

焦作市宇华实验学校普通班期末拔高卷 02

学校：_____ 姓名：_____ 班级：_____ 考号：_____

一、选择题

1. 直线 $x - 2020 = 0$ 的倾斜角为

- A. 0 B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. 不存在

【答案】C

【解析】

【分析】

垂直于 y 轴的直线倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$.

【详解】 $x - 2020 = 0$ 表示一条垂直于 y 轴的直线，故倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$.

故选：C

【点睛】本题考查直线的倾斜角，属于基础题.

2. 直线 $l_1: ax - 2y + 3 = 0$ 与直线 $l_2: x + (a - 1)y - 2 = 0$ 互相垂直，则 $a =$ ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. -1

【答案】C

【解析】

【分析】根据两条直线垂直的条件求解即可.

【详解】因为直线 l_1 与直线 l_2 互相垂直，

所以 $a \times 1 - 2(a - 1) = 0$ ，解得 $a = 2$.

故选：C.

3. 当圆 $C: x^2 + y^2 + 6y - 3 = 0$ 的圆心到直线 $l: mx + y + m - 1 = 0$ 的距离最大时， $m =$ ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. 4 C. $-\frac{1}{4}$ D. -4

【答案】C

【解析】

【分析】求出直线所过定点 $A(-1, 1)$ ，根据 CA 与直线 l 垂直时，圆心到直线的距离最大， $k_{AC} \cdot k_l = -1$ ，求解即可.

【详解】因为圆 $C: x^2 + y^2 + 6y - 3 = 0$ 的圆心为 $C(0, -3)$, 半径 $r = 2\sqrt{3}$,

又直线 $l: mx + y + m - 1 = 0$, 化为 $l: m(x+1) + y - 1 = 0$,

则直线 l 过定点 $A(-1, 1)$,

故当 CA 与直线 l 垂直时, 圆心到直线的距离最大,

此时有 $k_{AC} \cdot k_l = -1 \Rightarrow -4 \cdot (-m) = -1$,

解得 $m = -\frac{1}{4}$.

故选: C.

4. 已知椭圆 $\frac{x^2}{k+8} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 则 k 的值为 ()

- A. 4 B. $\frac{13}{4}$ C. 4 或 $-\frac{5}{4}$ D. 4 或 $\frac{13}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据焦点所在坐标轴进行分类讨论, 由此求得 k 的值.

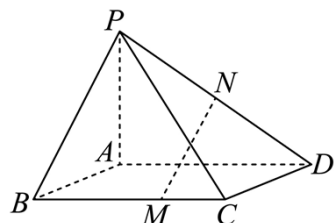
【详解】当焦点在 x 轴上时, $k+8 > 9$, $k > 1$ 且 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{k+8-9}{k+8} = \frac{1}{4} \Rightarrow k = 4$.

当焦点在 y 轴上时, $0 < k+8 < 9$, $-8 < k < 1$ 且 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{9-(k+8)}{9} = \frac{1}{4} \Rightarrow k = -\frac{5}{4}$.

故选: C

5. 四棱锥 $P-ABCD$ 底面 $ABCD$ 为平行四边形, M, N 分别为棱 BC, PD 上的点,

$\frac{CM}{CB} = \frac{1}{3}$, $PN = ND$, 设 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, $\vec{AP} = \vec{c}$, 则向量 $\vec{MN}$ 用基底 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 表示为 ()



- A. $-\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ B. $-\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

C. $-a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c$

D. $a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c$

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意，利用 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}$ ，结合题设条件，以及向量的运算法则，即可求解.

【详解】因为 M, N 分别为棱 BC, PD 上的点， $\frac{CM}{CB} = \frac{1}{3}, PN = ND$,

$$\begin{aligned} \text{则 } \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AD}) \\ &= -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}, \end{aligned}$$

$$\text{故 } \overrightarrow{MN} = -a - \frac{1}{6}b + \frac{1}{2}c.$$

故选：A.

