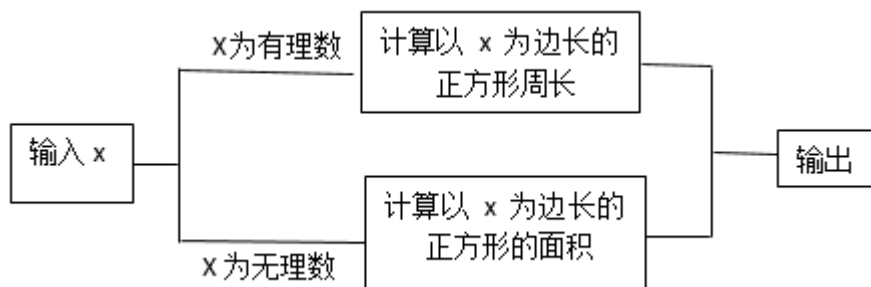
$$= \sqrt{3} + 2.$$

【点睛】本题考查了实数的运算，熟练掌握算术平方根、立方根的定义和绝对值的性质是解题关键.

题型二：程序设计与实数运算

一、填空题

1. (2021·浙江温州·七年级期末) 按如图所示的程序计算, 若开始输入的 x 为 $\sqrt{15}$, 则输出的结果为_____.



【答案】15.

【分析】根据输入的 $\sqrt{15}$, 按照运算程序, 计算结果即可.

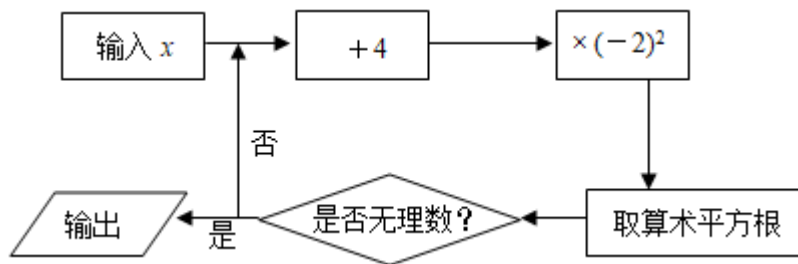
【详解】解: $\because$ 输入的 x 为 $\sqrt{15}$, 是无理数,

$\therefore$ 以 x 为边长的正方形的面积是: $\sqrt{15} \cdot \sqrt{15} = 15$,

故答案是: 15.

【点睛】本题考查有理数的运算, 读懂题目, 掌握计算法则是解题的关键.

2. (2020·浙江温州·七年级期中) 如图所示是计算机程序计算, 若开始输入 $x = -3$, 则最后输出的结果是_____.



【答案】 $2\sqrt{6}$.

【分析】读懂计算程序, 把 $x = -3$ 代入, 按计算程序计算, 直到结果是无理数即可.

【详解】当输入 x , 若 $\sqrt{(x+4) \times (-2)^2} = 2\sqrt{x+4}$ 的结果是无理数, 即为输出的数,

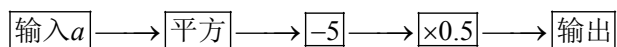
当 $x = -3$ 时, $2\sqrt{x+4} = 2$, 不是无理数,

因此, 把 $x = 2$ 再输入得, $2\sqrt{x+4} = 2\sqrt{6}$,

故答案为: $2\sqrt{6}$.

【点睛】本题考查实数的混合运算, 掌握计算法则是关键.

3. (2021·浙江温州·七年级期中) 如图, 是一个计算程序, 若输入 a 的值为 $\sqrt{10}$, 则输出的结果应为 _____.



【答案】 $\frac{5}{2}$

【分析】 根据计算程序列出算式, 并根据求解即可.

【详解】 解: 根据题意, 得

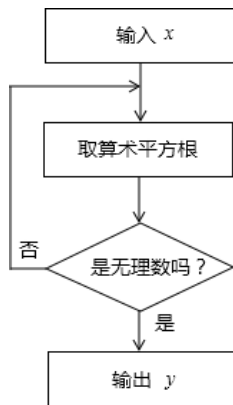
$$\begin{aligned}
 & \left((\sqrt{10})^2 - 5 \right) \times 0.5 \\
 &= (10 - 5) \times 0.5 \\
 &= \frac{5}{2},
 \end{aligned}$$

故答案为: $\frac{5}{2}$.

