

任意角三角函数

三、经典例题导讲

[例 1] 假设 A 、 B 、 C 是 $\triangle ABC$ 的三个角，且 $A < B < C (C \neq \frac{\pi}{2})$ ，那么以下结论中正确的个数是 []

①. $\sin A < \sin C$ ②. $\cot A < \cot C$ ③. $\tan A < \tan C$ ④. $\cos A < \cos C$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

错解： $\because A < C \therefore \sin A < \sin C, \tan A < \tan C$ 应选 B

错因：三角形角对大边定理不熟悉，对函数单调性理解不到位导致应用错误

正解：法 1 $\because A < C$ 在 $\triangle ABC$ 中，在大角对大边， $\therefore c > a, \therefore \sin C > \sin A$

法 2 考虑特殊情形， A 为锐角， C 为钝角，故排除 B、C、D，所以选 A.

[例 2] α, β 角的终边关于 y 轴对称，那么 α 与 β 的关系为.

错解： $\because \alpha, \beta$ 角的终边关于 y 轴对称， $\therefore \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, [k \in \mathbb{Z})$

错因：把关于 y 轴对称片认为关于 y 轴的正半轴对称.

正解： $\because \alpha, \beta$ 角的终边关于 y 轴对称

$\therefore \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ 即 $\alpha + \beta = \pi + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

说明：[1] 假设 α, β 角的终边关于 x 轴对称，那么 α 与 β 的关系为 $\alpha + \beta = 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

[2] 假设 α, β 角的终边关于原点轴对称，那么 α 与 β 的关系为
 $\alpha = \beta + (2k + 1)\pi, (k \in \mathbb{Z})$

[3] 假设 α, β 角的终边在同一条直线上，那么 α 与 β 的关系为 $\beta = \alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

[例 3] $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}, \cos \frac{\theta}{2} = -\frac{4}{5}$ ，试确定 θ 的象限.

错解： $\because \sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5} > 0, \cos \frac{\theta}{2} = -\frac{4}{5} < 0, \therefore \frac{\theta}{2}$ 是第二象限角，即

$2k\pi < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}.$

从而 $4k\pi < \theta < 4k\pi + 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

故 θ 是第三象限角或第四象限角或是终边在 y 轴负半轴上的角.

错因：导出 $\frac{\theta}{2}$ 是第二象限角是正确的，由 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5} > 0, \cos \frac{\theta}{2} = -\frac{4}{5} < 0$ 即可确定，

而题中 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}, \cos \frac{\theta}{2} = -\frac{4}{5}$ 不仅给出了符号, 而且给出了具体的函数值, 通过其值可进一步确定 $\frac{\theta}{2}$ 的大小, 即可进一步缩小 $\frac{\theta}{2}$ 所在区间.

正解: $\because \sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5} > 0, \cos \frac{\theta}{2} = -\frac{4}{5} < 0, \therefore \frac{\theta}{2}$ 是第二象限角,

又由 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{3\pi}{4}$ 知 $2k\pi + \frac{3\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$

$4k\pi + \frac{3\pi}{2} < \theta < 4k\pi + 2\pi, k \in \mathbb{Z}$, 故 θ 是第四象限角.

[例 4] 角 α 的终边经过 $P(-4a, 3a)(a \neq 0)$, 求 $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ 的值.

错解: $\because x = -4a, y = 3a, \therefore r = \sqrt{x^2 + y^2} = 5a$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{-4a}{5a} = -\frac{4}{5}, \tan \alpha = \frac{3a}{-4a} = -\frac{3}{4}, \cot \alpha = \frac{-4a}{3a} = -\frac{4}{3}$$

错因: 在求得 r 的过程中误认为 $a > 0$

正解: 假设 $a > 0$, 那么 $r = 5a$, 且角 α 在第二象限

$$\therefore \sin \alpha = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{-4a}{5a} = -\frac{4}{5}, \tan \alpha = \frac{3a}{-4a} = -\frac{3}{4}, \cot \alpha = \frac{-4a}{3a} = -\frac{4}{3}$$

假设 $a < 0$, 那么 $r = -5a$, 且角 α 在第四象限

$$\therefore \sin \alpha = \frac{3a}{-5a} = -\frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{-4a}{-5a} = \frac{4}{5}, \tan \alpha = \frac{3a}{-4a} = -\frac{3}{4}, \cot \alpha = \frac{-4a}{3a} = -\frac{4}{3}$$

说明: [1] 给出角的终边上一点的坐标, 求角的某个三解函数值常用定义求解;

[2] 此题由于所给字母 a 的符号不确定, 故要对 a 的正负进展讨论.