6. 现安排甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学参加上海世博会志愿者服务活动，每人从事翻译、导游、礼仪、司机四项工作之一，每项工作至少有一人参加. 甲、乙不会开车但能从事其他三项工作，丙丁戊都能胜任四项工作，则不同安排方案的种数是

A. 152

B. 126

C. 90

D. 54

【答案】B

【解析】

【详解】试题分析：根据题意，按甲乙的分工情况不同分两种情况讨论，①甲乙一起参加除了开车的三项工作之一，②甲乙不同时参加一项工作；分别由排列、组合公式计算其情况数目，进而由分类计数的加法公式，计算可得答案.

解：根据题意，分情况讨论，①甲乙一起参加除了开车的三项工作之一： $C_3^1 \times A_3^3 = 18$ 种；

②甲乙不同时参加一项工作，进而又分为 2 种小情况；

1°丙、丁、戊三人中有两人承担同一份工作，有 $A_3^2 \times C_3^2 \times A_2^2 = 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 36$ 种；

2°甲或乙与丙、丁、戊三人中的一人承担同一份工作： $A_3^2 \times C_3^1 \times C_2^1 \times A_2^2 = 72$ 种；

由分类计数原理，可得共有 $18 + 36 + 72 = 126$ 种，

故选 B.

考点：排列、组合的实际应用.

7. 若 $(1-x)^8 = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \cdots + a_8(1+x)^8$, 则 $a_6 =$ ()

A. -448

B. -112

C. 112

D. 448

【答案】C

【解析】

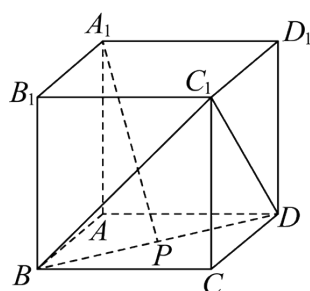
【分析】 $(1-x)^8 = (x-1)^8 = [(1+x)-2]^8$, 然后根据二项式展开式项的系数计算即可.

【详解】 $(1-x)^8 = (x-1)^8 = [(1+x)-2]^8 = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \cdots + a_8(1+x)^8$,

$$a_6 = C_8^2 \cdot (-2)^2 = 112.$$

故选: C.

8. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 满足 $\vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AD}$, 其中 $\lambda \in [0, 1]$, $\mu \in [0, 1]$, 则 ()



A. 存在点 P , 使得 $A_1P \perp$ 平面 BCC_1B_1

B. 存在点 P , 使得 $A_1P \perp$ 平面 BDC_1

C. 当 $A_1P = \sqrt{5}$ 时, CP 的最小值为 $2\sqrt{2}-1$

D. 当 $A_1P = \sqrt{5}$ 时, CP 的最大值为 $2\sqrt{2}+1$

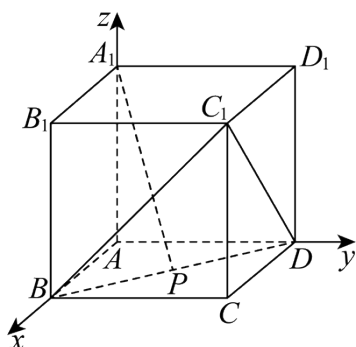
【答案】BC

【解析】

【分析】以点 A 为坐标原点, AB 、 AD 、 AA_1 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系, 求出点 P 的坐标, 利用空间向量法逐项判断, 可得出合适的选项.

【详解】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 以点 A 为坐标原点, AB 、 AD 、 AA_1 所在直线分别为 x 、 y 、

z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0)$ 、 $B(2,0,0)$ 、 $C(2,2,0)$ 、 $D(0,2,0)$ 、 $A_1(0,0,2)$ 、 $B_1(2,0,2)$ 、 $C_1(2,2,2)$ 、 $D_1(0,2,2)$,

因为 $\vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AD} = \lambda(2,0,0) + \mu(0,2,0) = (2\lambda, 2\mu, 0)$, 其中 $\lambda, \mu \in [0,1]$,

对于 A 选项, $\vec{A_1P} = (2\lambda, 2\mu, -2)$, $\vec{CC_1} = (0,0,2)$, 则 $\vec{A_1P} \cdot \vec{CC_1} = -4 \neq 0$,

所以, A_1P 与 CC_1 不垂直, 故不存在点 P , 使得 $A_1P \perp$ 平面 BCC_1B_1 , A 错;