【点睛】 本题考查实数的混合运算, 理解计算程序, 正确列出算式并求解是解答的关键.

二、解答题

4. (2022·浙江台州·七年级期中) 如图是一个无理数筛选器的工作流程图.



(1) 当 x 为 9 时, y 值为 _____;

(2) 如果输入 0 和 1, _____ (填“能”或“不能”) 输出 y 值;

(3) 当输出的 y 值是 $\sqrt{5}$ 时, 请写出满足题意的 x 值: _____. (写出两个即可)

【答案】 (1) $\sqrt{3}$

(2) 不能

(3) 5 或 25 (答案不唯一)

【分析】(1) 根据运算流程图，即可求解；

(2) 根据 0 的算术平方根是 0，1 的算术平方根是 1，即可判断；

(3) 根据运算法则，进行逆运算即可得到满足题意的 x 值。

(1)

解：当输入 $x=9$ 时，9 的算术平方根为 3，不是无理数，3 的算术平方根为 $\sqrt{3}$ ，

即 $y = \sqrt{3}$ ；

故答案为： $\sqrt{3}$

(2)

解：当输入 $x=0$ 或 1 时，因为 0 的算术平方根是 0，始终是有理数，1 的算术平方根是 1，也始终是有理数，所以不能输出 y ；

故答案为：不能

(3)

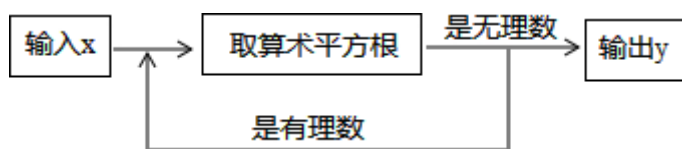
解：当 $y = \sqrt{5}$ 时， $y^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$ ，此时 $x=5$ ；

当 $y = \sqrt{5}$ 时， $y^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$ ， $5^2 = 25$ ，此时 $x=25$ ；

故答案为：5 或 25（答案不唯一）

【点睛】本题考查了无理数以及算术平方根，正确理解工作流程图是解题的关键。

5.（2020·浙江·七年级期末）有一个数值转换器，原理如图。



(1) 当输入的 x 为 81 时，输出的 y 是多少？

(2) 是否存在输入有效的 x 值后，始终输不出 y 值？如果存在，请写出所有满足要求的 x 的值；如果不存在，请说明理由；

(3) 小明输入数据，在转换器运行程序时，屏幕显示“该操作无法运行”，请你推算输入的数据可能是什么情况？

(4) 若输出的 y 是 $\sqrt{5}$ ，试判断输入的 x 值是否唯一？若不唯一，请写出其中的两个。

【答案】(1) $\sqrt{3}$ ；(2) 0 或 1；(3) 见解析；(4) 不唯一，5 和 25

【分析】(1) 根据运算规则即可求解；

(2) 根据 0 和 1 的算术平方根即可判断;

(3) 根据算术平方根的定义, 被开方数是非负数即可求解;

(4) 找到使得输出值为 $\sqrt{5}$ 的两个数即可.

【详解】解: (1) 当 $x=81$ 时,

$\sqrt{81}=9$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{3}$ 是无理数,

故 $y=\sqrt{3}$;

(2) 当 $x=0$ 或 1 时, 始终输不出 y 值.

因为 0, 1 的算术平方根是 0, 1, 一定是有理数;

(3) $\because$ 负数没有算术平方根,

$\therefore$ 输入的数据可能是负数;

(4) 25 的算术平方根是 5, 5 的算术平方根是 $\sqrt{5}$,

故输入的 x 值不唯一, 例如 5 和 25.

【点睛】此题主要考查了算术平方根, 正确把握数值转换器的原理是解题关键.

题型三: 新定义下的实数运算

一、单选题

1. (2022·浙江台州·七年级期中) 设 $(x]$ 表示小于 x 的最大整数, 如 $(3]=2$, $(-1.6]=-2$, 则下列结论中正确的是 ()

A. $(0]=0$

B. $x-(x]$ 的最小值是 0

C. $x-(x]$ 的最大值是 1

D. 不存在实数 x , 使 $x-(x]=0.2$

【答案】C

【分析】根据新定义, 逐项判断即可求解.