[例 5] [1] α 为第三象限角, 那么 $\frac{\alpha}{2}$ 是第象限角, 2α 是第象限角;

[2] 假设 $\alpha = -4$, 那么 α 是第象限角.

解: [1] $\because \alpha$ 是第三象限角, 即 $2k\pi + \pi < \alpha < 2k\pi + \frac{3}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\therefore k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \frac{3}{4}\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad 4k\pi + 2\pi < 2\alpha < 4k\pi + 3\pi, k \in \mathbb{Z}$$

当 k 为偶数时, $\frac{\alpha}{2}$ 为第二象限角

当 k 为奇数时, $\frac{\alpha}{2}$ 为第四象限角

而 2α 的终边落在第一、二象限或 y 轴的非负半轴上.

[2] 因为 $-\frac{3\pi}{2} < -4 < -\pi$, 所以 α 为第二象限角.

点评: α 为第一、二象限角时, $\frac{\alpha}{2}$ 为第一、三象限角, α 为第三、四象限角时, $\frac{\alpha}{2}$ 为第二、四象限角, 但是它们在以象限角平分线为界的不同区域.

[例 6] 一扇形的周长为 20cm , 当扇形的圆心角 α 等于多少时, 这个扇形的面积最大? 最大面积是多少?

解: 设扇形的半径为 $r\text{cm}$, 那么扇形的弧长 $l = (20 - 2r)\text{cm}$

$$\text{扇形的面积 } S = \frac{1}{2}(20 - 2r) \cdot r = -(r - 5)^2 + 25$$

所以当 $r = 5\text{cm}$ 时, 即 $l = 10\text{cm}$, $\alpha = \frac{l}{r} = 2$ 时 $S_{\max} = 25\text{cm}^2$.

点评: 涉及到最大〔小〕值问题时, 通常先建立函数关系, 再应用函数求最值的方法确定最值的条件及相应的最值.

[例 7] α 是第三象限角, 化简 $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$.

$$\text{解: 原式} = \sqrt{\frac{(1 + \sin \alpha)^2}{1 - \sin^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{(1 - \sin \alpha)^2}{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{1 + \sin \alpha - 1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|} = \frac{2 \sin \alpha}{|\cos \alpha|}$$

又 α 是第三象限角, $\therefore \cos \alpha < 0$

$$\text{所以, 原式} = -\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = -2 \tan \alpha.$$

点评: 三角函数化简一般要: [1] 尽可能不含分母; [2] 尽可能不含根式; [3] 尽可能使三角函数名称最少; [4] 尽可能求出三角函数式的值. 此题的关键是如何应用根本关系式脱去根式, 进展化简.

[例 8] 假设角 α 满足条件 $\sin 2\alpha < 0, \cos \alpha - \sin \alpha < 0$, 那么 α 在第 [] 象限

A. 一

B. 二

C. 三

D. 四

$$\text{解: } \begin{cases} \sin 2\alpha < 0 \\ \cos \alpha - \sin \alpha < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha \cos \alpha < 0 \\ \cos \alpha < \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \text{ 角在第二象限, 应选 B.}$$

[例 9] $|\cos \theta| = -\cos \theta$, 且 $\tan \theta < 0$.

[1] 试判断 $\frac{\sin(\cos \theta)}{\cos(\sin \theta)}$ 的符号;

[2] 试判断 $\lg(\sin \theta - \cos \theta)$ 的符号.