对于 B 选项, $\vec{BD} = (-2, 2, 0)$, $\vec{BC_1} = (0, 2, 2)$,

若存在点 P , 使得 $A_1P \perp$ 平面 BDC_1 , 则 $\begin{cases} \vec{BC_1} \cdot \vec{A_1P} = 4\mu - 4 = 0 \\ \vec{BD} \cdot \vec{A_1P} = -4\lambda + 4\mu = 0 \end{cases}$, 解得 $\lambda = \mu = 1$,

即当点 P 与点 C 重合时, $A_1P \perp$ 平面 BDC_1 , B 对;

对于 CD 选项, $|\vec{A_1P}| = \sqrt{4\lambda^2 + 4\mu^2 + 4} = \sqrt{5}$, 可得 $\lambda^2 + \mu^2 = \frac{1}{4}$,

又因为 $\lambda \in [0,1]$, $\mu \in [0,1]$, 设 $\lambda = \frac{1}{2} \cos \theta$, $\mu = \frac{1}{2} \sin \theta$, 其中 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$,

则 $P(\cos \theta, \sin \theta, 0)$,

则 $|\vec{CP}| = \sqrt{(2 - \cos \theta)^2 + (2 - \sin \theta)^2} = \sqrt{9 - 4(\sin \theta + \cos \theta)} = \sqrt{9 - 4\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$,

因为 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 则 $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$, 所以, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$,

所以, $|\vec{CP}|_{\min} = \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1$, 当且仅当 $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 时, 即当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $|\vec{CP}|$ 取最小值,

$$\left| \overrightarrow{CP} \right|_{\max} = \sqrt{9 - 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{5}, \text{ 当且仅当 } \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4} \text{ 时, 即当 } \theta = 0 \text{ 或 } \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \left| \overrightarrow{CP} \right| \text{ 取最大值,}$$

C 对 D 错.

故选: BC.

二、多项选择题

9. 若 $C_5^x = C_5^{2x-1}$, 则正整数 x 的值是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】AB

【解析】

【分析】由组合数的性质可以列出方程, 求出正整数 x 的值

【详解】由题意得: $x = 2x - 1$ 或 $x + 2x - 1 = 5$,

解得: $x = 1$ 或 $x = 2$, 经过检验, 均符合题意.

故选: AB

10. 若 $(2x+1)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$, $x \in R$, 则 ()

- A. $a_0 = 1$ B. $a_0 = 0$
- C. $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 3^{10}$ D. $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 3$

【答案】AC

【解析】

【分析】令 $x = 0$ 、 $x = 1$ 可得答案.

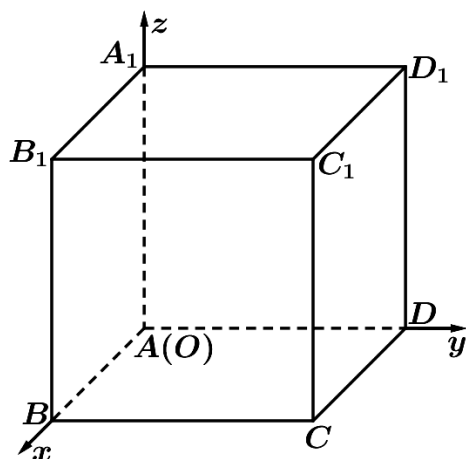
【详解】因为 $(2x+1)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$

所以令 $x = 0$ 可得: $a_0 = 1$

令 $x = 1$ 可得 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 3^{10}$

故选: AC

11. (多选)在如图所示的空间直角坐标系中, $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 1 的正方体, 给出下列结论中, 正确的是 ()



- A. 平面 ABB_1A_1 的一个法向量为 $(0, 1, 0)$
 B. 平面 B_1CD 的一个法向量为 $(1, 1, 1)$
 C. 平面 B_1CD_1 的一个法向量为 $(1, 1, 1)$
 D. 平面 ABC_1D_1 的一个法向量为 $(0, 1, 1)$

【答案】AC

【解析】

【分析】根据法向量的定义及向量的坐标表示、运算逐项分析即可判断.