【详解】解: A、 $(0]=-1$, 故本选项错误, 不符合题意;

B、因为 $(x]$ 表示小于 x 的最大整数, 所以 $x-(x]>0$, 故本选项错误, 不符合题意;

C、因为 $(x]$ 表示小于 x 的最大整数, 所以 $0<x-(x]\leq 1$ 的最大值是 1, 故本选项正确, 符合题意;

D、存在实数 x , 使 $x-(x]=0.2$, 如 $x=0.2$, 则 $x-(x]=0.2-0=0.2$, 故本选项错误, 不符合题意;

故选: C.

【点睛】本题主要考查了实数的大小比较和新定义运算, 正确理解 $(x]$ 表示小于 x 的最大整数是解题的关键.

2. (2021·浙江·七年级期末) 任何实数 a , 可用 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数, 如 $[4]=4, [\sqrt{3}]=1$, 现对 72 进行如下操作, $72 \xrightarrow{\text{第一次}} [\sqrt{72}]=8 \xrightarrow{\text{第二次}} [\sqrt{8}]=2 \xrightarrow{\text{第三次}} [\sqrt{2}]=1$, 这样对 72 只需进行 3 次操作即可变为 1, 类似地, 对 81 只需进行 () 次操作后即可变为 1.

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】B

【分析】根据新运算依次求出即可.

【详解】解: $[\sqrt{81}]=9, [\sqrt{9}]=3, [\sqrt{3}]=1$, 共 3 次操作,

故选 B.

【点睛】本题考查了估算无理数的大小, 能求出每次的值是解此题的关键.

3. (2021·浙江台州·七年级阶段练习) 定义新运算“ $\oplus$ ”: $a \oplus b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (其中 a 、 b 都是有理数), 例如: $2 \oplus 3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, 那么 $3 \oplus (-4)$ 的值是 ()

- A. $-\frac{7}{12}$ B. $-\frac{1}{12}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{7}{12}$

【答案】C

【详解】试题解析: $3 \oplus (-4)$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{-4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

故选 C.

4. (2022·浙江·宁波市鄞州区咸祥镇中心初级中学七年级阶段练习) 现规定一种运算: $a * b = ab + a - b$, 其中, a, b 为有理数, 则 $a * b + (b - a) * b$ 等于 ()

- A. $a^2 - b$ B. $b^2 - b$ C. b^2 D. $b^2 - a$

【答案】B

【详解】 $a * b + (b - a) * b = ab + a - b + (b - a)b + (b - a) - b$

$$= ab + a - b + b^2 - ab + b - a - b = b^2 - b$$

故选: B.

5. (2021·浙江·高照实验学校七年级阶段练习) 对于任意不相等的两个实数 a, b , 定义运算: $a \times b = a^2 - b^2 + 1$, 例如 $3 \times 2 = 3^2 - 2^2 + 1 = 6$, 那么 $(-5) \times 4$ 的值为 ()

- A. -40 B. -32 C. 18 D. 10

【答案】D

【分析】直接利用题中的新定义给出的运算公式计算得出答案.

【详解】解: $(-5)※4=(-5)^2-4^2+1=10$.

故选: D.

【点睛】本题主要考查了实数运算, 以及定义新运算, 正确运用新定义给出的运算公式是解题关键.

二、填空题

6. (2022·浙江杭州·七年级期中) 用“ $\otimes$ ”定义新运算: 对于任意实数 a, b , 都有 $a \otimes b = b^2 + 1$. 例如:

$7 \otimes 4 = 4^2 + 1 = 17$, 那么 $2022 \otimes 5 =$ _____; 当 m 为实数时, $m \otimes (m \otimes 2) =$ _____.

【答案】 26 26

【分析】首先用 5 的平方加上 1, 求出 $2022 \otimes 5$ 的值; 然后用 2 的平方加上 1, 求出 $m \otimes 2$ 的值, 进而求出 $m \otimes (m \otimes 2)$ 的值即可.