解: [1] 由题意, $-1 < \cos \theta < 0, 1 > \sin \theta > 0$

$$\therefore \sin(\cos \theta) < 0, \cos(\sin \theta) > 0, \text{ 所以 } \frac{\sin(\cos \theta)}{\cos(\sin \theta)} < 0.$$

[2] 由题意知 θ 为第二象限角, $\sin \theta - \cos \theta > 1$, 所以 $\lg(\sin \theta - \cos \theta) > 0$.

四、典型习题导练

1. 钝角 α 的终边经过点 $P(\sin 2\theta, \sin 4\theta)$ ，且 $\cos \theta = 0.5$ ，那么 α 的值为 []

- A. $\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)$ B. $\arctan(-1)$ C. $\pi - \arctan \frac{1}{2}$ D. $\frac{3\pi}{4}$

2. 角 α 的终边与角 β 的终边关于y轴对称，那么 β 为 []

- A. $-\alpha$ B. $\pi - \alpha$ C. $[2k\pi + 1] \pi - \alpha (k \in \mathbb{Z})$ D. $k\pi - \alpha (k \in \mathbb{Z})$

3. 假设 $\sin \alpha \tan \alpha \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ ，那么角 α 的集合为 []

- A. $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ B. $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$
C. $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}) \cup \{2k\pi - \pi\}$ D. 以上都不对

4. 当 $0 < x < \pi$ 时,那么方程 $\cos(\pi \cos x) = 0$ 的解集为()

- A. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ B. $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$ C. $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$ D. $\left\{\frac{2\pi}{3}\right\}$

5. 以下四个值: $\sin 3, \cos 3, \tan 3, \cot 3$ 的大小关系是()

- A. $\cos 3 < \tan 3 < \cot 3 < \sin 3$ B. $\sin 3 > \cos 3 > \tan 3 > \cot 3$
C. $\cot 3 < \tan 3 < \cos 3 < \sin 3$ D. $\sin 3 > \tan 3 > \cos 3 > \cot 3$

6. $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,那么下面四式: 中正确命题的序号是.

- ① $\sin x < x < \tan x$ ② $\sin(\cos x) < \cos x < \cos(\sin x)$
③ $\sin 3x + \cos 3x < 1$ ④ $\cos(\sin x) < \sin(\cos x) < \cos x$

7. 有以下四组角: (1) $k\pi + \frac{\pi}{2}$; (2) $k\pi - \frac{\pi}{2}$; (3) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$; (4) $-k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 其中终边一样的是 []

- A. (1)和(2) B. (1)、(2)和(3)
C. (1)、(2)和(4) D. (1)、(2)、(3)和(4)

8. 假设角 α 的终边过点 $(\sin 30^\circ, -\cos 30^\circ)$,那么 $\sin \alpha$ 等于 []

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$



角 \ 函数	正弦	余弦	记忆口诀
$2k\pi + \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	函数名不变 符号看象限
$\pi + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	
$\pi - \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	
$2\pi - \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	

$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	函数名不变 符号看象限
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	

诱导公式可将“负角正化，大角小化，钝角锐化”。

3. 诱导公式解决常见题型

- 〔1〕求值：一个角的某个三角函数，求这个角其他三角函数；
- 〔2〕化简：要能求值那么求值，次数、种类尽量少，尽量化去根式，尽可能不含分母

二、疑难知识导析

1. 三角变换的常见技巧

“1”的代换； $\sin\alpha + \cos\alpha$ ， $\sin\alpha - \cos\alpha$ ， $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ 三个式子，据方程思想知一可求其二〔因为其间隐含着平方关系式 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 〕；

- 2. 在进展三角函数化简和三角等式证明时，细心观察题目的特征，灵活恰当地选用公式，一般思路是将切割化弦.尽量化同名，同次，同角；
- 3. 角 α 的某个三角函数值，求角 α 的其余 5 种三角函数值时，要注意公式的合理选择在利用同角公式中的平方关系并要开方时，要根据角的围来确定符号，常要对角的围进展讨论. 解决此类问题时，要细心求证角的围.

