

新疆维吾尔自治区新疆生产建设兵团二中 2024 年数学高三上期末调研试题

考生请注意：

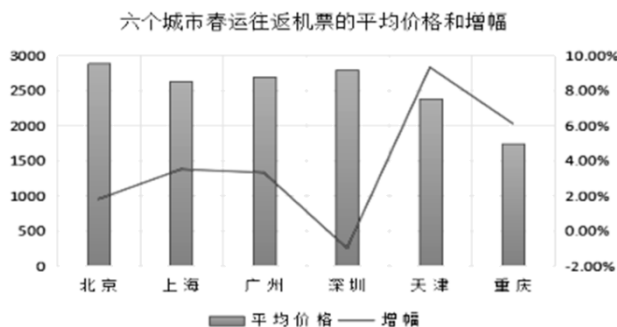
1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $M = \{x | x^2 + 3x + 2 > 0\}$ ，集合 $N = \{x | (\frac{1}{2})^x \leq 4\}$ ，则 $M \cup N =$ ()

- A. $\{x | x \geq -2\}$ B. $\{x | x > -1\}$ C. $\{x | x \leq -2\}$ D. $\mathbf{R}$

2. 下图是民航部门统计的某年春运期间，六个城市售出的往返机票的平均价格（单位元），以及相比于上一年同期价格变化幅度的数据统计图，以下叙述不正确的是 ()



- A. 深圳的变化幅度最小，北京的平均价格最高
- B. 天津的往返机票平均价格变化最大
- C. 上海和广州的往返机票平均价格基本相当
- D. 相比于上一年同期，其中四个城市的往返机票平均价格在增加

3. 设 α 为锐角，若 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$ ，则 $\sin 2\alpha$ 的值为 ()

- A. $\frac{17}{25}$ B. $-\frac{7}{25}$ C. $-\frac{17}{25}$ D. $\frac{7}{25}$

4. 某个命题与自然数 n 有关，且已证得“假设 $n = k$ ($k \in \mathbf{N}^*$) 时该命题成立，则 $n = k + 1$ 时该命题也成立”。现已知当 $n = 7$ 时，该命题不成立，那么 ()

- A. 当 $n = 8$ 时，该命题不成立 B. 当 $n = 8$ 时，该命题成立
- C. 当 $n = 6$ 时，该命题不成立 D. 当 $n = 6$ 时，该命题成立

5. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，且 $2^{f(\frac{m}{n})} \cdot 2^{f(n)} = 4^{\frac{f(m)}{2}}$ ，当 $0 < x < 1$ 时， $f(x) < 0$ 。若 $f(4) = 2$ ，则函数 $f(x)$ 在 $[1, 16]$ 上的最大值为 ()

- A. 4 B. 6 C. 3 D. 8

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (x-2)(x-e^x) + 3, & (x \geq \ln 2) \\ 3-2x, & (x < \ln 2) \end{cases}$, 当 $x \in [m, +\infty)$ 时, $f(x)$ 的取值范围为 $(-\infty, e+2]$, 则实数 m 的

取值范围是 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{1-e}{2}\right]$ B. $(-\infty, 1]$ C. $\left[\frac{1-e}{2}, 1\right]$ D. $[\ln 2, 1]$

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, F_1, F_2 为其左、右焦点, 直线 l 过右焦点 F_2 , 与双曲线 C 的右支交于 A, B 两点,

且点 A 在 x 轴上方, 若 $|AF_2| = 3|BF_2|$, 则直线 l 的斜率为 ()

- A. 1 B. -2 C. -1 D. 2

8. 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_3 = \frac{1}{5}, a_n - a_{n+1} = 2a_n a_{n+1}$, 则数列 $\{a_n a_{n+1}\}$ 前 10 项的和为

- A. $\frac{10}{21}$ B. $\frac{20}{21}$ C. $\frac{9}{19}$ D. $\frac{18}{19}$

9. 已知向量 $\vec{a} = (1, -2), \vec{b} = (3, -1)$, 则 ()

- A. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ B. $\vec{a} \perp \vec{b}$ C. $\vec{a} \parallel (\vec{a} - \vec{b})$ D. $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$

10. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 若 $a_2 = 2a_3 + 1, a_4 = 2a_3 + 7$, 则 $a_5 =$ ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 6

11. 已知复数 z 满足 $i \cdot z = 2 + i$, 则 z 的共轭复数是 ()