【详解】解: $\because$ 对于任意实数 a, b , 都有 $a \otimes b = b^2 + 1$,

$\therefore 2022 \otimes 5 = 5^2 + 1 = 26$;

当 m 为实数时,

$m \otimes (m \otimes 2)$

$= m \otimes (2^2 + 1)$

$= m \otimes 5$

$= 5^2 + 1$

$= 25 + 1$

$= 26$.

故答案为: 26、26.

【点睛】此题主要考查了实数的运算, 以及定义新运算, 解答此题的关键是要明确“ $\otimes$ ”的运算方法.

7. (2021·浙江·七年级期末) 用“ Δ ”“ $*$ ”定义新运算: 对于任意有理数 a, b , 都有 $a \Delta b = a$ 和 $a * b = b$, 例如 $3 \Delta 2 = 3$, $3 * 2 = 2$. 则 $(2017 \Delta 2016) \Delta (2015 * 2014) =$ _____.

【答案】 2017

【分析】仿照定义新运算: $a \Delta b = a$; $a * b = b$ 进行计算即可.

【详解】解: $(2017 \Delta 2016) \Delta (2015 * 2014)$

$= 2017 \Delta 2014$

$= 2017$

故答案为：2017.

【点睛】本题考查了有理数的混合运算，本题是一种新定义的题目：先理解新定义的含义，然后根据新定义的运算法则进行运算.

8. (2021·浙江·七年级期末) 对于两个不相等的实数 a 、 b ，定义一种新的运算如下，

$$a*b = \frac{\sqrt{a+b}}{a-b} (a+b>0), \text{ 如: } 3*2 = \frac{\sqrt{3+2}}{3-2} = \sqrt{5}, \text{ 那么 } 6*(4*5) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{9}$

【分析】先根据已知条件求出 $4*5$ 的值，再求出 $6*(4*5)$ 的值即可求出结果.

【详解】解： $\because a*b = \frac{\sqrt{a+b}}{a-b} (a+b>0)$,

$$\therefore 4*5 = \frac{\sqrt{4+5}}{4-5} = -3,$$

$$\therefore 6*(4*5) = 6*(-3) = \frac{\sqrt{6-3}}{6+3} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

【点睛】本题主要考查了实数的运算，在解题时要先明确新的运算表示的含义是本题的关键.

9. (2021·浙江·七年级期末) 对实数 a 、 b ，定义运算 $\star$ 如下： $a \star b = \begin{cases} a^b (a>b, a \neq 0) \\ a^{-b} (a \leq b, a \neq 0) \end{cases}$,

例如 $2 \star 3 = 2^{-3} = \frac{1}{8}$. 计算 $[2 \star (-4)] \times [(-4) \star (-2)] = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 1

【详解】先判断算式 $a \star b$ 中， a 与 b 的大小，转化为对应的幂运算，再进行乘法运算.

$$[2 \star (-4)] \times [(-4) \star (-2)],$$

$$= 2^{-4} \times (-4)^2 = 16 \times \frac{1}{16} = 1. \text{ 故答案为 } 1.$$

10. (2022·浙江·七年级专题练习) 观察下列等式 (式子中的“!”是一种数学运算符号)

$$1! = 1, 2! = 2 \times 1, 3! = 3 \times 2 \times 1, 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1, \dots,$$

那么计算： $\frac{2013!}{2014!} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{2014}$

【分析】根据“!”的运算方式列式计算即可.

【详解】解： $\frac{2013!}{2014!} = \frac{2013 \times 2012 \times 2011 \times \dots \times 2 \times 1}{2014 \times 2013 \times 2012 \times \dots \times 2 \times 1} = \frac{1}{2014}.$

【点睛】本题考查了有理数的乘法，有理数的除法，理解新定义运算“!”是解题的关键.

11. (2022·浙江绍兴·七年级期末) 如 $M = \{1, 2, x\}$, 我们叫集合 M . 其中 1, 2, x 叫做集合 M 的元素, 集合中的元素具有确定性 (如 x 必然存在), 互异性 (如 $x \neq 1$, $x \neq 2$), 无序性 (即改变元素的顺序, 集合不变). 若集合 $N = \{x, 1, 2\}$, 我们说 $M = N$. 已知集合 $A = \{1, 0, a\}$, 集合 $B = \left\{\frac{1}{a}, |a|, \frac{b}{a}\right\}$, 若 $A = B$, 则 $b - a$ 的值是_____.