三、典型例题导讲

[例 1] $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{5}$ ， $\theta \in (0, \pi)$ ，则 $\cot\theta =$ _____

错解：两边同时平方，由 $\sin\theta \cdot \cos\theta = -\frac{12}{25}$ 与 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{5}$ ，得

$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta \cdot \cos\theta + \cos^2\theta - 4\sin\theta \cos\theta$
 $= (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 4\sin\theta \cos\theta$
 $= \frac{49}{25} \quad \therefore \sin\theta - \cos\theta = \pm \frac{7}{5}$

$\therefore \sin\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta = -\frac{3}{5}$ ，进而可求 $\cot\theta$. 解得： $\cot\theta = -\frac{3}{4}$
或 $\sin\theta = -\frac{3}{5}, \cos\theta = \frac{4}{5}$ ，进而可求 $\cot\theta$. 解得： $\cot\theta = -\frac{4}{3}$

错因：没有注意到条件 $\theta \in (0, \pi)$ 时，由于 $\sin\theta \cdot \cos\theta < 0$

所以 $\sin\theta - \cos\theta$ 的值为正而导致错误.

正解： $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{5}$ ， $\theta \in (0, \pi)$ ，



两边同时平方, 有 $\sin \theta \cdot \cos \theta = -\frac{12}{25} < 0$ 与 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$ 联立,

$$\text{求出 } \sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = -\frac{3}{5}, \therefore \cot \theta = -\frac{3}{4}$$

[例 2] 假设 $\sin A = a \sin B, \cos A = b \cos B, A, B$ 为锐角且 $a > 1, 0 < b < 1$, 求 $\tan A$ 的值

错解: 由 $\begin{cases} \sin A = a \sin B & \text{①} \\ \cos A = b \cos B & \text{②} \end{cases}$ 得 $\tan A = \frac{a}{b} \tan B$

错因: 对题目最终要求理解错误. 不清楚最后结论用什么代数式表示

正解: 由 $\begin{cases} \sin A = a \sin B & \text{①} \\ \cos A = b \cos B & \text{②} \end{cases}$ ①²+②² 得 $a^2 \sin^2 B + b^2 \cos^2 B = 1$

$$\therefore \cos^2 B = \frac{a^2 - 1}{a^2 - b^2} \therefore \sin^2 B = \frac{1 - b^2}{a^2 - b^2} \therefore \tan^2 B = \frac{1 - b^2}{a^2 - 1}$$

$$\because B \text{ 为锐角 } \therefore \tan B = \sqrt{\frac{1 - b^2}{a^2 - 1}}$$

$$\frac{\text{①}}{\text{②}} \text{ 得 } \tan A = \frac{a}{b} \tan B = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{1 - b^2}{a^2 - 1}}$$

[例 3] [05 年高考卷] 假设函数 $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{4 \sin(\frac{\pi}{2} + x)} - a \sin \frac{x}{2} \cos(\pi - \frac{x}{2})$ 的最大值为 2, 试

确定常数 a 的值.

$$\begin{aligned} \text{解: } f(x) &= \frac{2 \cos^2 x}{4 \cos x} + a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cos x + \frac{a}{2} \sin x \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}} \sin(x + \varphi), \text{ 其中角 } \varphi \text{ 满足 } \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \end{aligned}$$

由已知有 $\frac{1}{4} + \frac{a^2}{4} = 4$.

解之得, $a = \pm \sqrt{15}$.

点评: 本试题将三角函数 “ $\frac{\pi}{2} + \alpha, \pi - \alpha$ ” 诱导公式有机地溶于式子中, 考察了学生对根底知识的掌握程度, 这就要求同学们在学习要脚踏实地, 狠抓根底.

[例 4] [05 年高考卷] $\tan \frac{\alpha}{2} = 2$, 求

[1] $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$ 的值; [2] $\frac{6 \sin \alpha + \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}$ 的值.