- A. $-1 - 2i$ B. $-1 + 2i$ C. $1 - 2i$ D. $1 + 2i$

12. 下列函数中, 在定义域上单调递增, 且值域为 $[0, +\infty)$ 的是 ()

- A. $y = |\lg(x+1)|$ B. $y = x^{\frac{1}{2}}$ C. $y = 2^x$ D. $y = \ln|x|$

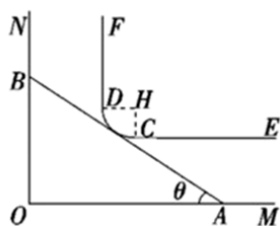
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $(ax+b)^6$ 的展开式中 x^4 项的系数与 x^5 项的系数分别为 135 与 -18, 则 $(ax+b)^6$ 展开式所有项系数之和为 _____.

14. 已知函数 $f(x) = ax + 3 + |2x^2 + (4-a)x - 1|$ 的最小值为 2, 则 $a =$ _____.

15. 如图, 某市一学校 H 位于该市火车站 O 北偏东 45° 方向, 且 $OH = 4\sqrt{2}km$, 已知 OM, ON 是经过火车站 O 的两条互相垂直的笔直公路, CE, DF 及圆弧 CD 都是学校道路, 其中 $CE \parallel OM, DF \parallel ON$, 以学校 H 为圆心, 半径为 $2km$ 的四分之一圆弧分别与 CE, DF 相切于点 C, D . 当地政府欲投资开发 $\angle AOB$ 区域发展经济, 其中 A, B

分别在公路 OM , ON 上, 且 AB 与圆弧 CD 相切, 设 $\angle OAB = \theta$, $\triangle AOB$ 的面积为 $S \text{ km}^2$.



(1) 求 S 关于 θ 的函数解析式;

(2) 当 θ 为何值时, $\triangle AOB$ 面积 S 为最小, 政府投资最低?

16. 已知复数 $z = (1-i) \cdot (a+i)$ (i 为虚数单位) 为纯虚数, 则实数 a 的值为_____.

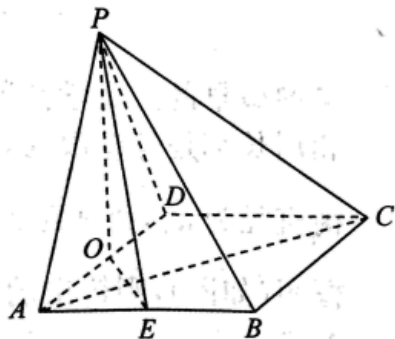
三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 以平面直角坐标系 xOy 的原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴, 且在两种坐标系中取相同的长度单位,

建立极坐标系, 已知曲线 $C_1: \rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$, 曲线 $C_2: \begin{cases} x = \cos 2\theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 求曲线 C_1 , C_2 交点的直角坐标.

18. (12 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是菱形, $PO \perp$ 底面 $ABCD$, O , E 分别是 AD , AB 的中点,

$AB = 6$, $AP = 5$, $\angle BAD = 60^\circ$.



(I) 求证: $AC \perp PE$;

(II) 求直线 PB 与平面 POE 所成角的正弦值;

(III) 在 DC 边上是否存在点 F , 使 BF 与 PA 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{3}}{10}$, 若存在, 确定点 F 的位置; 若不存在, 说明理由.

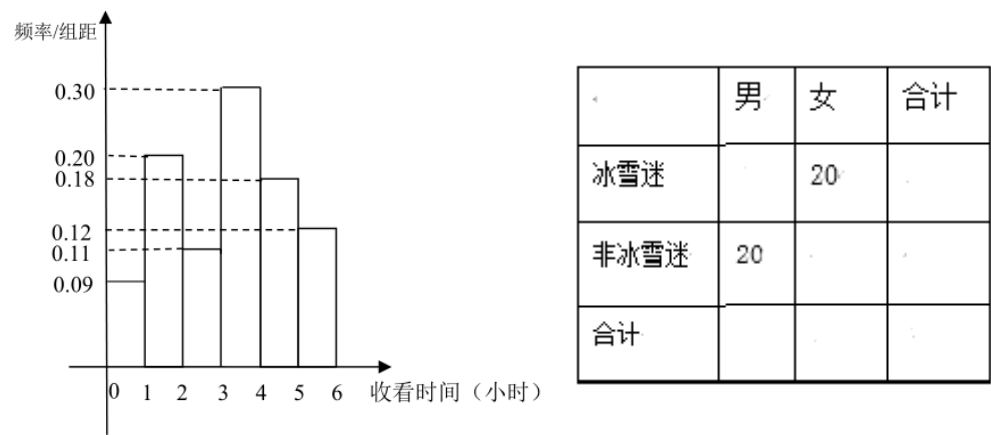
19. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t + 2, \end{cases}$ (t 为参数), 在以坐标原点 O 为极

点, x 轴的正半轴为极轴, 且与直角坐标系长度单位相同的极坐标系中, 曲线 C 的极坐标方程是

$$\rho = 4\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right).$$

- (1) 求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程；
- (2) 若直线 l 与曲线 C 相交于两点 A, B ，求线段 AB 的长.