【答案】 -1

【分析】 根据集合的定义和集合相等的条件即可判断.

【详解】 $\because A = B$, $a \neq 0$,

$$\therefore \frac{1}{a} \neq 0, |a| \neq 0,$$

$$\therefore \frac{b}{a} = 0, \text{ 即 } b = 0,$$

$$\therefore \frac{1}{a} = 1, |a| = a \text{ 或 } \frac{1}{a} = a, |a| = 1,$$

$$\therefore a = 1 \text{ 或 } a = -1 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore b - a = 0 - 1 = -1,$$

故答案为: -1.

【点睛】 本题以集合为背景考查了代数式求值, 关键是根据集合的定义和性质求出 a 和 b 的值.

12. (2021·浙江宁波·七年级期中) 材料: 一般地, n 个相同因数 a 相乘: $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\uparrow} = a^n$ 记为 a^n . 如 $2^3 = 8$, 此时 3 叫做以 2 为底的 8 的对数, 记为 $\log_2 8$ (即 $\log_2 8 = 3$). 那么 $\log_3 9 = \underline{\hspace{2cm}}$,

$$(\log_2 16)^2 + \frac{1}{3} \log_3 81 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 3; $17\frac{1}{3}$.

【分析】 由 $3^2 = 9$ 可求出 $\log_2 9 = 3$, 由 $2^4 = 16$, $3^4 = 81$ 可分别求出 $\log_2 16 = 4$, $\log_3 81 = 4$, 继而可计算出结果.

【详解】 解: (1) 由题意可知: $3^2 = 9$,

$$\text{则 } \log_2 9 = 3,$$

(2) 由题意可知:

$$2^4 = 16, 3^4 = 81,$$

$$\text{则 } \log_2 16 = 4, \log_3 81 = 4,$$

$$\therefore (\log_2 16)^2 + \frac{1}{3} \log_3 81 = 16 + \frac{4}{3} = 17\frac{1}{3},$$

故答案为：3； $17\frac{1}{3}$ 。

【点睛】本题主要考查定义新运算，读懂题意，掌握运算方法是解题关键。

三、解答题

13. (2021·浙江·杭州市十三中教育集团(总校)七年级期中) 定义新运算：对于任意实数 a, b ，都有

$$a \times b = a + b^2, \text{ 例如 } 7 \times 4 = 7 + 4^2 = 23.$$

(1) 求 5×4 的值.

(2) 求 $7 \times (1 \times \sqrt{2})$ 的平方根.

【答案】(1) 21；(2) ± 4

【分析】(1) 根据定义新运算即可求 5×4 的值；

(2) 根据定义新运算求 $7 \times (1 \times \sqrt{2})$ 的值，再计算平方根即可得出答案.

【详解】(1) 由定义新运算得： $5 \times 4 = 5 + 4^2 = 5 + 16 = 21$ ；

(2) 由定义新运算得： $7 \times (1 \times \sqrt{2}) = 7 \times (1 + 2) = 7 \times 3 = 7 + 9 = 16$,

$$\therefore 7 \times (1 \times \sqrt{2}) \text{ 的平方根为 } \pm \sqrt{16} = \pm 4.$$

【点睛】本题考查新定义的有理数运算，掌握新定义的运算法则是解题的关键。

14. (2021·浙江·杭州市弘益中学七年级期中) 任何实数 a ，可用 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数，如 $[4]=4$ ，

$[\sqrt{3}]=1$ 。现对 72 进行如下操作：72 第一次 $[\sqrt{72}]=8$ ，第二次 $[\sqrt{8}]=2$ ，第三次 $[\sqrt{2}]=1$ ，这样对 72 只需进行 3 次操作变为 1。