解：〔1〕 $\because \tan \frac{\alpha}{2} = 2, \therefore \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \times 2}{1 - 4} = -\frac{4}{3};$

所以 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = \frac{-\frac{4}{3} + 1}{1 + \frac{4}{3}} = -\frac{1}{7};$

〔2〕 由(I), $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$, 所以 $\frac{6 \sin \alpha + \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha} = \frac{6 \tan \alpha + 1}{3 \tan \alpha - 2} = \frac{6(-\frac{4}{3}) + 1}{3(-\frac{4}{3}) - 2} = \frac{7}{6}.$

点评：此题设计简洁明了，入手容易，但对两角和与差的三角函数、同角间的根本关系式要求熟练应用，运算准确。

[例 5] 化简： $\sin(\frac{4n-1}{4}\pi - \alpha) + \cos(\frac{4n+1}{4}\pi - \alpha) \quad (n \in \mathbb{Z})$

错解：原式 $= \sin[n\pi - (\frac{\pi}{4} + \alpha)] + \cos[n\pi + (\frac{\pi}{4} - \alpha)]$
 $= \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) - \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \sin[\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} - \alpha)] - \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)$
 $= \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) - \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = 0$

错因：对三角函数诱导公式不完全理解，不加讨论而导致错误

正解：原式 $= \sin[n\pi - (\frac{\pi}{4} + \alpha)] + \cos[n\pi + (\frac{\pi}{4} - \alpha)]$

〔1〕 当 $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{Z})$, 时

原式 $= \sin[2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{4} + \alpha)] + \cos[2k\pi + \pi + (\frac{\pi}{4} - \alpha)]$
 $= \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) - \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) - \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = 0$

〔2〕 当 $n = 2k (k \in \mathbb{Z})$, 时

原式 $= \sin[2k\pi - (\frac{\pi}{4} + \alpha)] + \cos[2k\pi + (\frac{\pi}{4} - \alpha)]$
 $= -\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) + \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = 0$

[例 6] 〔05 年高考卷〕 假设 $\sin(\frac{\pi}{6} - \alpha) = \frac{1}{3}$, 那么 $\cos(\frac{2\pi}{3} + 2\alpha) = [\quad]$

A. $-\frac{7}{9}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{7}{9}$

错解： $\cos(\frac{2\pi}{3} + 2\alpha) = \cos[\pi - (\frac{\pi}{3} - 2\alpha)] = \cos(\frac{\pi}{3} - 2\alpha) = 1 - 2 \sin^2(\frac{\pi}{6} - \alpha) = \frac{7}{9}$

错因：诱导公式应用符号错.

正解： $\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\alpha\right) = \cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right)\right]$

$= -\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) = -1 + 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = -\frac{7}{9}$. 应选 A.

[例 7]. [05 年高考卷] $-\frac{\pi}{2} < x < 0, \sin x + \cos x = \frac{1}{5}$.

[1] 求 $\sin x - \cos x$ 的值;

[2] 求 $\frac{3\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\tan x + \cot x}$ 的值.

解法一： [1] 由 $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$, 平方得 $\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{25}$,

即 $2\sin x \cos x = -\frac{24}{25}$. $\therefore (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x = \frac{49}{25}$.

又 $\because -\frac{\pi}{2} < x < 0, \therefore \sin x < 0, \cos x > 0, \sin x - \cos x < 0$, 故 $\sin x - \cos x = -\frac{7}{5}$.

[2] $\frac{3\sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\tan x + \cot x} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2} - \sin x + 1}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}}$

$= \sin x \cos x (2 - \cos x - \sin x)$

$= \left(-\frac{12}{25}\right) \times \left(2 - \frac{1}{5}\right) = -\frac{108}{125}$

解法二： [1] 联立方程 $\begin{cases} \sin x + \cos x = \frac{1}{5}, & \text{①} \\ \sin^2 + \cos^2 x = 1. & \text{②} \end{cases}$

由①得 $\sin x = \frac{1}{5} - \cos x$, 将其代入②, 整理得 $25\cos^2 x - 5\cos x - 12 = 0$,

$\therefore \cos x = -\frac{3}{5}$ 或 $\cos x = \frac{4}{5}$. $\because -\frac{\pi}{2} < x < 0, \therefore \begin{cases} \sin x = -\frac{3}{5}, \\ \cos x = \frac{4}{5}. \end{cases}$ 故 $\sin x - \cos x = -\frac{7}{5}$.