20. (12 分) 万众瞩目的第 14 届全国冬季运动会（简称“十四冬”）于 2020 年 2 月 16 日在呼伦贝尔市盛大开幕，期间正值我市学校放寒假，寒假结束后，某校工会对全校 100 名教职工在“十四冬”期间每天收看比赛转播的时间作了一次调查，得到如图频数分布直方图：



- (1) 若将每天收看比赛转播时间不低于 3 小时的教职工定义为“冰雪迷”，否则定义为“非冰雪迷”，请根据频率分布直方图补全 2×2 列联表；并判断能否有 90% 的把握认为该校教职工是否为“冰雪迷”与“性别”有关；
- (2) 在全校“冰雪迷”中按性别分层抽样抽取 6 名，再从这 6 名“冰雪迷”中选取 2 名作冰雪运动知识讲座.记其中女职工的人数为 ξ ，求的 ξ 分布列与数学期望.

附表及公式：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad n = a + b + c + d$$

21. (12 分) 设函数 $f(x) = \left|\frac{1}{2}x + 1\right| + |x - 1|$ ($x \in \mathbf{R}$) 的最小值为 m .

- (1) 求 m 的值；
- (2) 若 a, b, c 为正实数，且 $\frac{1}{ma} + \frac{1}{2mb} + \frac{1}{3mc} = \frac{2}{3}$ ，证明： $\frac{a}{9} + \frac{2b}{9} + \frac{c}{3} \geq 1$.

22. (10 分) 设 a, b, c, d 都是正数，且 $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ ， $y = \sqrt{c^2 + d^2}$. 求证： $xy \geq \sqrt{(ac + bd)(ad + bc)}$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

试题分析：由题 $M = \{x | x^2 + 3x + 2 > 0\} = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > -1\}$ ，

$$N = \left\{x \mid \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4\right\} = \left\{x \mid \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right\} = N = \{x | x \geq -2\}, \therefore M \cup N = R, \text{ 选 D}$$

考点：集合的运算

2、D

【解析】

根据条形图可折线图所包含的数据对选项逐一分析，由此得出叙述不正确的选项。

【详解】

对于 A 选项，根据折线图可知深圳的变化幅度最小，根据条形图可知北京的平均价格最高，所以 A 选项叙述正确。

对于 B 选项，根据折线图可知天津的往返机票平均价格变化最大，所以 B 选项叙述正确。

对于 C 选项，根据条形图可知上海和广州的往返机票平均价格基本相当，所以 C 选项叙述正确。

对于 D 选项，根据折线图可知相比于上一年同期，除了深圳外，另外五个城市的往返机票平均价格在增加，故 D 选项叙述错误。

故选：D

【点睛】

本小题主要考查根据条形图和折线图进行数据分析，属于基础题。

3、D

【解析】

用诱导公式和二倍角公式计算。

【详解】

$$\sin 2\alpha = -\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -[2\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - 1] = -[2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1] = \frac{7}{25}.$$

故选：D.

【点睛】

本题考查诱导公式、余弦的二倍角公式，解题关键是找出已知角和未知角之间的联系。

4、C

【解析】

写出命题“假设 $n = k (k \in N^*)$ 时该命题成立，则 $n = k + 1$ 时该命题也成立”的逆否命题，结合原命题与逆否命题的真假性一致进行判断。

【详解】

由逆否命题可知，命题“假设 $n = k (k \in N^*)$ 时该命题成立，则 $n = k + 1$ 时该命题也成立”的逆否命题为“假设当 $n = k + 1 (k \in N^*)$ 时该命题不成立，则当 $n = k$ 时该命题也不成立”，