(1) 对 10 进行 1 次操作后变为_____，对 200 进行 3 次作后变为_____；

(2) 对实数 m 恰进行 2 次操作后变成 1，则 m 最小可以取到_____；

(3) 若正整数 m 进行 3 次操作后变为 1，求 m 的最大值。

【答案】(1) 3；1；(2) $4 \leq m < 16$ ；(3) m 的最大值为 255

【详解】解：(1) $\because 3^2 = 9 < (\sqrt{10})^2 = 10 < 4^2 = 16$,

$$\therefore 3 < \sqrt{10} < 4,$$

$$\therefore [\sqrt{10}] = 3,$$

∴对 10 进行 1 次操作后变为 3；

同理可得 $14 < \sqrt{200} < 15$ ，

$$\therefore [\sqrt{200}] = 14,$$

同理可得 $3 < \sqrt{14} < 4$ ，

$$\therefore [\sqrt{14}] = 3,$$

同理可得 $1 < \sqrt{3} < 2$ ，

$$\therefore [\sqrt{3}] = 1,$$

∴对 200 进行 3 次作后变为 1，

故答案为：3；1；

(2) 设 m 进行第一次操作后的数为 x ，

$$\therefore [x] = 1,$$

$$\therefore 1 \leq x < 2.$$

$$\therefore 1 \leq \sqrt{m} < 4.$$

$$\therefore 1 \leq m < 16.$$

∴要经过两次操作.

$$\therefore \sqrt{m} \geq 2.$$

$$\therefore m \geq 4.$$

$$\therefore 4 \leq m < 16.$$

故答案为： $4 \leq m < 16$.

(3) 设 m 经过第一次操作后的数为 n ，经过第二次操作后的数为 x ，

$$\therefore [x] = 1,$$

$$\therefore 1 \leq x < 2.$$

$$\therefore 1 \leq \sqrt{n} < 2.$$

$$\therefore 1 \leq n < 4.$$

$$1 \leq \sqrt{m} < 16.$$

$$\therefore 1 \leq m < 256.$$

∴要经过 3 次操作，故 $m \geq 16$.

$$\therefore 16 \leq m < 256.$$

$\because m$ 是整数.

$\therefore m$ 的最大值为 255.

【点睛】本题考查取整函数及无理数的估计，正确理解取整含义是求解本题的关键.

15. (2021·浙江台州·七年级期末) 我们知道，负数没有算术平方根，但对于三个互不相等的负整数，若两两乘积的算术方根都是整数，则称这三个数为“完美组合数”.

例如：-9，-4，-1 这三个数， $\sqrt{(-9) \times (-4)} = 6$ ， $\sqrt{(-9) \times (-1)} = 3$ ， $\sqrt{(-4) \times (-1)} = 2$ ，其结果 6，3，2 都是整数，所以-1，-4，-9 这三个数称为“完美组合数”.

(1)-18，-8，-2 这三个数是“完美组合数”吗？请说明理由.

(2)若三个数-3， m ，-12 是“完美组合数”，其中有两个数乘积的算术平方根为 12，求 m 的值.

【答案】(1)是，理由见解析

(2) m 的值为-48 或-12

【分析】(1) 根据新定义进行计算，即可得到答案；

(2) 根据新定义的运算法则进行计算，即可求出答案.

(1)

解： $\because \sqrt{(-18) \times (-8)} = 12$ ， $\sqrt{(-18) \times (-2)} = 6$ ， $\sqrt{(-8) \times (-2)} = 4$ ，

$\therefore -18$ ， -8 ， -2 这三个数是“完美组合数”.

(2)

解：①当 $\sqrt{-3m} = 12$ 时，

解得： $m = -48$ ；

②当 $\sqrt{-12m} = 12$ 时，

解得： $m = -12$

综上所述， m 的值为-48 或-12.

【点睛】本题考查了新定义的运算法则，解题的关键是掌握新定义的运算法则进行计算.

16. (2021·浙江·七年级期中) 数学中有很多的可逆的推理. 如果 $10^b = n$ ，那么利用可逆推理，已知 n 可求 b 的运算，记为 $b = f(n)$ ，如 $10^2 = 100$ ，

则 $2 = f(100)$ ； $10^4 = 10000$ ，则 $4 = f(10000)$.

①根据定义，填空： $f(10) = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $f(10^3) = \underline{\hspace{2cm}}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/115030302214012014>