【详解】 $\because \vec{AD} = (0, 1, 0)$, $AB \perp AD$, $AA_1 \perp AD$, 又 $AB \cap AA_1 = A$, $\therefore AD \perp$ 平面 ABB_1A_1 , $\therefore A$ 正确; $\because \vec{CD} = (-1, 0, 0)$, 而 $(1, 1, 1) \cdot \vec{CD} = -1 \neq 0$, $\therefore (1, 1, 1)$ 不是平面 B_1CD 的法向量, $\therefore B$ 不正确;
 C 中, $AC_1 \perp B_1C$, $AC_1 \perp B_1D_1$, $B_1C \cap B_1D_1 = B_1$, $\therefore AC_1 \perp$ 面 B_1CD_1 且 $\vec{AC_1} = (1, 1, 1)$, $\therefore C$ 正确,
 D 中, 因 $\vec{AB} = (1, 0, 0)$, $\therefore \vec{AB} \cdot (0, 1, 1) = 0$, 又 $\vec{AD_1} = (0, 1, 1)$, 且 $(0, 1, 1) \cdot (0, 1, 1) \neq 0$, $\therefore D$ 不正确.

故选: AC

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 为椭圆 C 的一个动点, 点 $M(1, -1)$, 则下列结论正确的是 ()

- A. 存在点 P , 使得 $PF_1 \perp PF_2$
 B. $\triangle PF_1F_2$ 的面积最大值为 $2\sqrt{2}$
 C. 点 P 到直线 $x + \sqrt{2}y - 1 = 0$ 距离的最大值为 $2\sqrt{3}$

D. $|PM| + |PF_1|$ 的最大值为 7

【答案】BCD

【解析】

【分析】利用椭圆的定义及几何性质可判断 ABD，利用三角函数可判断 C.

【详解】对于 A，当 P 为椭圆短轴顶点时， $\angle F_1PF_2$ 为最大，

$$\text{此时 } \cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{9+9-4}{2 \times 3 \times 3} = \frac{7}{9} > 0, \text{ 即 } \angle F_1PF_2 \text{ 为锐角,}$$

所以不存在点 P 使得 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$ ，故 A 错误；

对于 B，当 P 为椭圆短轴顶点时， $\triangle PF_1F_2$ 的面积最大，且最大面积为：

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}, \text{ 故 B 正确；}$$

$$\text{对于 C，由椭圆 } C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1, \text{ 令 } \begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 2\sqrt{2}\sin\theta \end{cases},$$

则 $P(3\cos\theta, 2\sqrt{2}\sin\theta)$ 在椭圆上，则 $P(3\cos\theta, 2\sqrt{2}\sin\theta)$ 到直线 $x + \sqrt{2}y - 1 = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|3\cos\theta + \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}\sin\theta - 1|}{\sqrt{1+2}} = \frac{|5\sin(\theta + \varphi) - 1|}{\sqrt{3}},$$

$$\text{当 } \sin(\theta + \varphi) = -1 \text{ 时, } d_{\max} = \frac{|-5-1|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}, \text{ 故 C 正确；}$$

$$\text{对于 D，由椭圆 } C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1, \text{ 所以 } F_2(1, 0), \text{ 又 } M(1, -1),$$

$$\text{所以 } |MF_2| = \sqrt{(1-1)^2 + (0+1)^2} = 1,$$

$$\text{所以 } |PM| + |PF_1| = |PM| + 6 - |PF_2| = 6 + |PM| - |PF_2| \leq 6 + |MF_2| = 7, \text{ 故 D 正确.}$$

故选：BCD.

三、填空题

13. 若随机变量 X 服从二项分布 $B\left(5, \frac{1}{3}\right)$ ，则 $P(X=4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{10}{243}$

【解析】

【分析】根据二项分布计算公式计算出正确答案.

【详解】依题意, $P(X=4) = C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{243}$.

故答案为: $\frac{10}{243}$

14. 某城市近 10 年居民的年收入 x 与支出 y 之间的关系大致符合 $\hat{y} = 0.9x + 0.2$ (单位: 亿元), 预计今年该城市居民年收入为 20 亿元, 则今年支出估计是_____亿元.