由于当 $n = 7$ 时，该命题不成立，则当 $n = 6$ 时，该命题也不成立，故选：C。

【点睛】

本题考查逆否命题与原命题等价性的应用，解题时要写出原命题的逆否命题，结合逆否命题的等价性进行判断，考查逻辑推理能力，属于中等题。

5、A

【解析】

根据所给函数解析式满足的等量关系及指数幂运算，可得 $f\left(\frac{m}{n}\right) + f(n) = f(m)$ ；利用定义可证明函数 $f(x)$ 的单调性，由赋值法即可求得函数 $f(x)$ 在 $[1, 16]$ 上的最大值。

【详解】

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，且 $2^{f\left(\frac{m}{n}\right)} \cdot 2^{f(n)} = 4^{\frac{f(m)}{2}}$ ，

则 $f\left(\frac{m}{n}\right) + f(n) = f(m)$ ；

任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，则 $0 < \frac{x_1}{x_2} < 1$ ，

故 $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) < 0$ ，

令 $m = x_1$ ， $n = x_2$ ，则 $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + f(x_2) = f(x_1)$ ，

$$\text{即 } f(x_1) - f(x_2) = f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) < 0,$$

故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{故 } f(x)_{\max} = f(16),$$

$$\text{令 } m = 16, \quad n = 4,$$

$$\text{故 } f(4) + f(4) = f(16) = 4,$$

故函数 $f(x)$ 在 $[1, 16]$ 上的最大值为 4.

故选: A.

【点睛】

本题考查了指数幂的运算及化简, 利用定义证明抽象函数的单调性, 赋值法在抽象函数求值中的应用, 属于中档题.

6、C

【解析】

求导分析函数在 $x \geq \ln 2$ 时的单调性、极值, 可得 $x \geq \ln 2$ 时, $f(x)$ 满足题意, 再在 $x < \ln 2$ 时, 求解 $f(x) \leq e + 2$ 的 x 的范围, 综合可得结果.

【详解】

$$\text{当 } x \geq \ln 2 \text{ 时, } f'(x) = -(x-1)(e^x - 2),$$

$$\text{令 } f'(x) > 0, \text{ 则 } \ln 2 < x < 1; \quad f'(x) < 0, \text{ 则 } x > 1,$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(\ln 2, 1)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减.

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 在 } x = 1 \text{ 处取得极大值为 } f(1) = e + 2,$$

$$\therefore x \geq \ln 2 \text{ 时, } f(x) \text{ 的取值范围为 } (-\infty, e + 2],$$

$$\therefore \ln 2 \leq m \leq 1$$

$$\text{又当 } x < \ln 2 \text{ 时, 令 } f(x) = 3 - 2x \leq e + 2, \text{ 则 } x \geq \frac{1-e}{2}, \text{ 即 } \frac{1-e}{2} \leq x < \ln 2,$$

$$\therefore \frac{1-e}{2} \leq m < \ln 2$$

$$\text{综上所述, } m \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{1-e}{2}, 1 \right].$$

故选 C.

【点睛】

本题考查了利用导数分析函数值域的方法，考查了分段函数的性质，属于难题.

7、D

【解析】

由 $|AF_2|=3|BF_2|$ ，可得 $\overrightarrow{AF_2}=3\overrightarrow{F_2B}$. 设直线 l 的方程 $x=my+\sqrt{5}$ ， $m>0$ ，设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，即 $y_1=-3y_2$ ①，

联立直线 l 与曲线 C ，得 $y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{5}m}{m^2-4}$ ②， $y_1y_2=\frac{1}{m^2-4}$ ③，求出 m 的值即可求出直线的斜率.

【详解】

双曲线 $C: \frac{x^2}{4}-y^2=1$ ， F_1, F_2 为左、右焦点，则 $F_2(\sqrt{5}, 0)$ ，设直线 l 的方程 $x=my+\sqrt{5}$ ， $m>0$ ， $\therefore$ 双曲线的渐

近线方程为 $x=\pm 2y$ ， $\therefore m \neq \pm 2$ ，

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，且 $y_1>0$ ，由 $|AF_2|=3|BF_2|$ ， $\therefore \overrightarrow{AF_2}=3\overrightarrow{F_2B}$ ， $\therefore y_1=-3y_2$ ①

由 $\begin{cases} x=my+\sqrt{5} \\ x^2-4y^2-4=0 \end{cases}$ ，得 $(m^2-4)y^2+2\sqrt{5}my+1=0$

$\therefore \Delta=(2\sqrt{5}m)^2-4(m^2-4)>0$ ，即 $m^2+4>0$ 恒成立，

$\therefore y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{5}m}{m^2-4}$ ②， $y_1y_2=\frac{1}{m^2-4}$ ③，

联立①②得 $-2y_2=-\frac{2\sqrt{5}m}{m^2-4}>0$ ，联立①③得 $-3y_2^2=\frac{1}{m^2-4}<0$ ，

$\therefore y_2=\frac{\sqrt{5}m}{m^2-4}$ ， $y_2^2=\frac{1}{12-3m^2}$ 即： $\frac{1}{12-3m^2}=\left(\frac{\sqrt{5}m}{m^2-4}\right)^2$ ， $m>0$ ，解得： $m=\frac{1}{2}$ ，直线 l 的斜率为2，

故选D.