[2] $\frac{3\sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\tan x + \cot x}$

$= \frac{2\sin^2 \frac{x}{2} - \sin x + 1}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}}$

$$\begin{aligned}
 &= \sin x \cos x (2 - \cos x - \sin x) \\
 &= \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{4}{5} \times \left(2 - \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right) = -\frac{108}{125}
 \end{aligned}$$

点评：本小题主要考察三角函数的根本公式、三角恒等变换、三角函数在各象限符号等根本知识，以及推理和运算能力.

[例 8] (1) 化简： $\frac{\sin 2\alpha}{\sec 2\alpha - 1} + \frac{\cos^2 \alpha}{\csc^2 \alpha - 1} + \cos 2\alpha \csc 2\alpha$

(2) 设 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{4}$, 且 $\sin 2\alpha > 0$

求 $\sin \alpha, \tan \alpha$

解： 原式 $= \frac{\sin 2\alpha}{\tan 2\alpha} + \frac{\cos 2\alpha}{\cot 2\alpha} + \cos 2\alpha \csc 2\alpha$

$$= \cos 2\alpha + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \csc 2\alpha$$

$$= 1 + \cot 2\alpha$$

$$= \csc 2\alpha$$



(2) 解： 由 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{4} \therefore \cos \alpha = -\frac{1}{4} \therefore \sin 2\alpha > 0 \therefore 2k\pi < 2\alpha < 2k\pi + \pi$

$k\pi < \alpha < k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \therefore \alpha$ 为第一象限或第二象限的角

$\therefore \cos \alpha = -\frac{1}{4} < 0 \therefore \alpha$ 为第三象限角

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{\sqrt{15}}{4} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\sqrt{15}$$

点评：此题要求同学们熟练掌握同角三角函数之间的关系，在求值过程中特别注意三角函数值的符号的探讨.

[例 9] 求函数的定义域.

解: 由题意有

$$\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{7\sqrt{2}}{10}, \cos 2\alpha = \frac{7}{25}, \text{求 } \sin \alpha \text{ 及 } \tan(\alpha + \frac{\pi}{3}).$$

解法一: 由题设条件, 应用两角差的正弦公式得

$$\frac{7\sqrt{2}}{10} = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha - \cos \alpha)$$

$$\text{即 } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{7}{5} \quad ①$$

由题设条件, 应用二倍角余弦公式得

$$\frac{7}{25} = \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) = -\frac{7}{5}(\cos \alpha - \sin \alpha) \quad \text{故}$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = -\frac{1}{5} \quad ②$$

由①式和②式得 $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = -\frac{4}{5}$. 因此, $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$, 由两角和的正切公式

$$\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \alpha} = \frac{\sqrt{3} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}} = \frac{4\sqrt{3} - 3}{4 + 3\sqrt{3}} = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}.$$

解法二: 由题设条件, 应用二倍角余弦公式得

$$\frac{7}{25} = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \text{ 解得 } \sin^2 \alpha = \frac{9}{25}, \text{即 } \sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$$

$$\text{由 } \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{7\sqrt{2}}{10}, \text{可得 } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{7}{5}$$

$$\text{由于 } \sin \alpha = \frac{7}{5} + \cos \alpha > 0, \text{且 } \cos \alpha = \sin \alpha - \frac{7}{5} < 0,$$

$$\text{故 } \alpha \text{ 在第二象限, 于是 } \sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

$$\text{从而 } \cos \alpha = \sin \alpha - \frac{7}{5} = -\frac{4}{5} \quad [\text{下同解法一}].$$

点评: $\sin \alpha + \cos \alpha$, $\sin \alpha - \cos \alpha$, $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ 三个式子, 据方程思想知一可求其二〔因

为其间隐含着平方关系式 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 〕, 在求值过程中要注意符号的讨论.

四、典型习题导练

1. 当 $0 < x < \pi$ 时, 那么方程 $\cos(\lambda \cos x) = 0$ 的解集为()

$$\text{A. } \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\} \quad \text{B. } \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\} \quad \text{C. } \left\{ \frac{\pi}{3} \right\} \quad \text{D. } \left\{ \frac{2\pi}{3} \right\}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/116013043123011004>