【答案】18.2

【解析】

【分析】将 $x = 20$ 代入回归回归直线方程即可预估结果.

【详解】根据题意, 由于线性回归直线方程为 $\hat{y} = 0.9x + 0.2$, 那么可知当 $x = 20$ 时, $\hat{y} = 0.9 \times 20 + 0.2 = 18.2$, 因此今年支出估计是 18.2 亿元.

故答案为: 18.2.

15. 已知 F 是椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的右焦点, P 是椭圆 E 上一点, Q 是圆 $C:$

$x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 9 = 0$ 上一点, 则 $|PQ| - |PF|$ 的最小值为_____, 此时直线 PQ 的斜率为_____.

【答案】 ①. -1 ②. 1

【解析】

【分析】利用椭圆定义将 $|PQ| - |PF|$ 转化为 $|PQ| + |PF_1| - 4$, 结合图形可解.

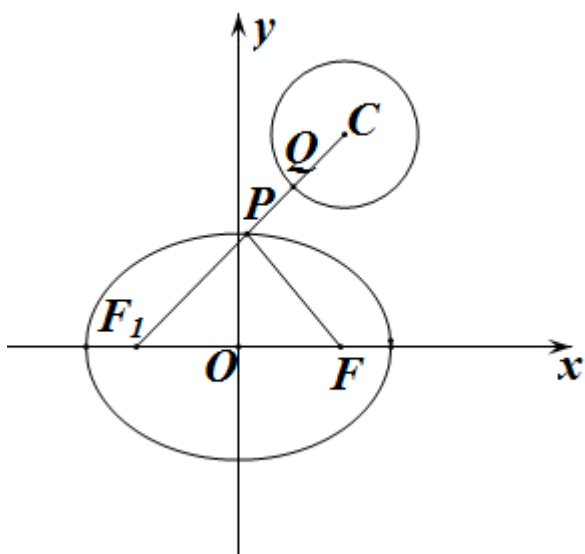
【详解】如图, 由题可知, 圆 C 的圆心坐标为 $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, 半径为 1, 设椭圆 E 的左焦点为 F_1 .

椭圆中, $|PF| = 4 - |PF_1|$, $F_1(-\sqrt{2}, 0)$, 则

$|PQ| - |PF| = |PQ| + |PF_1| - 4 = |PC| + |PF_1| - 5 \geq |CF_1| - 5 = -1$, 当 F_1, P, Q, C 四点共线时, 等号成

立, 此时直线 PQ 的斜率为 $\frac{2\sqrt{2} - 0}{\sqrt{2} - (-\sqrt{2})} = 1$.

故答案为: -1, 1



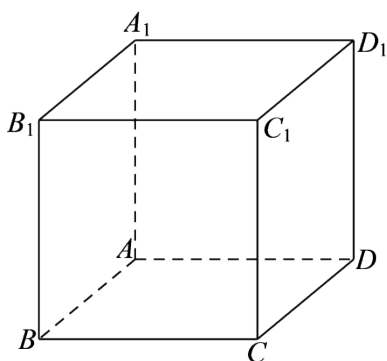
16. 设 ξ 为随机变量，从棱长为1的正方体的12条棱中任取两条，当两条棱相交时， $\xi = 0$ ；当两条棱平行时， ξ 的值为两条棱之间的距离；当两条棱异面时， ξ 为两条棱上两点（不在同一条棱上）间距离的最小值，则随机变量 ξ 的数学期望为_____.

【答案】 $\frac{6+\sqrt{2}}{11}$

【解析】

【分析】作出图形，分析可知随机变量 ξ 的可能取值有0、1、 $\sqrt{2}$ ，求出随机变量 ξ 在不同取值下的概率，进而可求得 $E(\xi)$ 的值.

【详解】在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，如下图所示：



当两条棱相交时， $\xi = 0$ ，与每条棱相交的棱有4条，即 $P(\xi = 0) = \frac{12 \times 4}{C_{12}^2} = \frac{4}{11}$ ；

当两条棱平行时，这两条棱之间的距离为1或 $\sqrt{2}$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/116024141024011030>