【点睛】

本题考查直线与双曲线的位置关系，考查韦达定理的运用，考查向量知识，属于中档题.

8、A

【解析】

分析：通过对 $a_n - a_{n+1} = 2a_n a_{n+1}$ 变形可知 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2$ ，进而可知 $a_n = \frac{1}{2n-1}$ ，利用裂项相消法求和即可.

详解： $\because a_n - a_{n+1} = 2a_n a_{n+1}$ ， $\therefore \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2$ ，

$$\text{又} \because \frac{1}{a_3} = 5,$$

$$\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_3} + 2(n-3) = 2n-1, \text{ 即 } a_n = \frac{1}{2n-1},$$

$$\therefore a_n a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\therefore \text{数列} \{a_n a_{n+1}\} \text{ 前10项的和为 } \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{10}{21},$$

故选 A.

点睛：裂项相消法是最难把握的求和方法之一，其原因是有时很难找到裂项的方向，突破这一难点的方法是根据式子

$$\text{的结构特点，常见的裂项技巧：(1) } \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right); \text{ (2) } \frac{1}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = \frac{1}{k} (\sqrt{n+k} - \sqrt{n}); \text{ (3)}$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right); \text{ (4) } \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]; \text{ 此外，需注意裂项}$$

之后相消的过程中容易出现丢项或多项的问题，导致计算结果错误.

9、D

【解析】

由题意利用两个向量坐标形式的运算法则，两个向量平行、垂直的性质，得出结论.

【详解】

$\therefore$ 向量 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (3, -1)$, $\therefore \vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的坐标对应不成比例，故 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 不平行，故排除 A;

显然， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + 2 \neq 0$ ，故 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 不垂直，故排除 B;

$\therefore \vec{a} - \vec{b} = (-2, -1)$ ，显然， $\vec{a}$ 和 $\vec{a} - \vec{b}$ 的坐标对应不成比例，故 $\vec{a}$ 和 $\vec{a} - \vec{b}$ 不平行，故排除 C;

$\therefore \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -2 + 2 = 0$ ，故 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$ ，故 D 正确，

故选：D.

【点睛】

本题主要考查两个向量坐标形式的运算，两个向量平行、垂直的性质，属于基础题.

10、B

【解析】

利用等差数列的通项公式列出方程组，求出首项和公差，由此能求出 a_5 .

【详解】

$\because \{a_n\}$ 为等差数列, $a_2 = 2a_3 + 1, a_4 = 2a_3 + 7,$

$$\therefore \begin{cases} a_1 + d = 2(a_1 + 2d) + 1 \\ a_1 + 3d = 2(a_1 + 2d) + 7 \end{cases},$$

解得 $a_1 = -10, d = 3,$

$$\therefore a_5 = a_1 + 4d = -10 + 12 = 2.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查等差数列通项公式求法, 考查等差数列的性质等基础知识, 考查运算求解能力, 是基础题.

11、 D

【解析】

两边同乘 $-i$, 化简即可得出答案.

【详解】

$i \cdot z = 2 + i$ 两边同乘 $-i$ 得 $z = 1 - 2i$, 共轭复数为 $1 + 2i$, 选 D.

【点睛】

$z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ 的共轭复数为 $\bar{z} = a - bi$

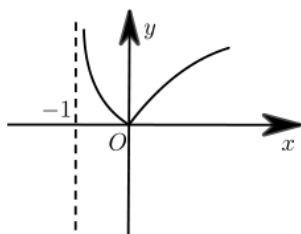
12、 B

【解析】

分别作出各个选项中的函数的图象, 根据图象观察可得结果.

【详解】

对于 A, $y = |\lg(x+1)|$ 图象如下图所示:



则函数 $y = |\lg(x+1)|$ 在定义域上不单调, A 错误;

对于 B, $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ 的图象如下图所示:

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/115214000012011131>